Алгебра и логика, 10, № 6 (1971), 603-619.

УДК 519.44

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП БИПРИМАРНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В.А.БЕЛОНОГОВ

Введение

Конечная группа G называется бипримарной, если ее порядок $|G|$ делится точно на два различных простых числа. В настоящей работе свойствами бипримарных подгрупп четного порядка охарактеризованы следующие серии конечных простых групп: проективные специальные линейные группы $PSL(2,q)$ при $q>3$, проективные специальные унитарные группы $PSU(3,2^{2n})$ при $n>1$, группы Сузуки $Sz(q)$, группа Янко J_1 порядка 175560 и группы типа Ри Основным результатом является теорема 1, в которой описываются конечные неразрешимые группы G, удовлетворяющие следующему условию.

УСЛОВИЕ (*). Каждая бипримарная подгруппа четного порядка группы G либо 2-замкнута, либо расщепляема.

Группы, удовлетворяющие условию (*), будем называть кратко (*)-группами.

ТЕОРЕМА 1. Конечная неразрешимая группа G удовлетворяет условию (*) тогда и только тогда, когда

$$G = H \lambda K,$$

где K - разрешимая (*)-группа с элементарной абелевой силовской 2-подгруппой, $|K : C_K(H)|$ нечетен и выполнено одно из следующих условий:

1) $H \simeq Sz(q)$, M_9 или $PGL(2,q)$ при не -

чётном $q>5$ и $(|H|, |K|) = 1$;

2) $H \simeq J_1$ или $PSL(2, 2^n)$ при $n>1$, и $(|H|,|K|) = 2^a$, $a \geq 0$;

3) $H \simeq PSL(2,p^n)$ при нечётном простом p и $p^n>3$, и $(|H|,|K|) = 2^a p^b$, $a\geq 0$, $b\geq 0$, причём

$$a=0 \text{ при } p^n \equiv \pm 1 \pmod 8,$$
$$b=0 \text{ при } p^n \equiv 1 \pmod 4,$$

а при $ab>0$ холловская бипримарная $\{2,p\}$ -подгруппа в K 2-замкнута;

4) $H = L_1 \times \ldots \times L_s$, $s>1$, $L_i \simeq PSL(2,3^{n_i})$ при $i=1,\ldots,s$, где $n_1,\ldots,n_s$ - попарно взаимно простые нечётные числа, и $(|H|,|K|) = 2^a 3^b$, $a\geq 0$, $b \geq 0$, а при $ab>0$ холловская бипримарная $\{2,3\}$ -подгруппа в K 2-замкнута.

Группу G, удовлетворяющую заключению теоремы 1, для которой выполнено условие $i)$, где $i = 1,2,3$ или 4, будем называть группой типа (i).

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Конечная простая неабелева группа G удовлетворяет условию $(*)$ тогда и только тогда, когда она изоморфна одной из групп

$$PSL(2,q) \text{ при } q>3, \ Sz(q) \text{ и } J_1.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Для конечной простой неабелевой группы G следующие условия эквивалентны:

1) каждая бипримарная подгруппа чётного порядка группы G обладает нильпотентным расщеплением;

2) G обладает нильпотентным расщеплением;

3) $G \simeq PSL(2,q)$ при $q>3$ или $Sz(q)$.

Действительно, так как группа Янко J_1 имеет бипримарную подгруппу $B \simeq A_4 \times C_2$, которая не является расщепляемой, то импликация 1) $\Longrightarrow$ 3) непосредственно вытекает из следствия 1; импликации же 3) $\Longrightarrow$ 2) и 2) $\Longrightarrow$ 1) очевидны.

Эквивалентность условий 2) и 3) была доказана ранее М. Сузуки [13].

Отметим также, что теорема 1 обобщает результат работы [1].

Следствие 1 можно усилить, расширив условие (*) до следующего:

УСЛОВИЕ (**). Каждая бипримарная подгруппа чётного порядка группы G является либо (TI)-группой, либо расщепляемой группой.

Под (TI)-группой понимается конечная группа, в которой любые две различные силовские 2-подгруппы пересекаются по единичной подгруппе (см. [15]). При этом 2-замкнутая группа также считается (TI)-группой.

ТЕОРЕМА 2. Конечная простая неабелева группа G удовлетворяет условию (**) тогда и только тогда, когда она изоморфна одной из следующих групп:

$$PSL(2,q) \text{ при } q>3,$$
$$PSU(3,2^{2n}) \text{ при } n>1,$$
$$Sz(q),$$
$$J_1,$$

группы типа Ри.

Под группой типа Ри понимается конечная простая неабелева группа G, в которой все инволюции сопряжены и централизатор инволюции j имеет вид $C_G(j) = \langle j\rangle \times L$, где $L \simeq PSL(2,3^{2n+1})$ при некотором $n>0$. Многие свойства таких групп найдены в работах Янко и Томпсона [9] и Уарда [20]. Очень вероятно, что единственными группами типа Ри являются простые группы Ри $G_2^1(3^{2n+1})$.

Тот факт, что группы типа Ри удовлетворяют условию (**) легко получить из [9]. Легко заметить также, что в группе, удовлетворяющей условию (**), все 2-локальные подгруппы удовлетворяют условию (*). Используя этот факт и теорему 1, можно получить доказательство теоремы 2, повторив почти дословно доказательство леммы 1 из доказательства теоремы 1. Поэтому доказательство теоремы 2 мы не пишем.

СЛЕДСТВИЕ. Для конечной простой неабелевой группы G следующие условия эквивалентны:

1) каждая бипримарная подгруппа чётного порядка группы G является (TI) - группой;

2) G является (TI) - группой;

3) $G \simeq PSL(2,2^n)$ при $n>1$, $PSU(3,2^{2n})$ при $n>1$ или $Sz(q)$.

Действительно, импликация 1) $\Longrightarrow$ 3) непосредственно следует из теоремы 2, а импликация 3) $\Longrightarrow$ 2) и 2) $\Longrightarrow$ 1) очевидны.

Эквивалентность условий 2) и 3) была доказана М.Сузуки в работе [15] .

Напомним теперь некоторые определения и обозначения.

Группа называется расщепляемой, если она является теоретико-множественным объединением нескольких своих собственных попарно взаимно простых подгрупп. Говорят, что группа G обладает нильпотентным расщеплением, если она является теоретико-множественным объединением нескольких своих попарно взаимно простых нильпотентных подгрупп (в частности, и сама G может быть нильпотентной).

Каждая из записей $A \lambda B$ и $B \leftthreetimes A$ обозначает полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B. $\langle M \rangle$ обозначает группу, порожденную множеством M .

Следуя Сузуки [16] , группу G назовем D - группой, если она содержит собственную подгруппу A такую, что все элементы в $G \setminus A$ имеют порядок 2. Бипримарная группа G является D -группой тогда и только тогда, когда $G=(Q \times T) \lambda \langle a \rangle$, где Q - силовская подгруппа нечётного порядка из G, T - 2-группа, $|\langle a \rangle| = 2$ и $a^{-1}xa = x^{-1}$ для всех $x \in Q \times T$. В частности, подгруппа $Q \times T$ абелева. Каждая бипримарная D -группа расщепляема. Подробное изложение результатов о расщепляемых группах имеется в книге[2] .

Из описания расщепляемых групп следует, что условие (*) эквивалентно следующему условию:

УСЛОВИЕ (*'). Если $B = TQ$ - бипримарная подгруппа группы G, T - ее силовская 2-подгруппа и Q - её силовская подгруппа нечётного порядка, то B есть группа одного из следующих типов:

1) $B = T \leftthreetimes Q$ (2-замкнута),

2) $B = Q \leftthreetimes T$ - группа Фробениуса,

3) $B = Q \leftthreetimes T$ - $\mathfrak{D}$-группа,

4) $B \simeq S_4$.

Заметим, что в группах типов 2) - 4) нет нормальных подгрупп нечётного индекса.

S_n, A_n и C_n обозначают соответственно симметрическую группу степени n, знакопеременную группу степени n и циклическую группу порядка n.

M_9 - подгруппа из $P\Gamma L(2,9)$, являющаяся нерасщепляемым расширением $PSL(2,9)$ с помощью группы порядка 2.

2-локальной подгруппой группы G называется нормализатор в G какой-либо ее неединичной 2-подгруппы.

Дальнейшее содержание работы составляет доказательство теоремы 1.

§ 1. Доказательство теоремы 1

Необходимость. Для доказательства теоремы мы применим схему доказательства теоремы 2 из [1]. Всюду в этом параграфе G обозначает конечную неразрешимую (*) - группу такую, что всякая неразрешимая (*)-группа меньшего порядка является группой одного из типов (1) - (4). Леммы 1 - 5 в совокупности доказывают, что группа G сама является группой одного из типов (1) - (4). Отсюда по закону индукции следует, что каждая неразрешимая (*)-группа есть группа одного из типов (1) - (4).

Нетрудно заметить, что группа G обладает следующими свойствами:

(A) Каждая собственная неразрешимая подгруппа H группы G

является группой одного из типов (1) - (4). В частности, H имеет характеристическую подгруппу, которая изоморфна $PSL(2,q)$ при $q>3$, $Sz(q)$ или J_1.

(Б) Каждая собственная 2-локальная подгруппа группы G либо разрешима, либо есть группа одного из типов (2), (3) при $p^n \equiv \pm 3 (mod 8)$ и (4). Если она неразрешима, то ее силовская 2-подгруппа - элементарная абелева.

(В) Каждая собственная фактор-группа группы G по разрешимой нормальной подгруппе является группой одного из типов (1) - (4).

ЛЕММА 1. Если группа G простая, то она изоморфна одной из групп $PSL(2,q)$ при $q>3$, $Sz(q)$ и J_1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы установим некоторые свойства силовских 2-подгрупп группы G, пользуясь известными классификационными результатами.

Если силовские 2-подгруппы группы G диэдральные, то по результату Горенстейна и Уолтера [7] G изоморфна $PSL(2,p^n)$ при $p>2$ или A_7. Но группа A_7 имеет подгруппу $<(567), (12)(56), (1234)(56)> \simeq C_3 \leftthreetimes S_4$, которая не удовлетворяет условию (*). Следовательно, $G \simeq PSL(2,p^n)$ - группа типа (3).

Если силовские 2-подгруппы группы G полудиэдральные, то по результату Уонга [21] все инволюции группы G сопряжены между собой, а централизаторы инволюций не $2'$-замкнуты. Пусть z - инволюция из центра силовской 2-подгруппы T группы G, так что $T \subseteq C_G(z)$. $C_G(z)$ разрешим, так как в противном случае согласно свойству (Б) подгруппа T должна быть абелевой. Будучи не $2'$-замкнутым $C_G(z)$ должен содержать бипримарную холловскую подгруппу TQ, которая также не $2'$-замкнута. Кроме того, $TQ \not\simeq S_4$, так как $Z(TQ) \ni z \neq 1$, а $Z(S_4)=1$. Далее, TQ не может быть и 2-замкнутой группой, так как в этом случае она должна быть и $2'$-замкнутой, ввиду того, что $Aut(T)$ есть 2-группа. Таким образом, TQ не удовлетворяет условию (*), и, следовательно, случай полудиэдральной силовской 2-подгруппы невозможен.

Если силовские 2-подгруппы группы G абелевы, то по результату Уолтера [19] либо $G \simeq PSL(2,q)$, где $q = 2^n$ или $q \equiv \pm 3 (mod 8)$ (и тогда G - группа типа (2) или (3)), либо в G

централизатор любой инволюции изоморфен $C_2 \times PSL(2,q)$, где $q \equiv \pm 3 \pmod 8$. (Заметим, что вместо результата Уолтера [19] мы можем сослаться на результаты Бендера [4] и Уолтера [18]). Согласно результатам Янко [8] и Янко и Томпсона [9], либо $G \simeq J_1$ (и тогда G - группа типа (2)), либо $q = 3^{2n+1}$ и G есть группа типа Ри в смысле Уарда [20]. В последнем случае по результату Уарда [20] G имеет подгруппу $P \lambda <j>$, где P есть 3-группа порядка q^3, j - инволюция и $|C_P(j)| = q$. Ясно, что $P \lambda <j>$ не удовлетворяет условию (*). Таким образом, если силовские 2-подгруппы в G абелевы, то G - группа одного из типов (2), (3).

Если силовские 2-подгруппы группы G независимы (т.е. пересечение любых двух различных силовских 2-подгрупп равно единичной подгруппе), то по результату Сузуки [15] G изоморфна одной из групп $PSL(2,2^n)$ при $n>1$, $Sz(q)$ и $PSU(3,2^{2n})$ при $n>1$. Последняя группа имеет собственную подгруппу, изоморфную $PSL(2,2^n) \times F$, где $|F|$ равен 2^n+1 или $\frac{2^n+1}{3}$, которая не удовлетворяет заключению теоремы. Поэтому $G \simeq PSL(2,2^n)$ или $Sz(q)$ - группа типа (2) или (1).

В результате сделанных замечаний мы можем далее предполагать выполненными следующие два условия.

(Г) Силовские 2-подгруппы группы G не являются ни диэдральными, ни полудиэдральными, ни абелевыми.

(Д) Пересечение некоторых двух различных силовских 2-подгрупп группы G отлично от единичной подгруппы.

Рассмотрим множество $\mathfrak{N}$ всех попарных пересечений различных силовских 2-подгрупп группы G и обозначим через $\mathfrak{M}$ - множество всех максимальных по включению элементов из $\mathfrak{N}$. Согласно свойству (Д) множество $\mathfrak{M}$ не пусто. Рассмотрим два случая.

СЛУЧАЙ 1. $N_G(\mathcal{D})$ разрешим для некоторой подгруппы $\mathcal{D}$ из $\mathfrak{M}$.

Пусть $\tilde{T}$ - некоторая силовская 2-подгруппа из $N_G(\mathcal{D})$ и T - некоторая силовская 2-подгруппа из G, содержащая $\tilde{T}$.

Ввиду выбора $\mathcal{D}$ группа $N_G(\mathcal{D})$ не 2-замкнута. Поэтому в $N_G(\mathcal{D})$ существует бипримарная холловская подгруппа B, которая не 2-замкнута. B не является группой Фробениуса, так как $\mathcal{D} \lhd B$. Кроме того, B не изоморфна S_4, так как в противном случае $\mathcal{D}$

есть четверная группа и $C_T(\mathfrak{D})=\mathfrak{D}$, откуда по результату М.Сузуки [12] T есть диэдральная или полудиэдральная группа, а это невозможно по свойству (Г). Следовательно, по условию (*) B есть $\mathfrak{D}$ -группа: $B=Q\leftthreetimes\widetilde{T}=(Q\times T_1)\leftthreetimes\langle a\rangle$, где $|\langle a\rangle|=2$ и $a^{-1}xa=x^{-1}$ для всех $x\in Q\times T_1$. Так как $\mathfrak{D}\lhd B$, то $\mathfrak{D}\subseteq T_1$, а так как T_1 содержится в пересечении двух различных силовских 2-подгрупп из B, а следовательно, и в пересечении двух различных силовских 2-подгрупп из G, то $\mathfrak{D}=T_1$. Таким образом, $B=(Q\times\mathfrak{D})\leftthreetimes\langle a\rangle$. Если $|\widetilde{T}|=4$, то, очевидно $C_T(\widetilde{T})=T_1$ и по результату Сузуки [12] T диэдральная или полудиэдральная группа, что противоречит свойству (Г). Следовательно, $|\widetilde{T}|\geqslant 8$ и $|\mathfrak{D}|\geqslant 4$.

Допустим, что $\widetilde{T}<T$. Тогда $\widetilde{T}<N_T(\widetilde{T})$ и можно выбрать элемент t в $N_T(\widetilde{T})\setminus\widetilde{T}$ такой, что $t^2\in\widetilde{T}$. Но тогда $\mathfrak{D}\cap\mathfrak{D}^t\lhd\langle\widetilde{T},t\rangle$, причём $\mathfrak{D}\cap\mathfrak{D}^t\neq 1$, так как $|\widetilde{T}:\mathfrak{D}|=|\widetilde{T}:\mathfrak{D}^t|=2$ и $|\mathfrak{D}|=|\mathfrak{D}^t|\geqslant 4$. Следовательно, существует инволюция j, содержащаяся в $\mathfrak{D}\cap\mathfrak{D}^t\cap Z(\langle\widetilde{T},t\rangle)$ и тогда $C_G(j)\geqslant\langle\widetilde{T}Q,t\rangle\geqslant\langle\widetilde{T},t\rangle>\widetilde{T}$. Поэтому $\mathfrak{D}$ не нормальна в $\langle\widetilde{T},t\rangle$ и, в частности, $\langle\widetilde{T},t\rangle$ неабелева. Так как, очевидно, $C_G(j)<G$ и силовская 2-подгруппа в $C_G(j)$ неабелева, то согласно свойству (Б) $C_G(j)$ разрешим. Тогда B содержится в холловской бипримарной подгруппе Q_1T_1 из $C_G(j)$, где $(|Q_1|,|T_1|)=1$, $Q_1\geqslant Q$ и $T_1>\widetilde{T}$. Из условия (*) вытекает, что Q_1T_1 является $\mathfrak{D}$ -группой: $Q_1T_1=(Q_1\times\mathfrak{D}_1)\leftthreetimes\langle a_1\rangle$ гдн $|\langle a_1\rangle|=2$ и $a_1^{-1}xa_1=x^{-1}$ для всех $x\in Q_1\times\mathfrak{D}_1$. Но отсюда следует, что $a_1\in Q_1T_1\setminus Q_1\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}\subseteq C_{T_1}(Q)\subseteq\mathfrak{D}_1$. Следовательно, $\mathfrak{D}\lhd Q_1T_1$, а это невозможно, так как $T_1\not\subseteq N_G(\mathfrak{D})$. Полученное противоречие показывает, что $\widetilde{T}=T$, т.е. силовские 2-подгруппы из $N_G(\mathfrak{D})$ являются силовскими 2-подгруппами в G

Так как по свойству (Г) подгруппа T неабелева, то $\mathfrak{D}$ -единственная подгруппа в T с тем свойством, что $|T:\mathfrak{D}|=2$ и $T\setminus\mathfrak{D}$ состоит из инволюций. Отсюда следует, в частности, что $\mathfrak{D}$ характеристична в T и, следовательно, $N_G(T)\subseteq N_G(\mathfrak{D})$.

Покажем теперь, что $C_G(z)\subseteq N_G(\mathfrak{D})$ для любого элемента z из $Z(T)$. Так как $T\subseteq C_G(z)$ и так как по (Г) T неабелева, то по (Б) $C_G(z)$ разрешим. Рассмотрим в нем произвольную бипримарную холловскую подгруппу TQ, содержащую T. TQ не является группой Фробениуса и не изоморфна S_4, так как $z\in Z(TQ)$. Поэтому, ввиду (*), либо $TQ=T\leftthreetimes Q$, либо $TQ=Q\leftthreetimes T$ - $\mathfrak{D}$ -группа. В первом случае $TQ\subseteq N_G(T)\subseteq N_G(\mathfrak{D})$. Во втором случае, ввиду единственности подгруппы $\mathfrak{D}$ в T со свойством, что $|T:\mathfrak{D}|=2$ и $T\setminus\mathfrak{D}$ состоит из инволюций, $TQ=(Q\times\mathfrak{D})\leftthreetimes\langle a\rangle$ и, следовательно, $TQ\subseteq N_G(\mathfrak{D})$. Таким образом, всегда $TQ \subseteq N_G(\mathfrak{D})$, откуда, ввиду произвольности выбора TQ, вытекает, что $C_G(z) \subseteq N_G(\mathfrak{D})$. Итак, $C_G(z) \subseteq N_G(\mathfrak{D})$ для любого $z \in Z(T)$

Пусть T_1 – произвольная силовская 2-подгруппа из G, содеражащая $\langle a \rangle \times Z(T)$ $(Z(T) = \{d \in D \mid d^2 = 1\})$. Так как T не диэдральная по свойству (Г), то D нециклическая и, следовательно, $|Z(T)| > 4$. Далее, $T_1 = D_1 \leftthreetimes \langle a_1 \rangle$, где $|\langle a_1 \rangle| = 2$, $a_1^{-1} d_1 a_1 = d_1^{-1}$ для всех $d_1 \in D_1$ и $Z(T_1) = \{d_1 \in D_1 \mid d_1^2 = 1\}$. Так как $T_1 \supseteq Z(T)$ и $|Z(T)| \geqslant 4$, то $Z(T) \cap D_1 \neq 1$. Но тогда в $Z(T) \cap D_1$ имеется инволюция z и, следовательно, $z \in Z(T) \cap Z(T_1)$. Поэтому $\langle T, T_1 \rangle \subseteq C_G(z) \subseteq N_G(D)$, откуда $T_1 \supseteq \langle D, a \rangle = T$, т.е. $T_1 = T$. Таким образом, T есть единственная силовская 2-подгруппа в G, содержащая $\langle a \rangle \times Z(T)$.

Допустим теперь, что инволюция a сопряжена в G с некоторым элементом из D: $a = d^x$, $d \in D, x \in G$. Тогда $\langle a \rangle \times Z(T) \subseteq C_G(a) = C_G(d)^x$, откуда следует, что $C_G(a)$ содержит некоторую силовскую 2-подгруппу группы G. Но если T_1 – силовская 2-подгруппа из $C_G(a)$, содержащая $\langle a \rangle \times Z(T)$, то по доказанному ранее $T_1 = T$. Таким образом, $T \subseteq C_G(a)$, т.е. $a \in Z(T)$ что невозможно. Следовательно, a не сопряжена в G ни с одним элементом из D. Но тогда по теореме Чунихина ([3]теорема 1) a не содержится в ядре переноса $G \to T/D$, и, следовательно, группа G непростая. Таким образом, случай 1 невозможен.

СЛУЧАЙ 2. $N_G(D)$ неразрешим для любой подгруппы D из $\mathfrak{M}$.

Согласно свойству (Б) нормализатор любой подгруппы D из $\mathfrak{M}$ имеет вид $N_G(D) = H \leftthreetimes K \geqslant H \times D$, где $H \simeq J_1$, $PSL(2,q)$ при $q > 3$ или $PSL(2,3^{n_1}) \times \ldots \times PSL(2,3^{n_s})$, где $s \geqslant 2$ и $n_1, \ldots, n_s$ – попарно взаимно простые нечётные числа. Но тогда централизатор любого элемента d из D содержит H и, следовательно, неразрешим. По свойству (Б) силовские 2-подгруппы в $C_G(d)$ абелевы, следовательно, по свойству (Г) они не являются силовскими 2-подгруппами в G. Отсюда, ввиду произвольности подгруппы D из $\mathfrak{M}$, следует, что элемент $z \neq 1$, входящий в центр какой-либо силовской 2-подгруппы T группы G, не может содержаться в пересечении двух различных силовских 2-подгрупп группы G. В частности, $C_G(z)$ содержит только одну силовскую 2-подгруппу (а именно T) и, значит, $C_G(z) \subseteq N_G(T)$.

Пусть теперь z – некоторая инволюция из центра некоторой силовской 2-подгруппы T группы G. Рассмотрим слабое замыкание V элемента z в $C_G(z)$ относительно G : $V=\langle z^g \mid g\in G, z^g\in C_G(z)\rangle$. Так как $C_G(z)\subseteq N_G(T)$, то $V\subseteq T$. Далее, так как $z^g\in Z(T^g)$, то z^g содержится точно в одной силовской 2-подгруппе G. Но инволюция z^g из V содержится в T и T^g. Следовательно, $T=T^g$, $g\in N_G(T)$ и $z^g\in Z(T)$. Но тогда $V\subseteq Z(T)$. Таким образом, мы нашли в G инволюцию z, содержащуюся в $Z(T)$, такую, что слабое замыкание ее V в $C_G(z)$ относительно G абелево. По результату Шульта [11] отсюда следует, что $G\simeq PSL(2,2^m)$, $Sz(q)$ или $PSU(3,2^{2m})$, $m>1$. Но как уже отмечалось раньше, группа $PSU(3,2^{2m})$ не удовлетворяет условию (*). Следовательно, G есть группа типа (1) или (2).

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Если группа G непростая, то она имеет нормальную подгруппу, изоморфную $PSL(2,q)$ при $q>3$, $Sz(q)$ или J_1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если группа G имеет собственную неразрешимую нормальную подгруппу, то утверждение леммы непосредственно вытекает из свойства (A).

Предположим теперь, что G не имеет неразрешимых собственных нормальных подгрупп и, в частности, $G'=G$. Пусть M – минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда M – элементарная абелева группа порядка r^δ, где r – простое число. Согласно свойству (B) и сделанному выше предположению, фактор-группа G/M изоморфна одной из групп: $PSL(2,q)$ при $q>3$, $Sz(q)$ и J_1.

Если $r>2$, то, согласно условию (*), подгруппа $M\lambda T$, где T – некоторая силовская 2-подгруппа из G, либо 2-замкнута, либо является D-группой. В обоих случаях M централизует некоторую инволюцию из T и, следовательно, $M\subseteq Z(G)$.

Если же $r=2$, то, рассмотрев полный прообраз в G какой-либо диэдральной бипримарной подгруппы из G/M, мы также получим, что $M\subseteq Z(G)$.

Теперь $G/M \not\simeq J_1$, так как мультипликатор группы J_1 тривиален (см. [8]). Далее, по результату Шура ([10], теорема 9 и ее следствие на стр. 120) при $G/M \simeq PSL(2,q)$ будет либо $q=9$ и $r=3$, либо $G \simeq SL(2,q)$ и q нечётно. В последнем случае G не удовлетворяет условию (*). Если же $r>2$ и $G/M \simeq PSL(2,9)$ или $Sz(q)$, то r не делит $|G/M|$ (иначе, в G/M есть диэдральная подгруппа D/M порядка $2r$ и D не удовлетворяет условию (*)), откуда $G = M \times X$ в противоречие с тем, что $G' = G$. В оставшемся случае, когда $r=2$ и $G/M \simeq Sz(q)$, в G/M есть подгруппа Фробениуса F/M порядка $4s$, где s – нечетное простое число, и F не удовлетворяет условию (*).

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Если G имеет нормальную подгруппу H, изоморфную $Sz(q)$, J_1 или $PSL(2,2^n)$ при $n \geq 3$, то 1) $G = H \lambda K$, где K разрешима, 2) $(|H|,|K|) = 2^a$, $a \geq 0$, причём $a=0$ при $H \simeq Sz(q)$, 3) силовские 2-подгруппы в K элементарные абелевы и централизуют H.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $C = C_G(H)$ и рассмотрим два случая.

1) Пусть $C=1$. Тогда G изоморфна подгруппе из $Aut(H)$. Так как $Aut(J_1) \simeq J_1$ (см. [8]), то при $H \simeq J_1$ будет $G=H$ и лемма верна.

Пусть $H \simeq Sz(2^n)$ или $PSL(2,2^n)$, $n \geq 3$. Тогда $Aut(H) \simeq H \lambda \langle\alpha\rangle$, где $|\langle\alpha\rangle| = n$ (см. [14] и [6]), и, следовательно, $G = H \lambda K$, где K – циклическая группа и $|K|$ делит n. Пусть P – произвольная силовская подгруппа из H. Нетрудно проверить, что подгруппа $N_G(P)$ может удовлетворять условию (*) только при условии, что $(|P|,|K|) = 1$. Поэтому

$$(|H|,|K|) = 1.$$

В этом случае лемма доказана.

2) Пусть теперь $C \neq 1$. Рассмотрим подгруппу $HC = H \times C$. Подгруппа H, как легко видеть, имеет диэдральную подгруппу D_{2r} порядка $2r$ для любого нечётного простого числа r, делящего $|H|$. Если $H \simeq Sz(q)$, то H имеет еще подгруппу Фробениуса F порядка $4s$ для некоторого s, делящего $|H|$. Обозначим через S_p некоторую силовскую p-подгруппу из C. Применяя условие (*) к

подгруппам $D_{2r}\times S_2$, $D_{2r}\times S_r$ и $F\times S_2$, видим, что силовская 2-подгруппа S_2 в C элементарная абелева, $(|H|,|C|)=2^a$ $(a\geq 0)$ и $a=0$ при $H\simeq Sz(q)$. Отсюда следует также, что подгруппа C разрешима.

Фактор-группа G/C удовлетворяет условию (*) по свойству (B) и изоморфна подгруппе из $Aut(H)$. Согласно случаю 1) $G/C = HC/C\wedge K/C$, где K/C – циклическая группа и $(|HC/C|,|K/C|)=1$. Но тогда $G=H\wedge K$, K разрешима, $(|H|,|K|)=(|H|,|C|)=2^a$ и силовские 2-подгруппы из K содержатся в C.

Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Если G имеет нормальную подгруппу L, изоморфную $PSL(2,p^n)$ при нечётном $p^n>3$ и $C_G(L)$ разрешим, то

либо $G=L\wedge K$ – группа типа (3),

либо $G=H\wedge K$, где $H\simeq PGL(2,p^n)$ или M_9, и $(|H|,|K|)=1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $C=C_G(L)$. Тогда G/C изоморфна подгруппе из $Aut(L)\simeq P\Gamma L(2,p^n)=PGL(2,p^n)\wedge\langle\alpha\rangle$, где $|\langle\alpha\rangle|=n$ (см. [6]). Рассмотрим два случая.

1) Пусть $|G:LC|$ нечетен. Тогда $G/C=LC/C\wedge K/C$, где K/C – циклическая подгруппа нечётного порядка, делящего n. Отсюда $G=L\wedge K$, K разрешима и $|K:C_K(L)|=|K:C|$ нечётен. Понятно также, что силовская 2-подгруппа в K элементарная абелева и что $(|L|,|K|)=2^a p^b$, $a\geq 0$, $b\geq 0$. Если $p^n\equiv\pm 1$ $(\mathrm{mod}\ 8)$, то L имеет подгруппу, изоморфную S_4, и, следовательно, $a=0$. Если $p^n\equiv 1(\mathrm{mod} 4)$, то $b=0$, так как иначе нормализатор в G силовской p-подгруппы из L не удовлетворяет условию (*).

Допустим, что $ab>0$. Пусть P – силовская p-подгруппа из L и T – силовская 2-подгруппа из K. Тогда $N_G(P)$ разрешим и его холловская бипримарная $\{2,p\}$-подгруппа имеет вид $T\tilde{P}$, где $\tilde{P}>P$ и $|\tilde{P}|=p^c$. Так как $C_{\tilde{P}}(T)\supseteq P\neq 1$, то согласно условию (*), подгруппа $T\tilde{P}$ 2-замкнута. Но тогда 2-замкнута и холловская бипримарная $\{2,p\}$-подгруппа в K, поскольку $K\simeq N_G(P)/N_L(P)$.

Таким образом, в случае 1) G оказывается группой типа (3).

2) Пусть $|G:LC|$ четен. Положив $\bar{G}=G/C$ и $\bar{L}=LC/C$,

мы можем считать, что $PSL(2,p^n)=\bar{L} \lhd \bar{G} \leq (\bar{L} \leftthreetimes \langle\tau\rangle) \leftthreetimes \langle\alpha\rangle$, где $\bar{L} \leftthreetimes \langle\tau\rangle = PGL(2,p^n)$, $|\langle\alpha\rangle| = n$ и α действует на $\bar{L} \leftthreetimes \langle\tau\rangle$ как автоморфизм, индуцируемый автоморфизмом $x \to x^p$ поля $GF(p^n)$. Следовательно, $\bar{G}$ имеет подгруппу $\bar{X}$, содержащую $\bar{L}$ как подгруппу индекса 2. Роль $\bar{X}$ могут выполнять только три подгруппы: $\bar{L} \leftthreetimes \langle\tau\rangle$, $\bar{L} \leftthreetimes \langle\alpha^{\frac{n}{2}}\rangle$ и $\bar{L} \cdot \langle a\rangle$, где $a = \tau\alpha^{\frac{n}{2}}$, причём последние два случая возможны только при чётном n.

а) Пусть $\bar{X} = \bar{L} \leftthreetimes \langle\alpha^{\frac{n}{2}}\rangle$. Тогда $\alpha^{\frac{n}{2}}$ централизует подгруппу $PSL(2,p^{\frac{n}{2}})$. В этой подгруппе имеется подгруппа $A \simeq A_4$. Так как n чётно, то $N_{\bar{L}}(A) \simeq S_4$. Но теперь $N_{\bar{X}}(A) = N_{\bar{L}}(A) \leftthreetimes \langle\alpha^{\frac{n}{2}}\rangle$ не удовлетворяет условию (*). Таким образом, $\alpha^{\frac{n}{2}} \notin \bar{G}$.

б) Пусть $\bar{X} = \bar{L}\langle a\rangle$, где $a = \tau\alpha^{\frac{n}{2}}$ $(a^2 \in \bar{L})$. Так как в этом случае n чётно, то силовская 2-подгруппа из $\bar{L}$ содержится в диэдральной максимальной подгруппе D порядка $p^n - 1$ из $\bar{L}$. Если $|D|$ делится на нечётное простое число r, то, как легко проверить, ходловская бипримарная $\{2,r\}$-подгруппа в $N_{\bar{X}}(D)$ не удовлетворяет условию (*). Следовательно, $p^n - 1 = 2^m$ $(m \geq 1)$. Но это возможно лишь в случае, когда $n = 1$ или $p^n = 9$ ([17], лемма 3). Так как у нас n чётно, то $p^n = 9$. В этом случае $\bar{X} = M_9$, и нетрудно установить, что тогда $G = M_9 \times C$, где $(|M_9|, |C|) = 1$. Таким образом, либо $p^n = 9$ и G удовлетворяет заключению леммы 5 либо $\tau\alpha^{\frac{n}{2}} \notin \bar{G}$

в) Пусть $\bar{X} = \bar{L} \leftthreetimes \langle\tau\rangle = PGL(2,p^n)$. Тогда $\bar{G} = \bar{X} \leftthreetimes \bar{K}$, где $\bar{K}$ – циклическая, причём из а) и б) следует, что $|\bar{K}|$ нечётен. Пусть $\bar{X} = X/C$. Тогда $X = (L \times C)\langle b\rangle$, где $|\langle b\rangle| = 2^s \geq 2$ и $b^2 \in C$. Так как X/C имеет подгруппу, изоморфную S_4, то из условия (*) следует, что $|C|$ нечётен. Поэтому $b^2 = 1$ и $X = H \leftthreetimes C$, где $H = L \leftthreetimes \langle b\rangle \simeq PGL(2,p^n)$. Применяя к подгруппе X условие (*), получаем $X = H \times C$. Теперь $G = H \leftthreetimes K$, где K – разрешимая группа нечётного порядка. Нетрудно заметить также, что $(|H|, |K|) = 1$.

Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. Если G имеет нормальную подгруппу L, изоморфную $PSL(2,p^n)$ при нечётном $p^n > 3$, и $C_G(L)$ неразрешим, то $p = 3$, n – нечётное и G есть группа типа (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим опять $C = C_G(L)$ и рассмотрим подгруппу $LC = L \times C$. По свойству (A) C имеет подгруппу E, которая изоморфна $PSL(2,q)$ при $q>3$, $Sz(q)$ или J_1. Применим условие (*) к подгруппе $L\times E$. По лемме 3 E не изоморфна $Sz(q)$, J_1 или $PSL(2,2^m)$ при $m\geq 3$. Поэтому $E\simeq PSL(2,r^m)$ при нечетном простом r ($PSL(2,4)\simeq PSL(2,5)$). Далее устанавливаем: $p=r=3$ (иначе в $L\times E$ имеется подгруппа $H\simeq D_6\times C_3$, не удовлетворяющая условию (*)), n и m – нечётные числа (иначе $L\times E\geq H\simeq S_4\times C_2$) и $(3^{2n}-1, 3^{2m}-1)=8$ или, что равносильно, $(n,m)=1$ (иначе $L\times E\geq H\simeq D_{2r}\times C_r$, где r – нечётное простое число, делящее $(3^{2n}-1, 3^{2m}-1)$). Через D_n мы обозначили здесь диэдральную группу порядка n.

Фактор-группа G/C изоморфна подгруппе из $Aut(L)\simeq P\Gamma L(2,3^n)=$ $=PGL(2,3^n)\leftthreetimes\langle\alpha\rangle$, где $|\langle\alpha\rangle|=n$.

1) Пусть $|G:LC|$ нечётен. Тогда $G/C=LC/C\leftthreetimes X/C$ и, следовательно, $G=L\leftthreetimes X$. По свойству (А) $X=(L_2\times\ldots\times L_s)\leftthreetimes K$, где K – разрешима, $L_i\simeq PSL(2,3^{n_i})$ $(i=2,\ldots,s)$ и X есть группа типа (3) или (4) в зависимости от того, будет ли $s=2$ или $s>2$. В любом случае будет $G=H\leftthreetimes K$, где $H=L\times L_2\times\ldots\times L_s$, и G является группой типа (4).

2) Пусть $|G:LC|$ четен. Тогда $G/C=H/C\leftthreetimes X/C$, где $H/C=$ $=L\langle b\rangle C/C\simeq L\langle b\rangle/\langle b^2\rangle\simeq PGL(2,3^n)$ и $|\langle b\rangle|=2^k\geq 2$. Так как в $L\langle b\rangle/\langle b^2\rangle$ есть подгруппа, изоморфная S_4, то, ввиду условия (*), должно быть $b^2=1$. Поэтому G имеет подгруппу $(L\times E)\leftthreetimes$ $\leftthreetimes\langle b\rangle$, где $E\simeq PSL(2,3^m)$. Нетрудно заметить, что в группах L и E существуют $\langle b\rangle$-допустимые подгруппы U и V соответственно такие, что $U\simeq V\simeq A_4$ и $U\leftthreetimes\langle b\rangle\simeq S_4$. Но тогда подгруппа $(U\times V)\leftthreetimes\langle b\rangle$ не удовлетворяет условию (*). Следовательно, случай 2) невозможен.

Лемма 5 доказана

Леммы 1–5 в совокупности доказывают, что конечная группа, удовлетворяющая условию (*), является группой одного из типов (1)–(4).

§ 2. Доказательство теоремы. 1

Достаточность. ЛЕММА 6. Группы каждого из типов (1) – (4) удовлетворяют условию (*).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G=H\leftthreetimes K$ – группа одного из типов

(1) - (4) и B - произвольная максимальная бипримарная подгруппа чётного порядка из G. Пусть $|B|=2^{\alpha}r^{\beta}$, r - простое нечетное число, $\alpha \geqslant 1$, $\beta \geqslant 1$. Возможны три случая.

1) Пусть r не делит $|K|$. Тогда r делит $|H|$. При естественном гомоморфизме G на G/H подгруппа B отобразится на подгруппу BH/H, содержащуюся в некоторой силовской 2-подгруппе F/H из G/H. Тогда $B \subseteq F = H \times T$, где $T=F\cap K$ есть некоторая силовская 2-подгруппа из $C_K(H)$. Ввиду максимальности B будет $T\subseteq B$ и, следовательно,

$$B = B_1 \times T \quad , \text{ где } B_1 = B\cap H.$$

По условию T - элементарная абелева группа.

Если $H\simeq Sz(q), M_g$ или $PGL(2,q)$ при нечётном $q>3$, то $T=1$ и $B=B_1\subseteq H$. Но H удовлетворяет условию (*) (для $H\simeq$ $\simeq M_g$, см. [1]).

Если $H\simeq J_1$, то B_1 есть либо группа диэдра порядка $2n$, где $n = 3,5,6,7,10,11$ или 19, либо 2-замкнутая группа (изоморфная $A_4 \times C_2$). В любом случае $B=B_1\times T$ удовлетворяет условию (*).

Если $H\simeq PSL(2,2^n)$, то B_1 либо 2-замкнута, либо есть группа диэдра, порядок которой не делится на 4. Но тогда B удовлетворяет условию (*).

Пусть $H\simeq PSL(2,p^n)$, $p>2$ и $p^n>3$. Если $T=1$, то $B\subseteq H$ и, очевидно, удовлетворяет условию (*). Если $T\neq 1$, то $p^n\equiv \pm 3 (mod 8)$ и в этом случае B_1 либо 2-замкнута, либо является группой диэдра порядка, не делящегося на 8. Но тогда B удовлетворяет условию (*).

Пусть $H=L_1\times\ldots\times L_s$, $s\geqslant 2$, $L_i \simeq PSL(2,3^{n_i})$. Если $B_1\subseteq L_i$ при некотором $i=1,\ldots,s$, то либо $B_1\simeq A_4$, либо B_1 есть группа диэдра порядка, не делящегося на 8. В общем случае, опуская несложную проверку, мы имеем

$$B_1 = (B_1\cap L_1)\times\ldots\times(B_1\cap L_s).$$

Отсюда ясно, что B удовлетворяет условию (*).

2) Пусть r не делит $|H|$. Тогда r делит $|K|$. $B=TR$, где $|T| = 2^{\alpha}$ и $|R|=r^{\beta}$. Переходя, если нужно, к сопряженной с B подгруппе, мы можем считать, что $R\subseteq K$. Положим $T_1= B\cap H$

T_1 есть нормальная 2-подгруппа в B, и $B/T_1 \simeq BH/H \simeq$ подгруппе из K $(K \simeq G/H)$

Если $T_1 = 1$, то B изоморфна подгруппе из K и, следовательно, удовлетворяет условию (*).

Если $T_1 \neq 1$ и $T_1 = T$, то $B = T \lambda R$ 2-замкнута.

Пусть $1 < T_1 < T$. Тогда силовская 2-подгруппа в G – элементарная абелева, что существенно в дальнейшем. Группа B/T_1, будучи изоморфной бипримарной $\{2, \tau\}$ – подгруппе из K, должна удовлетворять условию (*). Ясно, что $B/T_1 \not\simeq S_4$. Если B/T_1 2-замкнута, то и B 2-замкнута. Если же B/T_1 не 2-замкнута, то она является D -группой: $B/T_1 = (RT_1/T_1 \lambda \langle a \rangle T_1/T_1) \times T_2/T_1$, где $|\langle a \rangle| = 2$. Тогда B/T_1 порождается своими силовскими 2-подгруппами, а следовательно, $BH/H \subseteq C_K(H)H/H$ и $BH \subseteq$ $\subseteq C_K(H) \times H$. Поэтому $R \subseteq C_K(H)$ и, в частности, R централизует T_1. Но тогда R централизует T_2 (так как R централизует также и T_2/T_1), а поэтому $B = (R \lambda \langle a \rangle) \times T_2$.

Но теперь B есть D -группа и,следовательно, удовлетворяет условию (*).

3) Пусть τ делит $(|H|, |K|)$. Тогда либо G есть группа типа (3) и $\tau = p$, либо G есть группа типа (4) и $\tau = 3$. В любом случае холловская бипримарная $\{2, \tau\}$ -подгруппа в K 2-замкнута. Поэтому $HB = H \lambda K_1$, где K_1 – 2-замкнутая $\{2, \tau\}$ -подгруппа из K. Пусть $K_1 = T_1 \lambda R_1$, где T_1 – 2-группа и R_1 – τ -группа. Тогда $HB = (H \times T_1) \lambda R_1$ и $T_1 \subseteq B$. По пункту 1) подгруппа $B \cap HT_1$ 2-замкнута. Но она является нормальной подгруппой τ -индекса в B. Следовательно, подгруппа B 2-замкнута.

Лемма 6 доказана.

Леммы 1–6 в совокупности доказывают теорему 1.

Литература

1. В.А.БЕЛОНОГОВ, Характеризация некоторых конечных простых групп, Изв. АН СССР, сер.матем.,35, №4 (1971), 788–798.

2. В.М.БУСАРКИН, Ю.М.ГОРЧАКОВ, Конечные расщепляемые группы, "Наука", 1968.

3. С.А.ЧУНИХИН, О существовании подгрупп у конечной группы, Труды семинара по теории групп, ГОНТИ, 1938, 106–125.

4. H.BENDER, On groups with abelian Sylow 2-subgroups, Math.Z., 117, N1-4 (1970),164-176.

5. L.E.DICKSON, Linear Groups, Doner,1958.

6. J.DIEUDONNÉ, On the automorphisms of the classical groups, Mem.Amer.Math.Soc.,N2 (1951).

7. D.GORENSTEIN,J.H.WALTER, The characterization of finite groups groups with dihedral Sylow 2-subgroups. I,II,III, J.Algebra,2 (1965), 85-151,218-270,354-393.

8. Z.JANKO, A new finite simple groups with abelian Sylow 2-subgroups and its characterization, J.Algebra,3,N2(1966),147-186.

9. Z.JANKO,J.G.THOMPSON, On a class of finite groups of Ree,J. Algebra,4,N2(1966),274-292.

10. I.SCHUR, Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitution,J.reine und angew.Math., 132, N2 (1907),85-137.

11. E.SHULT, On the fusion an involution in its centralizer,Notices Amer.Math.Soc.,17,N3(1970),548.

12. M.SUZUKI, A characterization of simple groups LF (2, p),J. Fac.Univ.Tokyo,Sect.I,6 (1951),259-293.

13. M.SUZUKI, On a finite groups with a partition,Arch.Math.,12, N4 (1961),241-254.

14. M.SUZUKI, On a class of doubly transitive groups, Ann.Math., 75, N1 (1962),105-145.

15. M.SUZUKI, Finite groups of even order in which Sylow 2-groups are independent, Ann.Math.,80,N1(1964),58-77.

16. M.SUZUKI, A characterization of the simple groups PSL (2, q), J.Math.Soc.Japan,20,N1-2 (1968),342-349.

17. J.G.THOMPSON, A special class of nonsolvable groups, Math.Z., 72,N5 (1960),458-462.

18. J.H.WALTER, Finite groups with abelian Sylow 2-subgroups of order 8, Inventiones math.,2,N5 (1967),332-376.

19. J.H.WALTER, The characterization of finite groups with abelian Sylow 2-subgroups, Ann.Math.,89,N3 (1969),405-514.

20. H.N.WARD, On Ree's series of simple groups, Trans.Amer.Math. Soc.,121,N1(1966),62-89.

21. W.J.WONG, On finite groups whose 2-Sylow subgroups have cyclic subgroups of index 2, J.Austral.Math.Soc.,4,N1 (1964),90-112.

Поступило 20 июля 1971 г.