

СХОДЯЩИЕСЯ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ
ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

1. Фильтрацией вязкой жидкости с запаздыванием называется такое движение вязкой жидкости в пористой среде, при котором скорость $v(x,t)$ и давление $p(x,t)$ подчиняются реологическому закону Ларси с запаздыванием [1]-[3]:

$$\sum_{l=0}^L \alpha_l \frac{\partial^l v}{\partial t^l} = \sum_{m=0}^M x_m \frac{\partial^m \nabla p}{\partial t^m}; \tag{1}$$

при этом, как и в теории линейных вязкоупругих жидкостей [3]-[5], числа L и M связаны одним из трех условий:

либо $M = L-1, L=1,2,\dots$ - это фильтрация типа Максвелла порядка L ;
 либо $M = L=1,2,\dots$ - это фильтрация типа Олдройта порядка L ;
 либо $M=L+1, L=0,1,2,\dots$ - это фильтрация типа Кельвина-Фойгта порядка L .

Коэффициенты $\lambda_l, \lambda_l > 0, l=1,\dots,L$, называются временами релаксации скорости, а коэффициенты $x_m, x_m > 0, m=0,1,\dots,M$ - проведенными временами запаздывания давления.

2. В работе авторов [1] показано, что нестационарная фильтрация вязкой слабосжимаемой жидкости в упругодеформируемой однородной пористой среде с запаздыванием типа Максвелла порядка $L=1,2,\dots$, типа Олдройта $L=1,2,\dots$ и типа Кельвина-Фойгта порядка $L=0,1,2,\dots$ описывается соответственно следующими интегродифференциальными уравнениями:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - x \int_0^t \kappa_1(t-\tau) \Delta p d\tau = 0, x > 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - x(\mu_0^{(2)} \Delta p + \int_0^t \kappa_2(t-\tau) \Delta p d\tau) = 0, x > 0, \mu_0^{(2)} = x_L \cdot \lambda_L^{-1}; \tag{3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - x(\mu_1 \frac{\partial \Delta p}{\partial t} + \mu_0^{(3)} \Delta p + \int_0^t \kappa_3(t-\tau) \Delta p d\tau) = 0, x > 0, \mu_1 = x_{L+1} \cdot \lambda_L^{-1}, \mu_0^{(3)} = (x_L - \mu_1 \lambda_{L-1}) \lambda_L^{-1} \tag{4}$$

В уравнениях (2)-(4) ядра $\kappa_i(t)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\sum_{\ell=0}^L \lambda_{\ell} \frac{\partial^{\ell} \kappa_i}{\partial t^{\ell}} = 0, \quad t > 0, \quad L = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5)$$

и начальным условием Коши

$$\sum_{\ell=0}^n \lambda_{L-n+\ell} \frac{\partial^{\ell} \kappa_i}{\partial t^{\ell}}(0) = x_{L-n-1} \mu_i \lambda_{L-n-2} \delta_{3i} - \mu_0^{(i)} \lambda_{L-n-1} (1 - \delta_{1i}), \quad (6)$$

$$n = 0, 1, \dots, L-1; \quad i = 1, 2, 3,$$

в которых $\lambda_{L-n} = 0$, δ_{ij} - символ Кронекера, а μ_i и $\mu_0^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, определены в (3) и (4). По поводу коэффициента x см. [2], [3].

3. В [I] показано, далее, что если в уравнениях (2)-(4) ввести новые неизвестные функции $q_i(x, t)$ при помощи уравнений

$$\sum_{s=0}^{L-1} \alpha_s^{(i)} \frac{\partial^s q_i}{\partial t^s} = \int_0^t \kappa_i(t-\tau) p d\tau, \quad \alpha_0^{(i)} = 1; \quad \sum_{s=0}^L \gamma_s^{(i)} \frac{\partial^s q_i}{\partial t^s} = p; \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

в которых коэффициенты $\{\alpha_s^{(i)}\}$, $s = 1, 2, \dots, L-1$ и $\{\gamma_s^{(i)}\}$, $s = 0, 1, \dots, L$, находятся из алгебраической системы уравнений

$$\alpha_0^{(i)} = 1; \quad \sum_{p=j+s-1=L} \lambda_p \frac{\partial^j \kappa_i(0)}{\partial t^j} \gamma_s^{(i)} = \sum_{p+j=L} \lambda_p \alpha_j^{(i)}, \quad \ell = 0, 1, \dots, 2L-1; \quad i = 1, 2, 3, \quad (8)$$

то уравнения (2)-(4) сводятся соответственно к следующим трем системам дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - x \Delta \sum_{\ell=0}^{L-1} \alpha_{\ell}^{(1)} \frac{\partial^{\ell} q_1}{\partial t^{\ell}} = 0, \quad p = \sum_{\ell=0}^L \gamma_{\ell}^{(1)} \frac{\partial^{\ell} q_1}{\partial t^{\ell}}; \quad (9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - x(\mu_0^{(2)} \Delta p + \Delta \sum_{\ell=0}^{L-1} \alpha_{\ell}^{(2)} \frac{\partial^{\ell} q_2}{\partial t^{\ell}}) = 0, \quad p = \sum_{\ell=0}^L \gamma_{\ell}^{(2)} \frac{\partial^{\ell} q_2}{\partial t^{\ell}}; \quad (10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - x(\mu_1 \frac{\partial \Delta p}{\partial t} + \mu_0^{(3)} \Delta p + \Delta \sum_{\ell=0}^{L-1} \alpha_{\ell}^{(3)} \frac{\partial^{\ell} q_3}{\partial t^{\ell}}) = 0, \quad p = \sum_{\ell=0}^L \gamma_{\ell}^{(3)} \frac{\partial^{\ell} q_3}{\partial t^{\ell}}. \quad (11)$$

4. Исключая в системах (9)-(11) давление $p(x, t)$, мы получим, что нестационарная фильтрация с запаздыванием вязкой слабо-

сжимаемой жидкости в упругодеформируемой однородной пористой среде описывается уравнением

$$\sum_{\ell=0}^L \alpha_{\ell} \frac{\partial^{\ell+1} q}{\partial t^{\ell+1}} - \sum_{m=0}^M \beta_m \frac{\partial^m \Delta q}{\partial t^m} = f(x, t), \quad \alpha_{\ell}, \beta_m > 0, \quad (I2)$$

в котором либо $M=L-1$, $L=1, 2, \dots$ (фильтрация типа Максвелла), либо $M=L-1, 2, \dots$ (фильтрация типа Олдройта), либо $M=L+1$, $L=0, 1, 2, \dots$ (фильтрация типа Кельвина - Фойгта). Уравнение (I2) решается в $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \in E^n$, $n=1, 2, 3$, $0 < T < \infty$, при начальных условиях Коши

$$\left. \frac{\partial^s q}{\partial t^s} \right|_{t=0} = 0, \quad s=0, 1, \dots, L-1; \quad \left. \frac{\partial^L q}{\partial t^L} \right|_{t=0} = q_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (I3)$$

и одном из краевых условий [I]-[3]:

$$\sum_{\ell=0}^L \alpha_{\ell} \left. \frac{\partial^{\ell} q}{\partial t^{\ell}} \right|_{\partial Q_T} = 0, \quad q_0 \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (I4)$$

либо

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \sum_{m=0}^M \beta_m \frac{\partial^m q}{\partial t^m} \right|_{\partial Q_T} = 0, \quad \left. \frac{\partial q_0}{\partial n} \right|_{\partial \Omega} = 0. \quad (I5)$$

5. Теория разрешимости начально-краевых задач (I2)-(I4) и (I2), (I4), (I5) при $M=L-1$ аналогична теории разрешимости смешанных задач для гиперболических уравнений [6], при $M=L$ - теории разрешимости смешанных задач для эволюционных уравнений с сильной диссипацией [7], при $M=L+1$ - теории разрешимости начально-краевых задач для псевдопараболических уравнений [4], [5], [8], [9]. Для начально-краевой задачи (I2)-(I4) эти результаты содержатся в следующих теоремах [I], [5], [9].

ТЕОРЕМА I. Пусть выполнены условия: $M=L-1$, $L=1, 2, \dots$; $\partial \Omega \in C^2$; $q_0(x) \in W_{2,1}^1(\Omega)$; $f, f_t \in L_{2,1}(Q_T)$. Тогда смешанная задача (I2)-(I4) имеет единственное решение $q(x, t)$, у которого $\frac{\partial^{L+1} q}{\partial t^{L+1}} \in L_2(Q_T)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия: $M=L-1, 2, \dots$; $\partial \Omega \in C^2$; $q_0(x) \in W_{2,0}^2(\Omega)$; $f, f_t \in L_{2,1}(Q_T)$. Тогда смешанная задача (I2)-(I4) имеет единственное решение $q(x, t)$, у которого $\frac{\partial^{L+2} q}{\partial t^{L+1} \partial x} \in L_2(Q_T)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия: $M=L+1$, $L=0, 1, 2, \dots$; $\partial \Omega \in C^{2+\alpha}$; $0 < \alpha < 1$; $q_0(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$; $f \in L_{\infty}(0, T; C^{\alpha}(\bar{\Omega}))$, $f_t \in L_{2,1}(Q_T)$. Тогда начально-краевая задача (I2)-(I4) имеет единственное решение $q(x, t) \in W_{\infty}^{L+1}(0, T; C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}))$.

6. Наибольший интерес для практики в настоящее время имеют фильтрация типа Максвелла и типа Олдройта порядка $L=1$ и фильтрация типа Кельвина-Фойгта порядка $L=0$ [2], [3].

7. Фильтрация типа Максвелла порядка $L=1$ описывается начально-краевыми задачами (I2)-(I4) и (I2), (I3), (I5) для волнового уравнения с диссипацией. Конечно-разностные схемы для таких задач хорошо известны [6], [10].

8. Фильтрация типа Олдройта порядка $L=1$ описывается начально-краевыми задачами (I2)-(I4) и (I2), (I3), (I5) для эволюционного уравнения с сильной диссипацией [7]. Для таких задач могут быть построены неявные конечно-разностные схемы, близкие известным неявным схемам для волнового уравнения [6], [10], решения которых сходятся к точным решениям изучаемых начально-краевых задач (I2)-(I4) и (I2), (I3), (I5) при любом соотношении между шагами Δt и Δx . Например, для задачи (I2)-(I4) при $M=L=1$ эта схема в обозначениях 6, гл.VI, § 10 имеет вид

$$\alpha_1 q_{ht}^l + \alpha_0 q_{ht}^{l+1} - \beta_1 q_{hx\bar{x}}^{l+1} - \beta_0 q_{hx\bar{x}}^{l+1} = f_h^{l+1}, \quad x \in \Omega_h, \quad l=1, \dots, \left[\frac{T}{\Delta t} \right], \quad (I6)$$

$$q_h^0 = 0, \quad q_h^1 = \Delta t q_{0h}, \quad x \in \Omega_h; \quad (\alpha_0 q_h^l + \alpha_1 q_{ht}^l) \Big|_{\partial \Omega_h} = 0, \quad l=1, \dots, \left[\frac{T}{\Delta t} \right] \quad (I7)$$

Устойчивость разностной схемы (5)-(6) и сходимость ее решений к точному решению задачи (I2)-(I4) в пространстве $V(Q_T)$ с нормой $\|q\|_V^2 = \max_{0 \leq t \leq T} \|q_t\|_{2,\Omega}^2 + \iint_{Q_T} \left| \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t} \right|^2 dx dt$ следует из энергетической оценки

$$\|q_{ht}^m\|_{2,\Omega_h}^2 + \|q_{hx}^m\|_{2,\Omega_h}^2 + \Delta t \sum_{l=1}^m (\|q_{ht}^l\|_{2,\Omega_h}^{(1)})^2 \leq c \left[\|q_{0h}\|_{2,\Omega_h}^2 + (\Delta t \sum_{l=1}^m \|f_h^l\|_{2,\Omega_h}^2)^2 \right], \quad (I8)$$

$$m=1, \dots, \left[\frac{T}{\Delta t} \right].$$

9. В [I] показано (см. также п.3), что фильтрация типа Олдройта порядка $L=1$ может быть также описана системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \mu \Delta p - \alpha \Delta q = q(x), \quad p = \alpha \frac{\partial q}{\partial t} + \beta q, \quad \alpha, \mu, \alpha, \beta > 0; \quad (I9)$$

которая решается в Q_T при начальных условиях Коши

$$p|_{t=0} = p_0(x), \quad q|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (20)$$

и одним из краевых условий: либо

$$p|_{\partial Q_T} = q|_{\partial Q_T} = 0, \quad p_0|_{\partial \Omega} = 0. \quad (21)$$

либо

$$\frac{\partial}{\partial n}(\mu p + \alpha q) \Big|_{\partial \Omega_T} = 0, \quad \frac{\partial p_0}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 0. \quad (22)$$

Для начально-краевых задач (19)-(21) и (19), (20), (22) могут быть построены неявные конечно-разностные схемы и схемы переменных направлений, близкие известным схемам для уравнения теплопроводности [6], [10], решения которых сходятся к решениям задач (19)-(21) и (19), (20), (22) при любом соотношении между Δt и Δx_i . Например, для задачи (19)-(21) неявная разностная схема в обозначениях [6], гл.VI, § 9 имеет вид

$$p_{h\bar{t}}^\ell - \mu p_{h\bar{t}x_k x_k}^\ell - \alpha q_{h\bar{t}x_k x_k}^\ell = f_h^\ell, \quad p_h^\ell = \alpha q_{h\bar{t}}^\ell + \beta q_h, \quad x \in \Omega_h, \quad \ell = 1, \dots, \left[\frac{T}{\Delta t} \right], \quad (23)$$

$$p_h^0 = p_{0h}, \quad q_h^0 = 0, \quad x \in \Omega_h; \quad p_h^\ell \Big|_{\partial \Omega_h} = q_h^\ell \Big|_{\partial \Omega_h} = 0, \quad (24)$$

а схема переменных направлений имеет следующий вид:

$$p_{h\bar{t}}^{\ell+\frac{\delta}{n}} - \mu p_{h\bar{t}x_s x_s}^{\ell+\frac{\delta}{n}} - \alpha q_{h\bar{t}x_s x_s}^{\ell+\frac{\delta}{n}} - \lambda \sum_{r=1}^{\delta-1} (\mu p_{h\bar{t}}^{\ell+\frac{r}{n}} + \alpha q_{h\bar{t}}^{\ell+\frac{r}{n}})_{x_s \bar{x}_s} = \frac{1}{n} f_h^{\ell+\frac{\delta}{n}}, \quad p_h^{\ell+\frac{\delta}{n}} = \alpha q_{h\bar{t}}^{\ell+\frac{\delta}{n}} + \beta q_h^{\ell+\frac{\delta}{n}}, \quad (25)$$

$$x \in \Omega_h, \quad \delta = 1, \dots, n; \quad \ell = 0, 1, \dots, \left[\frac{T}{\Delta t} \right] - 1,$$

$$p_h^0 = p_{0h}, \quad q_h^0 = 0, \quad x \in \Omega_h; \quad p_h^{\ell+\frac{\delta}{n}} \Big|_{\partial \Omega_h} = q_h^{\ell+\frac{\delta}{n}} \Big|_{\partial \Omega_h} = 0, \quad \delta = 1, \dots, n. \quad (26)$$

Для решений задачи (23), (24) справедлива энергетическая оценка

$$\begin{aligned} & \| p_h^m \|^2_{2, \Omega_h} + \alpha \alpha \| q_{hx}^m \|^2_{2, \Omega_h} + 2\mu \Delta t \sum_{\ell=1}^m \| p_{hx}^\ell \|^2_{2, \Omega_h} + 2\alpha \beta \Delta t \sum_{\ell=1}^m \| q_{hx}^\ell \|^2_{2, \Omega_h} + \\ & + (\Delta t)^2 \sum_{\ell=1}^m \left(\| p_{h\bar{t}}^\ell \|^2_{2, \Omega_h} + \alpha \alpha \| q_{h\bar{t}}^\ell \|^2_{2, \Omega_h} \right) \leq 2 \| p_{0h} \|^2_{2, \Omega_h} + \\ & + 5 (\Delta t)^2 \sum_{\ell=1}^m \| f_h^\ell \|^2_{2, \Omega_h}, \quad m = 1, \dots, \left[\frac{T}{\Delta t} \right], \end{aligned} \quad (27)$$

из которой следует устойчивость разностной схемы (23), (24) и сходимость ее решений (p_h, q_h) к решению (p, q) задачи (19)-(21)

в пространстве $W_2^{1,0}(Q_T) \times V(Q_T)$, $\|q\|_V^2 = \max_{0 \leq t \leq T} \|q_t\|_{2,\Omega}^2 + \int_{Q_T} q_{xt}^2 dx dt$.

Для решений задачи (25), (26) справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|P_h^{m+1}\|_{2,\Omega_h}^2 + \varkappa \sum_{s=1}^n \|q_{hx_s}^{m+1}\|_{2,\Omega_h}^2 + \Delta t \sum_{k=0}^m \sum_{\nu=1}^n (\mu \|P_{hx_\nu}^{k+\frac{\nu}{n}}\|_{2,\Omega_h}^2 + \\ & + \varkappa \|q_{hx_\nu}^{k+\frac{\nu}{n}}\|_{2,\Omega_h}^2) + \sum_{k=0}^m \sum_{\nu=1}^n (\mu \|P_h^{k+\frac{\nu}{n}} - P_h^{k+\frac{\nu-1}{n}}\|_{2,\Omega_h}^2 + \varkappa \|q_{hx_\nu}^{k+\frac{\nu}{n}} - q_{hx_\nu}^{k+\frac{\nu-1}{n}}\|_{2,\Omega_h}^2) \leq \\ & \leq C(\mu^{-1}, \alpha^{-1}) \left[\|P_{0h}\|_{2,\Omega_h}^2 + \Delta t \sum_{k=0}^m \sum_{\nu=1}^n \|f_h^{k+\frac{\nu}{n}}\|_{2,\Omega_h}^2 \right], \quad m=0,1,\dots, \left[\frac{T}{\Delta t} \right] - 1, \end{aligned} \quad (28)$$

с помощью которой доказывается сходимость решений (P_h, q_h) к гладкому решению задачи (19)-(21) в норме, определяемой левой частью (28). [6].

Ю. В [1] показано (см. также п.3), что фильтрация типа Кельвина-Фойгта порядка $L=0$ и $L=1$ описывается также начально-краевыми задачами

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial p}{\partial t} - \mu \Delta p - \mu_1 \frac{\partial \Delta p}{\partial t} = f(x,t), \quad \mu, \mu_1 > 0, \quad (x,t) \in Q_T, \quad p|_{t=0} = p_0(x), \quad x \in \Omega, \\ & p|_{\partial Q_T} = 0 \quad (\text{или } \frac{\partial p}{\partial n} |_{\partial Q_T} = 0) \end{aligned} \right\} (29)$$

и

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial p}{\partial t} - \mu \Delta p - \mu_1 \frac{\partial \Delta p}{\partial t} - \varkappa \Delta q = f(x,t), \quad p = \alpha \frac{\partial q}{\partial t} + \beta q, \quad \varkappa, \mu, \mu_1, \alpha, \beta > 0; \quad (x,t) \in Q_T, \\ & p|_{t=0} = p_0(x), \quad q|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega; \quad p|_{\partial Q_T} = q|_{\partial Q_T} = 0 \quad (\text{или } \frac{\partial}{\partial n} (\mu_1 \frac{\partial p}{\partial t} + \mu p + \varkappa q) |_{\partial Q_T} = 0). \end{aligned} \right\} (30)$$

Для задачи (29) построены устойчивые сходящиеся при любом соотношении между Δt и Δx_ν неявная конечно-разностная схема и схема переменных направлений; в случае краевого условия $p|_{\partial Q_T} = 0$ они имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} & P_h^{\ell+1} - \mu_1 P_{hx_k \bar{x}_k}^{\ell+1} - \mu P_{hx_k \bar{x}_k}^{\ell+1-\gamma} = f_h^{\ell+1}, \quad \gamma=0,1; \quad x \in \Omega_h, \quad \ell=0,1,\dots, \left[\frac{T}{\Delta t} \right] - 1, \\ & P_h^0 = P_{0h}, \quad x \in \Omega_h; \quad P_h^{\ell+1} |_{\partial \Omega_h} = 0; \end{aligned} \right\} (31)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & P_{h\bar{t}}^{\ell+\frac{s}{n}} - \mathcal{M}_1 P_{h\bar{t}x_3\bar{x}_3}^{\ell+\frac{s}{n}} - \mathcal{M} P_{hx_3\bar{x}_3}^{\ell+\frac{s}{n}-\gamma} - 2 \sum_{z=1}^{s-1} (\mathcal{M}_1 P_{hx_2\bar{x}_2\bar{t}}^{\ell+\frac{z}{n}} + \mathcal{M} P_{hx_2\bar{x}_2}^{\ell-\frac{z}{n}-\gamma}) = \\
 & = \frac{1}{h} f^{\ell+\frac{s}{n}}, \quad \gamma = 0, 1; \quad s = 1, \dots, n; \\
 & P_h^0 = P_{oh}, \quad x \in \Omega_h; \quad P_h^{\ell+\frac{s}{n}} \Big|_{\partial\Omega_h} = 0; \quad \ell = 0, 1, \dots, \left[\frac{T}{\Delta t} \right] - 1
 \end{aligned} \right\} (32)$$

Для задачи (30) также построены устойчивые сходящиеся при любом соотношении между Δt и Δx ; неявная конечно-разностная схема и схема переменных направлений:

$$\left. \begin{aligned}
 & P_{h\bar{t}}^{\ell+1} - \mathcal{M}_1 P_{h\bar{t}x_k\bar{x}_k}^{\ell+1} - \mathcal{M} P_{hx_k\bar{x}_k}^{\ell+1-\gamma} - \alpha q_{hx_k\bar{x}_k}^{\ell+1} = f_n^{\ell+1}, \quad P_h^{\ell+1} = \alpha q_{h\bar{t}}^{\ell+1} + \beta q_h^{\ell+1}, \quad \gamma = 0, 1; \quad x \in \Omega_h, \\
 & P_h^0 = P_{oh}, \quad q_h^0 = 0, \quad x \in \Omega_h; \quad P_h^{\ell+1} \Big|_{\partial\Omega_h} = q_h^{\ell+1} \Big|_{\partial\Omega_h} = 0, \quad \ell = 0, 1, \dots, \left[\frac{T}{\Delta t} \right] - 1
 \end{aligned} \right\} (33)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & P_{h\bar{t}}^{\ell+\frac{s}{n}} - \mathcal{M}_1 P_{h\bar{t}x_3\bar{x}_3}^{\ell+\frac{s}{n}} - \mathcal{M} P_{hx_3\bar{x}_3}^{\ell+\frac{s}{n}-\gamma} - \alpha q_{hx_3\bar{x}_3}^{\ell+\frac{s}{n}} - 2 \sum_{z=1}^{s-1} (\mathcal{M}_1 P_{h\bar{t}x_2\bar{x}_2}^{\ell+\frac{z}{n}} + \mathcal{M} P_{hx_2\bar{x}_2}^{\ell+\frac{z}{n}-\gamma} - \alpha q_{hx_2\bar{x}_2}^{\ell+\frac{z}{n}}) = \\
 & = \frac{1}{h} f^{\ell+\frac{s}{n}}, \quad P_h^0 = P_{oh}, \quad q_h^0 = 0, \quad x \in \Omega_h; \quad P_h^{\ell+\frac{s}{n}} \Big|_{\partial\Omega_h} = 0, \quad \gamma = 0, 1; \quad s = 1, \dots, n; \quad \ell = 0, 1, \dots, \\
 & \dots, \left[\frac{T}{\Delta t} \right] - 1.
 \end{aligned} \right\} (34)$$

Сходимость решений разностных задач (31), (32) и (33), (34) к решениям начально-краевых задач (29) и (30) следует из соответствующих энергетических оценок. Например, для решения разностной задачи (31) справедлива оценка

$$(\|P_h^{m(1)}\|_{2, \Omega_h} + \Delta t \sum_{\ell=1}^m \|P_{hx}^{\ell}\|_{2, \Omega_h}^2) \leq C [(\|P_{oh}^{(1)}\|_{2, \Omega_h})^2 + (\Delta t \sum_{\ell=1}^m \|f_n^{\ell}\|_{2, \Omega_h})^2], \quad m=1, \dots, \left[\frac{T}{\Delta t} \right], (35)$$

а для решений разностной задачи (34) верна оценка

$$\begin{aligned}
 & (\|P_h^{m+1(1)}\|_{2, \Omega_h})^2 + \sum_{s=1}^n \|q_{hx_3}^{m+1}\|_{2, \Omega_h}^2 + \Delta t \sum_{k=0}^m \sum_{z=1}^n (\|P_{hx_2}^{k+\frac{z}{n}-\gamma}\|_{2, \Omega_h}^2 + \|q_{hx}^{k+\frac{z}{n}}\|_{2, \Omega_h}^2) + \\
 & + \sum_{k=0}^m \sum_{z=1}^n [(\|P_h^{k+\frac{z}{n}} - P_h^{k+\frac{z-1}{n}}\|_{2, \Omega_h}^{(1)})^2 + \|q_{hx_2}^{k+\frac{z}{n}} - q_{hx_2}^{k+\frac{z-1}{n}}\|_{2, \Omega_h}^2] \leq
 \end{aligned}$$

$$\leq C(\bar{x}^{-1}, \bar{\mu}_1^{-1}) \left[\left(\|P_{oh}\|_{2, \Omega_h}^{(1)} \right)^2 + \Delta t \sum_{k=0}^m \sum_{z=1}^n \|f_h^{k+z}\|_{2, \Omega_h}^2 \right], m=0, 1, \dots, \left[\frac{T}{\Delta t} \right] - 1. \quad (25)$$

Литература

1. Осколков А.П., Ахматов М. Корректные постановки начально-краевых задач для уравнений фильтрации жидкости с запаздыванием. - В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. УП. Зап. науч. семинар ЛОМИ, 1986, т.150, с.130-141.
2. Огибалов М.П., Мирзаджанзаде А.Х. Механика процессов. М., Изд-во МГУ, 1976.
3. Акилов Ж.А. Нестационарные течения вязкоупругих жидкостей. Ташк., 1982.
4. Осколков А.П. О нестационарных течениях вязкоупругих жидкостей. - Тр. Мат.-ин-та АН СССР, 1983, т.159, с.101-131.
5. Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения вязкоупругих жидкостей. Автореф. докт. дисс., Л., 1983, 32 с.
6. Ладженская О.А. Краевые задачи математической физики. М., 1973.
7. Кожанов А.И. Смешанная задача для некоторых нелинейных уравнений третьего порядка. - Матем. сб., 1982, т.118, № 4, с.504-522.
8. Showalter R.E., Ting T.W. Pseudo-parabolic partial differential equations. SIAM J. Math. Anal., 1970, v.1, p.45-67.
9. Осколков А.П. О некоторых нестационарных линейных и квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 9. Зап. науч. семинар ЛОМИ, 1976, т.59, с.133-177.
10. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М., 1982.

Oskolkov A.P., Akhmatov M.M. Convergent finite-difference schemes for the equations of filtration of fluids with delay.

Congergent finite-difference schemes for the equations of the filtration of different viscoelastic fluids are given.