А. П. Солдатов, Задача Бицадзе–Самарского для функций, аналитических по Дуглису,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 3, 396–407

https://www.mathnet.ru/de11247

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 3, с. 396–407

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

ЗАДАЧА БИЦАДЗЕ–САМАРСКОГО ДЛЯ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ ПО ДУГЛИСУ

© 2005 г. А. П. Солдатов

1. Постановка задачи. Пусть область $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ограничена кусочно-гладким контуром Γ без точек возврата. Выберем конечное подмножество $F \subseteq \Gamma$, содержащее все угловые точки контура, и рассмотрим непрерывно дифференцируемое отображение $\alpha : \Gamma \setminus F \to D$. Предположим, что функция α и ее производная α' (по параметру длины дуги) кусочно непрерывны на Γ, т.е. имеют односторонние пределы в точках $\tau \in F$, причем $\alpha(\tau \pm 0) \in D \cup F$ и $\alpha'(\tau \pm 0) \neq 0$ при $\tau \in F$. Кроме того, кривая $\alpha(\Gamma \setminus F)$ не касательна к Γ.

Задача Бицадзе–Самарского. Найти аналитическую в D функцию $\phi \in C(\overline{D} \setminus F)$ по краевому условию

$$\mathrm{Re}(a\phi + a^0\phi \circ \alpha)|_\Gamma = f, \tag{1}$$

где коэффициенты a и a^0 кусочно непрерывны на Γ. Кроме того, в случае неограниченной области D предполагается, что функция ϕ ограничена на бесконечности.

Можно рассмотреть также и ситуацию, когда коэффициент a^0 и сдвиг α заданы на части Γ' кривой Γ и соответственно краевое условие распадается на

$$\mathrm{Re}(a\phi)|_{\Gamma \setminus \Gamma'} = f_0, \quad \mathrm{Re}(a\phi + a^0\phi \circ \alpha)|_{\Gamma'} = f_1. \tag{1$'$}$$

Продолжая α на всю кривую $\Gamma \setminus F$ и доопределяя a^0 нулем, эту задачу всегда можно свести к виду (1). При $a^0 \equiv 0$ получаем классическую задачу Римана–Гильберта.

К задаче (1), очевидно, сводится задача Бицадзе–Самарского для уравнения Лапласа, сформулированная в [1]. Для общих эллиптических уравнений задача Бицадзе–Самарского была предметом многочисленных исследований [2–15]. В настоящей работе задачу (1) рассмотрим для функций, аналитических по Дуглису. Последние представляют собой решения $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_l)$ канонической эллиптической системы первого порядка

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} - J\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 0 \tag{2}$$

с матрицей $J \in \mathbb{C}^{l \times l}$, собственные значения $\nu \in \sigma(J)$ которой лежат в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,\nu > 0$. Соответственно коэффициенты a, a^0 в (1) являются кусочно-непрерывными $l \times l$-матрицами-функциями. При $J = i$ система (2) переходит в систему Коши–Римана и (1), (2) соответствует задаче для аналитических вектор-функций.

Интерес к постановке задачи (1), (2) мотивируется тем, что к ней сводится задача Бицадзе–Самарского для эллиптических уравнений и систем с постоянными (и только старшими) коэффициентами [16, 17].

Особо остановимся на случае задачи (1$'$), (2), когда Γ' является гладкой дугой и образ $\alpha(\Gamma')$ разбивает D на две подобласти. Как указано в [18], в этом случае задачу можно свести к обобщенной задаче Римана–Гильберта, к которой можно применить общие результаты работы [17]. Отметим в этом направлении работы [19, 20] для линеаризованной системы Стокса, [21] для системы Ламе плоской теории упругости и [22] для аналитических функций.

Обратимся к задаче (1), (2) в сформулированной общей постановке. Следуя методике [17], эту задачу редуцируем к эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений, к которой применим общие результаты из работ [23, 24].

Все рассмотрения будем вести в весовом классе Гёльдера $C^\mu_\lambda(\overline{D}; F)$, $0 < \mu < 1$, где весовой порядок λ представляет собой семейство λ_τ, $\tau \in F$, действительных чисел. Напомним [17], что при $\lambda_\tau = \mu$, $\tau \in F$, это пространство совпадает с подпространством Гёльдера $C^\mu(\overline{D})$ функций, обращающихся в нуль в точках $\tau \in F$. В общем случае оно состоит из функций $\varphi(x) = \prod_F |x-\tau|^{\lambda_\tau - \mu}\varphi_*(x)$, $\varphi_* \in C^\mu_\mu$, с перенесенной нормой $|\varphi| = |\varphi_*|_{C^\mu}$.

Относительно весового порядка λ предполагается, что

$$\lambda_\tau = \lambda_{\tau'}, \quad \tau = \alpha(\tau' \pm 0) \in F, \quad \lambda_{\tau'} < 0, \quad \alpha(\tau' \pm 0) \in D. \tag{3}$$

Это условие обеспечивает ограниченность оператора $\phi \to \phi \circ \alpha$ из $C^\mu_\lambda(\overline{D}; F) \to C^\mu_\lambda(\Gamma; F)$, фигурирующего в (1).

Опишем соответствующие требования гладкости для Γ, α и a, a^0. Пусть $C^{n,\mu+0}$ означает объединение классов $C^{n,\mu+\varepsilon}$ по $\varepsilon > 0$. Тогда для любой гладкой дуги $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, не содержащей внутри себя точек $\tau \in F$, требуется, чтобы $\Gamma_0 \in C^{1,\mu+0}$, $\alpha \in C^{1,\mu+0}(\Gamma_0)$ и $a, a^0 \in C^{\mu+0}(\Gamma_0)$.

2. Редукция задачи к системе сингулярных интегральных уравнений. Как отмечено в [16], все основные факты теории аналитических функций, основанные на интеграле Коши, распространяются и на функции, аналитические по Дуглису. Роль интеграла типа Коши для этих функций играет интеграл

$$(I\varphi)(x) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma [dy][y-x]^{-1}\varphi(y), \quad x \in D, \tag{4}$$

с матричным ядром $[y-x]^{-1}$, где контур Γ ориентирован так, что область D остается слева.

Здесь и ниже приняты обозначения $[x] = x_1 \cdot 1 + x_2 J$, $x \in \mathbb{R}^2$, $[dy] = (dy_1)\cdot 1 + (dy_2)J$, где 1 означает единичную матрицу. Аналогичное обозначение $[x]_\nu = x_1 + x_1\nu \in \mathbb{C}$ используем и в скалярном случае $\nu \in \mathbb{C}$. Согласно [17], оператор I ограничен: $C^\mu_\lambda(\Gamma; F) \to C^\mu_\lambda(\overline{D}; F)$, $-1 < \lambda < 0$, и имеет место формула Сохоцкого–Племеля

$$(I\varphi)^+(x) = \varphi(x) + (K\varphi)(x), \quad x \in \Gamma, \tag{5}$$

где $(K\varphi)(x)$ соответствует сингулярному интегралу (4) для $x \in \Gamma \setminus F$.

Если область D не ограничена (этот факт указываем записью $\infty \in D$), то функция $(I\varphi)(x)$ исчезает на бесконечности и в окрестности бесконечности раскладывается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$(I\varphi)(x) = \sum_{k=0}^\infty [x]^{-k-1}c_k, \quad c_k = -\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma [y]^k[dy]\varphi(y).$$

Аналогичное разложение (по степеням $[x]^{-k}$, $k \ge 0$) справедливо и для любой аналитической по Дуглису функции $\phi(x)$, ограниченной на бесконечности. В соответствии с этим класс $C^\mu_\lambda(\overline{D}; F)$ для таких функций можно определить по отношению к ограниченной области $\overline{D} \cap \{|x| \le R\}$, где R достаточно велико.

В основе сведения задачи (1), (2) к системе сингулярных интегральных уравнений лежит следующий аналог теоремы Векуа–Мусхелишвили [17].

Теорема 1. *Пусть матрица J треугольна и $-1/2 < \lambda < 0$. Тогда каждая аналитическая по Дуглису функция $\phi \in C^\mu_\lambda(\overline{D}; F)$ представима в виде*

$$\phi = I\varphi + \xi, \tag{6}$$

где вектор-функция $\varphi \in C^\mu(\Gamma; F)$ вещественна и $i\xi \in \mathbb{R}^l$ ($\xi \in \mathbb{C}^l$) в случае $\infty \notin D$ ($\infty \in D$). Если в этом представлении $\phi = 0$, то $\xi = 0$ и функция φ постоянна на связных компонентах контура Γ и при $\infty \notin D$ обращается в нуль на его "внешней" компоненте, охватывающей остальные.

Обозначим через Γ^j, $j = 1, \dots, s_D$, все связные компоненты Γ, считая Γ^1 при $\infty \notin D$ внешним контуром. Тогда функцию φ в представлении (6) можно однозначно фиксировать условием

$$\int\limits_{\Gamma^j} \varphi(y)\, ds_y = 0, \tag{7}$$

где $j = 2, \dots, s_D$ при $\infty \notin D$ и $j = 1, \dots, s_D$ при $\infty \in D$.

Требование треугольности матрицы J в теореме не слишком ограничительно. В самом деле, пусть обратимая матрица B такова, что матрица $J_0 = B^{-1}JB$ треугольна (например, имеет жорданову форму). Тогда линейная подстановка $\phi = B\phi_0$ позволяет свести систему (2) к случаю матрицы J_0. В этой связи ниже матрицу J предполагаем треугольной.

Редукцию задачи осуществим сначала в весовом классе C^{μ}_{λ}, $-1/2 < \lambda < 0$. Тогда в силу (5), (6) задача (1) равносильна системе

$$\operatorname{Re}\{a(\varphi + K\varphi) + a^0(I\varphi) \circ \alpha + (a + a^0)\xi\} = f \tag{8}$$

относительно вещественной l-вектор-функции $\varphi \in C^{\mu}_{\lambda}(\Gamma; F)$ и постоянного l-вектора ξ. При дополнительном условии (7) эта система равносильна задаче (1), (2).

Обозначим левую часть системы (8) в виде $N\varphi + \operatorname{Re}(a + a^0)\xi$ с $\mathbb{R}$-линейным оператором N. Он имеет вид $N\varphi = \operatorname{Re} M\varphi$, где оператор M линеен над полем $\mathbb{C}$. Этим же свойством обладает и оператор $\overline{M}\varphi = \overline{M\overline{\varphi}}$, где черта справа означает комплексное сопряжение. В случае $\varphi = \overline{\varphi}$ вещественных функций $2N\varphi = M\varphi + \overline{M}\varphi$. Таким образом,

$$2N = a(1 + K) + \overline{a}(1 + \overline{K}) + a^0K^0 + \overline{a}^0\overline{K}^0, \tag{9}$$

где для краткости положено $K^0\varphi = (K\varphi) \circ \alpha$. В явной форме операторы $\overline{K}$ и $\overline{K}^0$ определяются равенствами

$$(\overline{K}\varphi)(x) = -\frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \overline{[dy][y - x]}^{-1} \varphi(y), \quad (\overline{K}^0\varphi)(x) = -\frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \overline{[dy][y - \alpha(x)]}^{-1} \varphi(y), \quad x \in \Gamma.$$

До сих пор в соответствии с теоремой 1 предполагалось, что $-1/2 < \lambda < 0$. От этого условия легко освободиться с помощью весовой подстановки. Введем J-аналитическую весовую матрицу-функцию

$$\rho(x) = \prod_{\tau \in F} [x - \tau]^{\delta_\tau}, \tag{10}$$

где в дополнение к (8) весовой порядок δ подчинен условию $-1/2 < \lambda - \delta < 0$. Здесь сомножители понимаются как значения $[x - \tau]^{\delta_\tau}_u|_{u=J}$ функций от матриц, где $[x - \tau]^{\delta_\tau}_u$ означает ветвь степенной функции, непрерывную по $x \in D$ и $\operatorname{Im} u > 0$. В случае многосвязной области D это определение требует небольшой модификации: матрицу $[x - \tau]$ следует заменить на $[x - \tau][x - \tau_*]^{-1}$ с фиксированной точкой $\tau_* \notin \overline{D}$.

Пусть ρ_Γ означает гладкую на $\Gamma \backslash F$ положительную весовую функцию того же порядка δ. Тогда матрицы-функции

$$a_* = a(\rho\rho_\Gamma^{-1}), \quad a^0_* = a^0(\rho \circ \alpha)\rho_\Gamma^{-1} \tag{11}$$

кусочно непрерывны на Γ и принадлежат тому же классу, что и a, a^0. Пусть сингулярный оператор N_* получается заменой a и a^0 на эти коэффициенты, его будем рассматривать в классе $C^{\mu}_{\lambda-\mu}$.

Применяя к $\rho^{-1}\phi \in C^{\mu}_{\lambda-\delta}$ теорему 1, получаем представление $\rho^{-1}\phi = I(\rho^{-1}\varphi) + \xi$. С помощью этого представления аналогично (7), (8) задачу (1), (2) в классе C^{μ}_{λ} можем редуцировать к эквивалентной системе

$$(\rho_\Gamma^{-1}N_*\rho_\Gamma) + \rho_\Gamma \operatorname{Re}(a_* + a^0_*)\xi = f, \quad \int\limits_{\Gamma^j} (\rho_\Gamma^{-1}\varphi)\, ds_y = 0, \tag{12}$$

где j пробегает значения $2,\ldots,s_D$ при $\infty \notin D$ и $j=1,\ldots,s_D$ в противном случае. Таким образом, роль (9) в этой системе играет оператор $N=\rho_\Gamma^{-1}N_*\rho_\Gamma$.

3. Основные результаты. В малой окрестности F область D разбивается на попарно непересекающиеся криволинейные секторы D_τ с вершиной $\tau\in F$. Граница ∂D_τ составлена из двух гладких дуг с общим концом τ (боковые стороны сектора) и дугой окружности. Условимся вектор $q\in\mathbb{R}^2$ называть ассоциированным с сектором D_τ, если он либо касается его боковых сторон в точке τ, либо направлен внутрь, т.е. $\tau+qt\in D_\tau$ при малых $t>0$. Пусть множество F состоит из m точек. Боковые стороны секторов D_τ, $\tau\in F$, занумеруем единым образом $\Gamma_{F,j}$, $j=1,\ldots,2m$, и введем их гладкие параметризации $\gamma_j:[0,1]\to\Gamma_{F,j}$ класса $C^{1,\mu+0}$, считая точки $\gamma_j(0)$ принадлежащими F. Положим

$$P_\tau=\{j|\ \gamma_j(0)=\tau\},\quad P_\tau^0=\{s|\ (\alpha\circ\gamma_s)(0)=\tau\},\quad q_j=\gamma_j'(0),\quad q_s^0=(\alpha\circ\gamma_s)'(0). \tag{13}$$

Очевидно, что каждое множество P_τ состоит ровно из двух элементов, а некоторые из множеств P_τ^0 могут оказаться пустыми. Ясно также, что векторы q_s^0, $s\in P_\tau^0$, и q_s, $s\in P_\tau$, ассоциированы с сектором D_τ. Из условия на сдвиг α следует, что векторы одной пары P_τ, а также векторы q_j, $j\in P_\tau$, и q_s^0, $s\in P_\tau^0$, не могут лежать на одном луче.

Согласно [17, 23], сингулярный оператор K принадлежит алгебре $\mathcal{K}(C_\lambda^\mu,-1<\lambda<0)$. При этом $K+\overline{K}\in\mathcal{K}_0$ и $2m\times 2m$-матрица $(\hat{K}_{sj})$ концевого символа определяется равенством

$$\pm(i\sin\pi\zeta)\hat{K}_{sj}(\zeta)=\begin{cases}\cos\pi\zeta, & s=j,\\ \{-[q_s][q_j]^{-1}\}^\zeta, & \gamma_s(0)=\gamma_j(0),\quad s\neq j,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases} \tag{14}$$

где выбирается верхний (нижний) знак, если параметризация γ_j не меняет (изменяет) ориентацию Г. Кроме того, аналитическая функция u^ζ, значение которой от матрицы в фигурных скобках фигурирует в правой части (14), определяется выбором аргумента $|\arg u|<\pi$.

Аналогичный результат оказывается справедливым и по отношению к оператору $K^0\varphi=(I\varphi)\circ\alpha$.

Лемма 1. *Интегральный оператор* $K^0\in\mathcal{K}_0(C_\lambda^\mu,-1<\lambda<0)$ *и его концевой символ задается равенством*

$$\pm(i\sin\pi\zeta)\hat{K}_{sj}^0(\zeta)=\begin{cases}\{-[q_s^0][q_j]^{-1}\}^\zeta, & (\alpha\circ\gamma_s)(0)=\gamma_j(0),\\ 0 & \textit{в противном случае.}\end{cases} \tag{15}$$

Доказательство. Пусть гладкая на $\Gamma\setminus F$ функция $\chi(y)$ тождественно равна единице в окрестности F и нулю вне дуг $\Gamma_{F,j}$. Поскольку оператор $\chi K^0-K^0\chi$ компактен, утверждение леммы достаточно доказать по отношению к $\chi K^0\chi$. Не ограничивая общности, можно считать, что все функции $\chi\circ\gamma_j$ совпадают с некоторой гладкой функцией $\chi_0(t)$, $t\geq 0$, тождественно равной единице в окрестности $t=0$ и нулю при $t\geq 1$. Тогда

$$((\chi K^0\chi\varphi)\gamma_s)(t_0)=\sum_{j=1}^{2m}\frac{\pm 1}{\pi i}\int\limits_0^1\chi_0(t_0)\chi_0(t)[\gamma_j(t)-(\alpha\circ\gamma_s)(t_0)][\gamma_j'(t)](\varphi\circ\gamma_j)(t)\,dt,\quad t_0>0.$$

При $\gamma_j(0)\neq(\alpha\circ\gamma_s)(0)$ интегральный оператор под знаком суммы компактен: $C_{\lambda'}^\mu([0,1];0)\to C_{\lambda''}^\mu([0,1];0)$ для любых $-1<\lambda',\lambda''<0$.

Пусть $\gamma_j(0)=(\alpha\circ\gamma_s)(0)$. В этом случае ядро под знаком интеграла представляется в виде $k(t_0,t)[q_j][q_jt-q_s^0t_0]^{-1}$ с некоторой матрицей-функцией $k(t_0,t)$, для которой $k(t_0,t)-1\in C_\varepsilon^{\mu+\varepsilon}([0,1]\times[0,1];0)$ с малым $\varepsilon>0$. При этом $k\equiv 0$ в окрестности сторон $t=1$ и $t_0=1$ квадрата $[0,1]\times[0,1]$. Поэтому с точностью до компактного слагаемого выражения $\gamma_j(t)-(\alpha\circ\gamma_s)(t_0)$ и $\gamma_j'(t)$ под знаком интеграла можно заменить соответственно на $q_jt-q_s^0t_0$

и q_j. Отсюда, как и при доказательстве соответствующего результата для K, приходим к справедливости леммы.

Условимся весовой порядок λ рассматривать как функцию $\lambda: k \to \lambda(\gamma_k(0))$, постоянную на парах P_τ разбиения $P = (P_\tau)$ множества $\{1, \ldots, 2m\}$. Согласно (14), матрица $\hat{K}$ блочно-диагональна относительно этого разбиения и ее P_τ-й диагональный блок $\hat{K}(\zeta, P_\tau)$ рассматривается на прямой $\operatorname{Re}\zeta = \lambda_\tau$.

Рассмотрим разбиение (F_j) множества F такое, что $\tau \in F_j$, $\alpha(\tau \pm 0) \in F$ (для одного из знаков) влечет за собой $\alpha(\tau \pm 0) \in F_j$. Тогда первое условие в (3) можем заменить требованием, чтобы весовой порядок λ был постоянен на элементах этого разбиения. Пусть E_j состоит из пар P_τ, $\tau \in F_j$. Тогда каждое множество P_τ^0 целиком содержится в некотором E_j. Согласно (15), отсюда следует, что концевой символ $\hat{K}^0$ как $2m \times 2m$-матрица блочно-диагонален относительно разбиения (E_j) и ее диагональный блок $\hat{K}^0(\zeta_j, E_j)$ задан на прямой $\operatorname{Re}\zeta = \lambda$, где здесь и ниже λ_j означает сужение λ на E_j.

Обратимся к сингулярному оператору $N = \rho_\Gamma N_* \rho_\Gamma^{-1}$, фигурирующему в (12). Весовую функцию $\rho_\Gamma(t)$ порядка δ подчиним дополнительному условию

$$(\rho_\Gamma \circ \gamma_s)(t) = t^{\delta_j}, \quad s \in E_j. \tag{16}$$

Из сказанного выше с учетом результатов работы [23] заключаем, что этот оператор принадлежит алгебре $\mathcal{K}(C_\lambda^\mu; E)$. При этом его концевой символ $\hat{N}$ блочно-диагонален относительно разбиения E и задается равенством

$$\hat{N}(\zeta, E_j) = \hat{N}_*(\zeta - \delta_j, E_j), \quad \operatorname{Re}\zeta = \lambda_j, \quad 2\hat{N}_* = \hat{a}_*(1+K)^\wedge + \hat{\overline{a}}_*(1+\overline{K})^\wedge + \hat{a}_*^0\hat{K}^0 + \hat{\overline{a^0}}_*\hat{\overline{K^0}}. \tag{17}$$

Отметим, что $2m \times 2m$-матрицы $\hat{a}_*$ и $\hat{a}_*^0$ диагональны с постоянными элементами $(a_* \circ \gamma_j)(0)$ и $(a_*^0 \circ \gamma_j)(0)$ вдоль диагонали соответственно. Для вычисления концевых символов операторов $\overline{K}$ и $\overline{K}_0$ следует воспользоваться соотношением $\hat{\overline{M}}(\zeta) = \overline{\hat{M}}(\zeta)$, где черта справа означает инволюцию сопряжения в классе функций $x(\zeta)$, определяемую соотношением $\overline{x}(\zeta) = \overline{x(\overline{\zeta})}$ с комплексным сопряжением справа. Применительно к операторам K и K^0 эта инволюция соответствует в (14), (15) замене $i\sin\pi\zeta$ на $-i\sin\pi\zeta$ и матрицы J на $\overline{J}$ в определении $[x]$.

Очевидно, фредгольмовость системы (12) и фредгольмовость оператора N эквивалентны и их индексы связаны соотношением $\varkappa = \operatorname{ind} N + (2 - s_D)l$. Поэтому, применяя к N соответствующие результаты работы [24], приходим к следующему критерию фредгольмовости.

Теорема 2. *Задача (1), (2) фредгольмова в классе $C_\lambda^\mu(\overline{D}; F)$ тогда и только тогда, когда $\det a(t) \neq 0$ всюду на Γ, включая предельные значения в точках $\tau \in F$, и*

$$\det \hat{N}(\zeta, E_j) \neq 0, \quad \operatorname{Re}\zeta = \lambda_j, \quad j = 1, \ldots \tag{18}$$

При выполнении этого условия индекс $\varkappa$ задачи задается формулой

$$\varkappa = -\frac{1}{\pi}\arg(\det a_*)|_\Gamma + l(2 - s_D) - \sum_j \frac{1}{2\pi i} \ln\det \hat{N}(\zeta, E_j)\Big|_{\zeta=\lambda_j - i\infty}^{\lambda_j + i\infty}. \tag{19}$$

Согласно работе [24], разрешимость уравнения $N\varphi = f$ можно описать в терминах условий ортогональности правой части f решениям $\psi \in C_{-\lambda-1+0}^\mu$ однородного союзного уравнения $N'\psi = 0$. Ортогональность и союзность здесь понимаются относительно формы

$$(\varphi, \psi) = \int_\Gamma \varphi(y)\psi(y)\, ds_y,$$

где $\varphi(y)\psi(y)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^l$.

Система (12) представляет собой "конечномерное" возмущение указанного уравнения, и нетрудно выписать однородную систему, союзную к ней. Пусть для определенности область D конечна, т.е. $\infty \notin D$. Тогда союзной к (12) будет однородная система

$$(N'\psi)(x) + \rho_\Gamma^{-1}(x)\eta_i = 0, \quad x \in \Gamma^i, \quad i = 1, 2, \ldots, s_D, \quad \int\limits_\Gamma \mathrm{Im}(a_* + a_*^0)(y)\rho_\Gamma(y)\psi(y)ds_y = 0 \quad (12')$$

относительно пары $\psi \in C^\mu_{-\lambda-1}$ и $\eta = (\eta_i) \in \mathbb{R}^{l(s-1)}$, где $s = s_D$ и $\eta_1 = 0$.

Поэтому разрешимость задачи (1), (2) определяется условием ортогональности $(f, \psi) = 0$ ко всем решениям (ψ, η) однородной системы (12′).

Аналогично [17] теорему 2 дополним результатами об асимптотике и гладкости решения задачи (1). Задачу считаем нормального типа, т.е. условие теоремы 2 относительно $\det a$ предполагаем выполненным. Однако условие (18) может нарушаться для одного из блоков $\hat N(\zeta, E_j)$, скажем, для $\hat N(\zeta, E_1)$. Матрица-функция $\hat N(\zeta, E_1)$ аналитична в некоторой открытой полосе $\lambda_1 - \varepsilon < \mathrm{Re}\,\zeta < \lambda_1 + \varepsilon$ и имеет вид $x(\zeta) + \overline{x}(\zeta)$. Поэтому если функция $\det \hat N(\zeta + u)$ обращается в нуль при $u = 0$, то этим свойством обладает и $\det \hat N(\overline{\zeta} + u)$. При этом порядки полюсов r_ζ и $r_{\overline{\zeta}}$ матриц-функций $\hat N^{-1}(\zeta + u)$ и $\hat N^{-1}(\overline{\zeta} + u)$ совпадают. Если $\det \hat N(\zeta; E_i) \neq 0$, то по определению полагаем $r_\zeta = 0$.

Теорема об асимптотике касается поведения в секторах D_τ, $\tau \in F_1$, произвольного решения $\phi \in C^\mu_{\lambda-0}(\overline{D}; F)$ при соответствующих требованиях на поведение функций $(f \circ \gamma_j)(t)$, $j \in E_1$, при $t \to 0$. Под классом $C^\mu_{\lambda-0}$ здесь и ниже понимается объединение $C^\mu_{\lambda-\varepsilon}$ по $\varepsilon > 0$. Аналогично $C^\mu_{\lambda+0} = \cap C^\mu_{\lambda+\varepsilon}$.

Теорема 3. *Пусть для фиксированного* ζ, $\mathrm{Re}\,\zeta = \lambda_1$, *функции*

$$(f \circ \gamma_j)(t) - \mathrm{Re}\sum_{i=0}^{k} (\ln^i t) t^\zeta c_{ij} \in C^\mu_{\lambda+0}([0,1];0), \quad j \in E_1,$$

с некоторыми $c_{ij} \in \mathbb{R}^l$. *Тогда для любого решения* $\phi \in C^\mu_{\lambda-0}(D; F)$ *задачи (1), (2) найдутся такие* $c^\pm_{\tau j} \in \mathbb{C}^l$, $\tau \in F_1$, $j = 1, \ldots, k + r_s$, *что*

$$\phi(x) - \sum_{j=0}^{k+r_s} ([x-\tau]^\zeta c^+_{\tau j} + [x-\tau]^{\overline{\zeta}} c^-_{\tau j})(\ln[x-\tau])^j \in C^\mu_{\lambda+0}(\overline{D}_\tau; \tau), \quad \tau \in F_1.$$

Доказательство. Запишем первое уравнение (12) в форме $N\varphi = \tilde f$, где правая часть $\tilde f$ удовлетворяет тому же условию, что и f. На основании теоремы об асимптотике [24] справедливо включение для решения этого уравнения

$$(\varphi \circ \gamma_j)(t) - \mathrm{Re}\sum_{i=0}^{k+r_\zeta} (\ln^i t) t^\zeta d_{ij} \in C^\mu_{\lambda+0}([0,1;0), \quad j \in E_1,$$

с некоторыми $d_{ij} \in \mathbb{R}^l$. С учетом соответствующего свойства [17] интеграла типа Коши (4) отсюда следует справедливость соответствующего свойства и для $\phi(x)$.

Теорему гладкости сформулируем относительно одной из гладких дуг Γ_0, составляющих Γ. Более точно, пусть Γ_0 есть замыкание одной из связных компонент $\Gamma \setminus F$. Множество F_0 концов этой дуги может состоять как из двух, так и из одной точки. В последнем случае Γ_0 отнесем к типу "сомкнутой" дуги.

Теорема 4. *Пусть в условиях теоремы 2 дуга* $\Gamma_0 \in C^{n,\mu+0}$, *сдвиг* $\alpha \in C^{n,\mu+0}(\Gamma_0)$ *и коэффициенты* $a, b \in C^{n,\mu+0}(\Gamma_0)$. *Тогда при* $f \in C^{n,\mu}_\lambda(\Gamma_0; F_0)$ *любое решение* $\phi \in C^\mu_\lambda(\overline{D}; F)$ *задачи (1), (2) обладает аналогичным свойством* $\phi \in C^{n,\mu}_\lambda(\Gamma_0; F_0)$.

Доказательство. Аналогично лемме 1 из [25] легко убедиться в том, что для $\varphi \in C^{\mu}_{\lambda}(\Gamma; F)$ функция $K_0\varphi = (I\varphi) \circ \alpha \in C^{n,\mu}_{\lambda}(\Gamma_0, F_0)$. При дополнительном требовании $\varphi|_{\Gamma_0} = 0$ аналогичным свойством обладает и $K\varphi$. Поэтому первое уравнение в (12) можем переписать в форме $a_0(1+K_0)\varphi_0 + \overline{a}_0(1+\overline{K}_0)\varphi_0 = 2f_0 \in C^{n,\mu}_{\lambda}(\Gamma_0; F)$, где $a_0(\varphi_0)$ является сужением $a_*(\varphi)$ на Γ_0 и оператор Коши K_0 определяется по отношению к $\Gamma = \Gamma_0$. На основании теоремы гладкости, примененной к этому уравнению, функция $\varphi_0 \in C^{n,\mu}_{\lambda}(\Gamma_0, F_0)$. Следовательно, это верно и для функции

$$\phi(x) = \varphi_0(x) + (K_0\varphi_0)(x) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_0} [x-y]^{-1} dy \varphi(y).$$

4. Концевой символ задачи. Коэффициенты a_*, a^0_* и сам оператор $N = \rho_\Gamma N_* \rho_\Gamma^{-1}$ зависят от выбора весового порядка δ в (10). Поэтому желательно концевой символ $\hat{N}$ этого оператора заменить некоторой матрицей-функцией, свободной от этой зависимости. Для задачи Римана–Гильберта (и для более общих задач этого типа) соответствующие построения проведены в [17]. Случай $a^0 \neq 0$ задачи (1) требует дополнительных рассмотрений.

Каждую пару $P_\tau = \{k, r\}$ упорядочим (запись $P_\tau = \overline{k,r}$), считая, что движение на Γ через точку τ в положительном направлении (оставляющим область D слева) осуществляется из $\Gamma_{F,r}$ в $\Gamma_{F,k}$. Векторы $q \in \mathbb{R}^2$, ассоциированные с D_τ, образуют сектор (конус), который обозначим через S_τ. Раствор конуса, который получается из S_τ при преобразовании $q = (q_1, q_2) \to [q]_\nu = q_1 + \nu q_2$, где $\operatorname{Im}\nu > 0$, обозначим через $\theta_{\tau,\nu}$. Зафиксируем ветвь $\arg[q]_\nu$, непрерывно зависящую от $q \in S_\tau$ и $\operatorname{Im}\nu > 0$. Она определяет степенную функцию $[q]^\zeta_\nu$ и матрицу $[q]^\zeta = [q]^\zeta_J$. Очевидно, эта матрица вместе с J треугольна с диагональными элементами $[q]^\zeta_\nu$, $\nu \in \sigma(J)$. Число их повторений на диагонали равно l_ν – кратности собственного значения ν в характеристическом многочлене матрицы J. Аналогично определяется и матрица $\overline{[q]}^\zeta$ по отношению к $\arg[q]_{\overline{\nu}} = -\arg[q]_\nu$. В дальнейшем эти матрицы будут использоваться для касательных векторов q_k, q_r сектора D_τ и для его "внутренних" векторов q^0_s, $s \in P^0_\tau$. По определению непрерывной ветви $\arg[q]_\nu$ разность

$$\arg[q_k]_\nu - \arg[q_r]_\nu = \theta_{\tau,\nu}, \quad \overline{k,r} = P_\tau. \tag{20}$$

Ниже будем часто иметь дело с $2m \times 2m$-матрицами $x(\zeta)$, блочно-диагональными относительно разбиения P. Условимся ее диагональные блоки $x(\zeta, P_\tau)$ записывать в виде 2×2-таблицы по отношению к порядку $\overline{k,r}$ элементов пары P_τ.

Рассмотрим матрицу $W_*(\zeta)$ этого типа, которая аналитична в полосе $-1/2 < \operatorname{Re}\zeta < 0$ и определяется равенством

$$W_*(\zeta, P_\tau) = \frac{1}{2i\sin\pi\zeta} \begin{pmatrix} -e^{-\pi i\zeta}\overline{[q_k]}^{-\zeta} & e^{\pi i\zeta}\overline{[q_r]}^{-\zeta} \\ e^{\pi i\zeta}[q_k]^{-\zeta} & -e^{\pi i\zeta}[q_r]^{-\zeta} \end{pmatrix}, \quad P_\tau = \overline{k,r}. \tag{21}$$

Если элементы $a_{ij} \in \mathbb{R}^{l\times l}$ блочной матрицы $(a_{ij})^2_1$ обратимы и треугольны, то определитель этой матрицы совпадает с определителем матрицы $d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ и равен произведению ее диагональных элементов d_{ii}, $i = 1, \ldots, l$. Применяя это замечание к матрице (21), с учетом (20) получаем

$$\det W_*(\zeta, P_\tau) = \prod_{\nu\in\sigma(J)} \left\{ \frac{e^{-2\pi i\zeta}}{(2i\sin\pi\zeta)^2} [q_k]^{-\zeta}_{\overline{\nu}} [q_r]^{\zeta}_{\nu} - \frac{e^{2\pi i\zeta}}{(2i\sin\pi\zeta)^2} [q_k]^{-\zeta}_{\nu} [q_r]^{-\zeta}_{\nu} \right\}^{l_\nu} =$$

$$= \prod_{\nu\in\sigma(J)} \left\{ \frac{|[q_k]_\nu [q_r]_\nu|^{-\zeta}}{(-2i\sin\pi\zeta)^2} \cdot 2i\sin(-2\pi + \theta_{\tau,\nu})\zeta \right\}^{l_\nu}. \tag{22}$$

Исходя из W_*, введем далее $2m\times 2m$-матрицу W с диагональными блоками

$$W(\zeta,P_\tau)=\mathrm{diag}(\overline{\rho(\tau,\tau)},\rho(\tau,\tau))W_*(\zeta-\delta_\tau,P_\tau),\quad \rho(x,\tau)=[x-\tau]^{-\delta_\tau}\rho(x), \tag{23}$$

определенными на прямой $\mathrm{Re}\,\zeta=\lambda_\tau-\delta_\tau$.

Следующая лемма представляет концевой символ $\hat N$ в виде произведения W и матрицы, которую естественно назвать концевым символом задачи. Имея в виду приложения к более общим задачам, удобно операторы a и a^0 в (1) заменить произвольными функциональными операторами A и A^0 из алгебры $\mathcal{A}$, введенными в работах [17, 24]. При этом в соответствии с условием на λ концевой символ этих операторов имеет ту же структуру, что и $\hat N$, т.е. он блочно-диагонален относительно разбиения E. Операторы A_* и A^0_* определяются по A, A^0 аналогично (11).

Введем $2m\times 2m$-матрицы $X(\zeta)$ и $X^0(\zeta)$, столбцы которых с номерами упорядоченной пары $P_\tau=\overline{k,r}$ определяются равенством

$$X_{sr}(\zeta)=\sum_{j\in P_\tau}\hat A_{sj}[q_j]^\zeta=\overline{X}_{sk}(\zeta),\quad X^0_{sr}(\zeta)=\sum_{j\in P^0_\tau}\hat A^0_{sj}[q^0_j]^\zeta=\overline{X}^0_{sk}(\zeta), \tag{24}$$

где s пробегает значения $1,\ldots,2m$.

Вместе с $\hat A$ и $\hat A^0$ эти матрицы блочно-диагональны относительно разбиения (E_j). В самом деле, если $s\in E_i$ и $P_\tau\subseteq E_{i'}$, $i\neq i'$, то $\hat A_{sj}=0$, $j\in P_\tau$, и, значит $s\in E_i$, $j\in P^0_\tau$. Точно так же и $\hat A^0_{sj}=0$ при $s\in E$, $j\in P^0_\tau$, поскольку вместе с P_τ в $E_{i'}$ содержится и P^0_τ.

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$\hat N=(X+X^0)W. \tag{25}$$

Доказательство проведем сначала в предположении $\delta=0$, когда $-1/2<\lambda<0$, и звездочку в обозначениях A_*, A^0_*, N_* и N^0_* можно опустить. Согласно (14) и определению $[q]^\zeta$, диагональный блок $\hat K(\zeta,P_\tau)$ имеет вид

$$\hat K(\zeta,P_\tau)=\frac{1}{i\sin\pi\zeta}\begin{pmatrix}\cos\pi\zeta & -e^{-\pi i\zeta}[q_k]^\zeta[q_r]^{-\zeta}\\ e^{\pi i\zeta}[q_k]^{-\zeta}[q_r]^\zeta & -\cos\pi\zeta\end{pmatrix},$$

где здесь и ниже $P_\tau=\overline{k,r}$. Отсюда

$$(1+\hat K)(\zeta,P_\tau)=\frac{1}{i\sin\pi\zeta}\begin{pmatrix}e^{\pi i\zeta} & -e^{-\pi i\zeta}[q_k]^\zeta[q_r]^{-\zeta}\\ e^{\pi i\zeta}[q_k]^{-\zeta}[q_r]^\zeta & -e^{-\pi i\zeta}\end{pmatrix},$$

$$(1+\overline{\hat K})(\zeta,P_\tau)=\frac{1}{i\sin\pi\zeta}\begin{pmatrix}-e^{-\pi i\zeta} & e^{\pi i\zeta}\overline{[q_k]}^\zeta\,\overline{[q_r]}^{-\zeta}\\ -e^{-\pi i\zeta}\overline{[q_k]}^{-\zeta}\,\overline{[q_r]}^\zeta & e^{\pi i\zeta}\end{pmatrix}.$$

В соответствии с (21) отсюда следует, что

$$\frac12(1+\hat K)(\zeta,P_\tau)=\begin{pmatrix}0 & [q_k]^\zeta\\ 0 & [q_r]^\zeta\end{pmatrix}W(\zeta,P_\tau),\quad \frac12(1+\overline{\hat K})(\zeta,P_\tau)=\begin{pmatrix}\overline{[q_k]}^\zeta & 0\\ \overline{[q_r]}^\zeta & 0\end{pmatrix}W(\zeta,P_\tau). \tag{26}$$

Обратимся к концевому символу $\hat K^0$ оператора K^0. Согласно (15), его матрица-строка $\hat K^0(\zeta,s\times P_\tau)$, составленная из элементов $\hat K^0_{sk}$, $(\hat K_0)_{sr}$, отлична от нуля лишь при $s\in P^0_\tau$ и имеет вид

$$(i\sin\pi\zeta)\hat K^0(\zeta,s\times P_\tau)=(e^{\pi i\zeta}[q^0_s]^\zeta[q_k]^{-\zeta},-e^{-\pi i\zeta}[q^0_s]^\zeta[q_r]^{-\zeta}).$$

Отсюда

$$(i\sin\pi\zeta)\overline{\hat K^0}(\zeta,s\times P_\tau)=(-e^{-\pi i\zeta}\overline{[q^0_s]}^\zeta\,\overline{[q_k]}^{-\zeta},e^{\pi i\zeta}\overline{[q^0_s]}^\zeta\,\overline{[q_r]}^{-\zeta}).$$

В обозначениях (21) это означает, что

$$\hat{K}_0(\zeta, \sigma \times P_\tau) = 2(0, [q_s^0]^\zeta) W(\zeta, P_\tau), \quad \overline{\hat{K}_0}(\zeta, \sigma \times P_\tau) = 2(\overline{[q_s^0]}^\zeta, 0) W(\zeta, P_\tau). \tag{27}$$

Введем вспомогательные $2m \times 2m$-матрицы $U_\pm$, $U_\pm^0$, полагая

$$\begin{gathered} U_+(\zeta, s \times P_\tau) = (0, [q_s]^\zeta), \quad U_-(\zeta, s \times P_\tau) = (\overline{[q_s]}^\zeta, 0), \quad s \in P_\tau, \\ U_+^0(\zeta, s \times P_\tau) = (0, [q_s^0]^\zeta), \quad U_-^0(\zeta, s \times P_\tau) = (\overline{[q_s^0]}^\zeta, 0), \quad s \in P_\tau^0, \\ U_\pm(\zeta, s \times P_\tau) = 0, \quad s \notin P_\tau; \quad U_\pm^0(\zeta, s \times P_\tau) = 0, \quad s \notin P_\tau^0. \end{gathered} \tag{28}$$

Тогда соотношения (26), (27) можем записать в форме

$$1 + \hat{K} = 2U_+ W, \quad 1 + \overline{\hat{K}} = 2U_- W, \quad \hat{K}^0 = 2U_+^0 W, \quad \overline{\hat{K}^0} = 2U_-^0 W. \tag{29}$$

Следовательно, для концевого символа $\hat{N}$ имеем равенство (25) с матрицами $X = \hat{A}U^+ + \overline{\hat{A}}U^-$, $X^0 = \hat{A}^0 U_+^0 + \overline{\hat{A}^0} U_-^0$, которые в силу (28) совпадают с (24).

Перейдем к случаю $\delta \neq 0$ произвольного весового порядка λ. В этом случае $A_* = Ac$, $A_*^0 = A^0 c^0$ с операторами умножения $c = \rho\rho_\Gamma^{-1}$, $c^0 = (\rho \circ \alpha)\rho_\Gamma^{-1}$. Согласно (10), (16) и определению функции $\rho(t, x) = \rho(x)[x - \tau]^{-\delta_\tau}$ имеем

$$(c \circ \gamma_j)(t) = [t^{-1}(\gamma_j(t) - \gamma_j(0))]^{\delta_\tau} \rho(\tau, \gamma_j(t)), \quad \tau = \gamma_j(0),$$

$$(c^0 \circ \gamma_s)(t) = [t^{-1}((\alpha \circ \gamma_s)(t) - (\alpha \circ \gamma_s)(0))]^{\delta_\tau} \rho(\tau, \gamma_s(\tau)), \quad \tau = (\alpha \circ \gamma_s)(0) \in F,$$

где учтено, что $\lambda(P_\tau^0) = \lambda(P_\tau) = \lambda_\tau$. В обозначениях (13) отсюда получаем

$$(c \circ \gamma_s)(0) = [q_s]^{\delta_\tau} \rho(\tau, \tau), \quad s \in P_\tau; \quad (c^0 \circ \gamma_s)(0) = [q_s^0]^{\delta_\tau} \rho(\tau, \tau), \quad s \in P_\tau^0. \tag{30}$$

Наконец, при $\tau = \gamma_s(0) \in D$ по определению δ в (10) должно быть $\delta_\tau < 0$ и, значит, $(c^0 \circ \gamma_s)(0) = 0$.

В рассматриваемом случае выражение (17) концевого символа оператора N принимает вид

$$\begin{gathered} 2\hat{N}(\zeta, E_j) = \hat{A}\hat{c}(\zeta, E_j)(1 + \hat{K})(\zeta - \delta_j, E_j) + \overline{\hat{A}\hat{c}}(\zeta, E_j)(1 + \overline{\hat{K}^0})(\zeta - \delta_j, E_j) + \\ + \hat{A}^0 \hat{c}^0(\zeta, E_j)\hat{K}^0(\zeta - \delta_j, E_j) + \overline{\hat{A}^0 \hat{c}^0}(\zeta, E_j)\overline{\hat{K}^0}(\zeta - \delta_j, E_j). \end{gathered} \tag{31}$$

В правую часть этого равенства можно подставить выражения (29), где W нужно заменить W_*. С другой стороны, в силу (22), (28) и (30)

$$(\hat{c}U_+)(\zeta - \delta_\tau, s \times P_\tau) = U_+(\zeta, s \times P_\tau)\rho(\tau, \tau), \quad (\overline{\hat{c}}U_-)(\zeta - \delta_\tau, s \times P_\tau) = U_-(\zeta, s \times P_\tau)\overline{\rho(\tau, \tau)}, \quad s \in P_\tau,$$

и аналогично

$$(\hat{c}^0 U_+^0)(\zeta - \delta_\tau, s \times P_\tau) = U_+^0(\zeta, s \times P_\tau)\rho(\tau, \tau), \quad (\overline{\hat{c}^0} U_-^0)(\zeta - \delta_\tau, s \times P_\tau) = U_-^0(\zeta, s \times P_\tau)\overline{\rho(\tau, \tau)}, \quad s \in P_\tau^0.$$

Кроме того, при $(\alpha \circ \gamma_s)(0) \in D$ имеем равенства $(\hat{c}^0 U_+^0)(\zeta - \delta_\tau, s \times P_\tau) = (\overline{\hat{c}^0} U_+^0)(\zeta - \delta_\tau, s \times P_\tau) = U_+^0(\zeta - \delta_\tau, s \times P_\tau) = U_-^0(\zeta - \delta_\tau, s \times P_\tau) = 0$, $(\alpha \circ \gamma_s)(0) \in D$.

Подставляя все эти соотношения в (31) и используя (23), как и в случае $\delta = 0$, приходим к равенству (25) с матрицами $X = \hat{A}U_+ + \overline{\hat{A}}U_-$, $X^0 = \hat{A}^0 U_+^0 + \overline{\hat{A}^0} U_-^0$, которые завершают доказательство леммы.

В случае операторов умножения $a = A$ и $a^0 = A^0$ задачи (1) выражения (24) несколько упрощаются, поскольку концевые символы этих операторов представляют собой диагональные матрицы $\hat{a} = (\hat{a}_i \delta_{ij})$, $\hat{a}_i = (a \circ \gamma_j)(0)$ и аналогично для $\hat{a}^0$. Поэтому (24) можем переписать в форме

$$X(\zeta, s \times P_\tau) = \begin{cases} (\overline{\hat{a}_s[q_s]}^{\zeta}, \hat{a}_s[q_s]^{\zeta}), & s \in P_\tau, \\ 0, & s \notin P_\tau, \end{cases} \quad X^0(\zeta, s \times P_\tau) = \begin{cases} (\overline{\hat{a}_s^0[q_s^0]}^{\zeta}, \hat{a}_s^0[q_s]^0), & s \in P_\tau^0, \\ 0, & s \notin P_\tau^0. \end{cases} \tag{32}$$

Из леммы 2 непосредственно следует, что в критерии фредгольмовости (18) теоремы 2 и в теореме 3 концевой символ $\hat{N}$ можно заменить на $X + X^0$. Что касается индекса задачи, то справедлива

Теорема 5. *a) Индексы $\varkappa(\lambda)$ и $\varkappa(\tilde{\lambda})$ задачи (1), (2) в классах C_λ^μ и $C_{\tilde{\lambda}}^\mu$ соответственно связаны соотношением*

$$\varkappa(\lambda) - \varkappa(\tilde{\lambda}) = \sum_j \varkappa_j(\lambda, \tilde{\lambda}), \tag{33}$$

где $\varkappa_j(\lambda, \tilde{\lambda})$ есть число нулей с учетом кратности функции $\det(X + X^0)(\zeta; E_j)$ в полосе, заключенной между прямыми $\operatorname{Re}\zeta = \lambda_j$ и $\operatorname{Re}\zeta = \tilde{\lambda}_j$, взятое со знаком "+" при $\lambda_j < \tilde{\lambda}_j$ и со знаком "−" в противном случае;

b) при $-1/2 < \lambda < 0$ справедлива формула

$$\varkappa(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \arg\det a|_\Gamma + l(2 - s_D) - \frac{1}{2\pi i} \sum_j \ln\left\{ \frac{\det(X + X^0)(\zeta, E_j)}{\det Y(\zeta, E_j)} \right\}\Bigg|_{\operatorname{Re}\zeta = \lambda_j - i\infty}^{\lambda_j + i\infty}, \quad -1/2 < \lambda < 0, \tag{34}$$

где матрица Y определяется аналогично X в (32) по отношению к $a = 1$.

Доказательство. a) Утверждение достаточно установить в предположении, что λ достаточно близко к $\tilde{\lambda}$. В этом случае $\varkappa_j(\lambda, \tilde{\lambda})$ совпадает с аналогичной величиной, вычисленной по отношению к $\det \hat{N}(\zeta, E_j)$, как это следует из соотношения (25). Поэтому (33) является следствием формулы индекса (19) и теоремы Руже для аналитических функций.

b) При $-1/2 < \lambda < 0$ в определении (23) матрицы W можно положить $\delta = 0$, так что $W = W_*$. По этим соображениям и $a = a_*$. Поэтому с учетом равенства

$$\det \hat{N} = \det(X + X^0) \det W = \frac{\det(X + X^0)}{\det Y} \det(YW)$$

и формулы индекса (19) доказательство формулы (34) сводится к установлению соотношения

$$\ln(\det YW)|_{\operatorname{Re}\zeta = \lambda} = 0. \tag{35}$$

Аналогично (22) для определителя матрицы

$$Y(\zeta, P_\tau) = \begin{pmatrix} \overline{[q_k]}^{\zeta} & [q_k]^{\zeta} \\ \overline{[q_r]}^{\zeta} & [q_r]^{\zeta} \end{pmatrix}$$

имеем равенство

$$\det Y(\zeta, P_\tau) = \prod_{\nu \in \sigma(J)} \{|[q_k]_\nu [q_r]_\nu|^{\zeta} (-2i \sin\theta_{\tau,\nu}\zeta)\}^{l_\nu}.$$

Поэтому в свою очередь соотношение (35) сводится к равенству

$$\ln\left(\frac{\sin\theta\zeta \sin(2\pi - \theta)\zeta}{\sin^2 \pi\zeta} \right)\Bigg|_{\operatorname{Re}\zeta = \lambda} = 0,$$

где $-1/2 < \lambda < 0$ и $0 < \theta < 2\pi$. Левая часть этого равенства непрерывно зависит от θ, λ, оставаясь целым числом. Поэтому она постоянна, и остается положить $\theta = \pi$.

Заметим, что умножение матрицы X в (24) справа на диагональную матрицу x с диагональными элементами $x_r = [q_r]^{-\zeta}$, $x_k = \overline{x}_r$, где $\overline{k,r} = P_\tau$, $\tau \in F$, приводит ее к матрице $\tilde{X}$, для которой $\tilde{X}_{sr} = \hat{A}_{sr} + \hat{A}_{sk}v_\tau = \overline{\tilde{X}}_{sk}$, $P_\tau = \overline{k,r}$; здесь $v_\tau(\zeta) = [q_k]^\zeta[q_r]^{-\zeta}$. Эта матрица $\tilde{X}$ уже в точности совпадает с концевым символом [17] обобщенной задачи Римана–Гильберта, отвечающей $a = A$, $a^0 = 0$ в (1).

5. Специальная блочная структура концевого символа задачи. Обозначим точки $\tau \in F$ символами τ_i, $i = 1, \ldots, m$, соответственно запишем и множества P_i, P_i^0 в (13). Выражения (24) показывают, что изменение порядка пары P_i сказывается только на перестановке соответствующих столбцов матриц X и X^0. Поэтому этот порядок можно выбирать произвольно. Условимся первый и второй элементы упорядоченной пары P_i обозначать через $P_i(p)$, $p = 1, 2$.

Пусть $X_{(ij)}$ означает 2×2-матрицу, составленную из элементов матрицы X, расположенных на строках и столбцах с номерами соответственно из P_i и P_j. Аналогичный смысл имеет и $X^0_{(ij)}$. Согласно (32), матрица $(X_{(ij)})$ диагональна, т.е. $X_{(ij)} = 0$, $i \neq j$, с диагональными элементами

$$X_{(ii)p1} = \overline{X}_{(ii)p2} = \hat{a}_k[q_k]^\zeta, \quad k = P_i(p).$$

Аналогично

$$X^0_{(ij)p1} = \overline{X^0}_{(ii)p2} = \begin{cases} \hat{a}^0_k[q^0_k]^\zeta, & k = P_i(p) \in P^0_j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если множества F_k точек $\tau = (i)$ трактовать как подмножества $\{1, \ldots, m\}$, то $m\times m$-матрица $X^0 = (X^0_{(ij)})$ будет блочно-диагональной относительно разбиения (F_k). Другими словами, блочная матрица $X^0(\zeta, F_k)$ составлена из элементов $X^0_{(ij)}$, $i, j \in F_k$.

В описании (32) матрицы X^0 множества $P^0_{(j)}$ можно сузить, добавляя к их определению (13) условие $(a^0 \circ \gamma_k)(0) \neq 0$. Это соглашение особенно удобно применительно к задаче (1′), когда сдвиг α задан на части Γ' дуги Γ. В качестве иллюстрации рассмотрим частный случай этой задачи, когда Γ' является дугой с концами τ_1, τ_2, не содержащей внутри себя точек $\tau \in F$. При $\alpha(\Gamma') \subseteq D$ матрица X^0, очевидно, нулевая. Поэтому можно считать, что $\alpha(\tau_1) \in F$, $\alpha(\tau_2) \in D \cup F$. Нумерацию дуг $\Gamma_{F,j}$ выберем так, чтобы Γ' оканчивалась дугами $\Gamma_{F,1}$ и $\Gamma_{F,2}$ с концами τ_1 и τ_2 соответственно. Нумерацию пар $P_{(1)}$ и $P_{(2)}$ подчиним условию $(i)1 = i$, $i = 1, 2$.

Тогда, согласно (32), вторая строка каждой матрицы $X^0_{(ij)}$ будет нулевой. Более точно, $m \times m$-матрица $(X^0_{(ij)})$ содержит только два ненулевых элемента

$$x^0_k = \begin{pmatrix} a^0(\tau_k)[q^0_k]^\zeta & \overline{a^0(\tau_k)[q^0_k]^\zeta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2.$$

Считая для определенности $\tau_1 \in F_1$, опишем диагональный блок $X^0(\zeta, F_1) = (X^0_{(ij)}$, $\tau_i, \tau_j \in F_1)$ матрицы X^0, который зависит от взаимного расположения точек τ_k, $\alpha(\tau_k)$, $k = 1, 2$. Все возможные случаи этого расположения разберем отдельно.

1) Пусть $\alpha(\tau_1) = \tau_1$, $\alpha(\tau_2) \neq \tau_1$. Тогда $F_1 = \{\tau_1\}$, $P^0_1 = \{1\}$ и $X^0_{(11)} = x^0_1$.

2) Пусть $\alpha(\tau_1) = \tau_2$, $\alpha(\tau_2) = \tau_1$. Тогда $F_1 = \{\tau_1, \tau_2\}$, $P^0_1 = \{2\}$, $P^0_2 = \{1\}$ и $X^0_{(11)} = X^0_{(22)} = 0$, $X^0_{(12)} = x^0_1$, $X^0_{(21)} = x^0_2$.

3) Пусть $\alpha(\tau_1) = \tau_1$, $\alpha(\tau_2) = \tau_1$. Тогда $F_1 = \{\tau_1, \tau_2\}$, $P^0_1 = \{1, 2\}$ и $X^0_{(12)} = X^0_{(22)} = 0$, $X^0_{(i1)} = x^0_i$, $i = 1, 2$.

4) Пусть $\alpha(\tau_1) = \tau_2$, $\tau_3 = \alpha(\tau_2) \neq \tau_1, \tau_2$. Тогда $F_1 = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, $P^0_2 = \{1\}$, $P^0_3 = \{2\}$ и $X^0_{(12)} = x^0_1$, $X^0_{(23)} = x^0_2$, $X^0_{(ij)} = 0$ в остальных случаях.

5) Пусть $\tau_4 = \alpha(\tau_1) \neq \tau_1, \tau_2$, $\alpha(\tau_2) = \tau_4$. Тогда $F_1 = \{\tau_1, \tau_2, \tau_4\}$, $P^0_4 = \{1, 2\}$ и $X^0_{(i4)} = x^0_i$, $i = 1, 2$, $X^0_{(ij)} = 0$ в остальных случаях.

6) Пусть $\tau_4 = \alpha(\tau_1) \neq \tau_1, \tau_2$, $\alpha(\tau_2) \neq \tau_1, \tau_2, \tau_4$. Тогда $F_1 = \{\tau_1, \tau_4\}$, $P_1^0 = \{1\}$ и $X^0_{(14)} = x^0_1$, $X^0_{(11)} = X^0_{(44)} = X^0_{(41)} = 0$.

Заметим, что в случаях 4)–6) для всех F_j матрицы $(X+X^0)(\zeta, F_j)$ блочно-треугольны. Поэтому их определитель совпадает с $\det X(\zeta, F_j)$, а характеристика полюсов $(X+X^0)^{-1}(\zeta, F_j)$ совпадает с аналогичной характеристикой матрицы-функции $X^{-1}(\zeta, F_j)$. С учетом геометрической интерпретации этих случаев отсюда приходим к следующему утверждению.

Теорема 6. *Пусть в задаче (1′), (2) кривая Γ' является дугой, не содержащей внутри множества F, и пересечение $\Gamma' \cap \alpha(\Gamma')$ либо пусто, либо состоит из одной точки $\tau \in F$, $\alpha(\tau) \neq \tau$. Тогда в формулировках теорем 4, 5 можно положить $X^0 = 0$.*

Заметим, что постановка задачи (1′), предложенная А.В. Бицадзе и А.А. Самарским [1], удовлетворяет условию $\Gamma' \cap \alpha(\Gamma') = \emptyset$ теоремы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00976) и программы “Университеты России” (проект УР 04.01.023).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
2. *Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г.* // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192. № 3. С. 511–513.
3. *Житарашу Н.В., Эйдельман С.Д.* // Мат. исследования. Кишинев. 1971. Т. 6. № 2 (20). С. 63–73.
4. *Бицадзе А.В.* // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277. № 1. С. 17–19.
5. *Скубачевский А.Л.* // Мат. сб. 1986. Т. 129 (171). № 2. С. 279–302.
6. *Скубачевский А.Л.* // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291. № 3. С. 551–555.
7. *Скубачевский А.Л.* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 1. С. 120–131.
8. *Скубачевский А.Л.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 1. С. 128–139.
9. *Skubachevskii A.L.* // J. of Math. Anal. and Appl. 1991. V. 160. № 2. P. 323–341.
10. *Skubachevskii A.L.* // Russian J. of Math. Phys. 2001. V. 8. P. 365–374.
11. *Скубачевский А.Л.* // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 1991. Т. 22. С. 283–298.
12. *Кишкис К.Ю.* // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 1. С. 105–110.
13. *Гуревич П.Л.* // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2003. Т. 23. С. 93–126.
14. *Gurevich P.L.* // Funct. Differ. Equat. 2003. V. 10. № 1–2. P. 175–214.
15. *Гуревич П.Л.* // Изв. РАН. Сер. мат. 2003. Т. 67. № 6. С. 71–110.
16. *Солдатов А.П.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1991. Т. 55. № 5. С. 1070–1100.
17. *Солдатов А.П.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1992. Т. 56. № 3. С. 566–604.
18. *Солдатов А.П.* // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 4. С. 825–828.
19. *Жура Н.А.* // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 1. С. 81–91.
20. *Жура Н.А.* // Докл. РАН. 1993. Т. 331. № 6. С. 668–671.
21. *Сакс Е.А.* // Научн. тр. III междунар. сем. “Современные проблемы прочности” им. В.С. Лихачева, Ст. Русса, 1999. Новгород, 1999. Т. 1. С. 126–130.
22. *Сидорова И.В.* // Изв. вузов. Математика. 1995. № 8 (399). С. 50–56.
23. *Солдатов А.П.* // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 6. С. 825–838.
24. *Солдатов А.П.* // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 10. С. 1364–1376.
25. *Солдатов А.П.* // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 6. С. 809–817.

Научно-исследовательский институт прикладной
математики и автоматизации КБНЦ РАН, г. Нальчик

Поступила в редакцию
17.01.2003 г.