КРИВЫЕ ПЕАНО

И. П. Натансон

(Ленинград)

1. В 1890 г. итальянский математик Д. Пеано (1858—1932) построил пример плоской непрерывной кривой, проходящей через все точки некоторого квадрата [1]). Естественно, что кривая с такими удивительными свойствами привлекла к себе всеобщее внимание, и вскоре были найдены и другие примеры таких кривых. Все они по имени автора первой из них получили название *кривых Пеано*. В частности, сравнительно простую кривую Пеано построил в 1891 г. немецкий ученый Д. Гильберт (1862—1943) [2]). Целью настоящей статьи является изложение конструкции Гильберта [3]).

2. Поскольку существуют различные определения термина «плоская непрерывная кривая», приведем то из них, которое имеется в виду в этой статье [4]).

Определение. *Плоской непрерывной кривой* называется множество M всех точек $(\varphi(t), \psi(t))$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — какие-нибудь две (фиксированные для данной кривой) функции, заданные и непрерывные на отрезке $[0,1]$.

Если истолковать параметр t как время, то приведенное определение, грубо говоря, будет означать, что плоская непрерывная кривая есть путь движущейся по плоскости точки. Равенства

$$x = \varphi(t), \ y = \psi(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

являются уравнениями этого движения.

[1]) G. Peano, Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane, Math. Annalen 36 (1890), 157—160.

[2]) D. Hilbert, Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück, Math. Annalen 38 (1891), 459—460.

[3]) В нашей литературе пример Гильберта уже излагался: см. Н. Н. Лузин, Теория функций действительного переменного, Учпедгиз, 1940; А. С. Пархоменко, Что такое линия, М., 1954. Однако установление некоторых обстоятельств, принятых в этих доказательствах за очевидные, может затруднить малоопытного читателя. Я здесь вхожу в несколько бо́льшие подробности.

[4]) Это определение принадлежит французскому математику К. Жордану (Marie Ennemond Camille Jordan, 1838—1922). По поводу других определений см., например, литературу, указанную в предыдущей сноске.

Таким образом, задача построения кривой Пеано будет решена, если мы укажем такую пару непрерывных на $[0, 1]$ функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, для которой упомянутое выше множество M совпадает с квадратом $Q(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$.

3. Для построения нужной нам пары функций разработаем предварительно некоторый способ записи чисел, принадлежащих отрезку $T=[0, 1]$.

Начнем с того, что при помощи точек $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ разложим T на четыре равных отрезка:

$$T_1^{(1)}=\left[0, \frac{1}{4}\right],\ T_2^{(1)}=\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right],\ T_3^{(1)}=\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right],\ T_4^{(1)}=\left[\frac{3}{4}, 1\right],$$

которые в дальнейшем будем называть *отрезками первого ранга*. Эти отрезки изображены на рис. 1. Каждый из отрезков первого

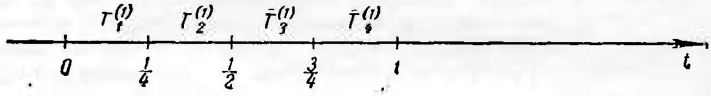


Рис. 1.

ранга в свою очередь мы разложим на четыре равных отрезка при помощи точек $\frac{i}{4^2}$ $(i=1, 2, \ldots, 15)$ и введем для этих новых отрезков, которые будем называть *отрезками второго ранга*, обозначение

$$T_i^{(2)}=\left[\frac{i-1}{16}, \frac{i}{16}\right] \qquad (i=1, 2, \ldots, 16).$$

Продолжая подобный процесс неограниченно, мы для каждого натурального k построим 4^k отрезков *k-го ранга*, для которых будем употреблять обозначение

$$T_i^{(k)}=\left[\frac{i-1}{4^k}, \frac{i}{4^k}\right] \qquad (i=1, 2, \ldots, 4^k).$$

Полученная система отрезков и позволяет дать упомянутый выше способ записи чисел отрезка $[0, 1]$. Пусть $t_0 \in [0, 1]$, причем мы предположим сначала, что точка t_0 не совпадает ни с одной из введенных выше точек деления, т. е. ни для какого k

$$t_0 \neq \frac{i}{4^k} \qquad (i=1, 2, \ldots, 4^k-1).$$

Тогда существует т о л ь к о о д и н отрезок $T_{i_1}^{(1)}$ первого ранга, содержащий точку t_0, т о л ь к о о д и н отрезок $T_{i_2}^{(2)}$ второго ранга с этим же свойством и т. д. Обозначим вообще через $T_{i_k}^{(k)}$ тот (единственный!) отрезок k-го ранга, который содержит t_0. Ясно, что

$$T_{i_1}^{(1)} \supset T_{i_2}^{(2)} \supset T_{i_3}^{(3)} \supset \ldots,$$

и потому

$$4i_k - 3 \leqslant i_{k+1} \leqslant 4i_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Условимся употреблять следующую запись:

$$t_0 = [i_1, i_2, i_3, \ldots].$$

Допустим теперь, что $t_0 \in [0, 1]$ совпадает с одной из введенных выше точек деления. Тогда

$$t_0 = \frac{m}{4^n} \qquad (1 \leqslant m \leqslant 4^n - 1),$$

причем m не делится на 4. Ясно, что имеется только по одному отрезку каждого из рангов 1, 2, ..., $n-1$, содержащему t_0 (мы считаем $n > 1$; если $n = 1$, то рассуждение лишь упрощается). Что же касается рангов n, $n+1$, $n+2$, ..., то среди отрезков каждого из них будет по два, содержащих t_0, а именно:

$$T_m^{(n)} \text{ и } T_{m+1}^{(n)}, \qquad T_{4m}^{(n+1)} \text{ и } T_{4m+1}^{(n+1)}, \ldots$$

Пусть $k < n$ и $T_{i_k}^{(k)}$ есть тот единственный отрезок ранга k, который содержит[1] t_0. Условимся употреблять для t_0 любую из записей[2]:

$$t_0 = [i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, m, 4m, 16m, \ldots],$$
$$t_0 = [i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, m+1, 4m+1, 16m+1, \ldots].$$

Таким образом, каждая из точек t_0 отрезка $[0, 1]$ допускает одну или две записи вида

$$t_0 = [i_1, i_2, i_3, \ldots],$$

где $1 \leqslant i_1 \leqslant 4$, $4i_k - 3 \leqslant i_{k+1} \leqslant 4i_k$.

Обратно, если $1 \leqslant p \leqslant 4^k$ и $4p - 3 \leqslant q \leqslant 4p$, то

$$T_p^{(k)} \supset T_q^{(k+1)},$$

и поэтому всякая бесконечная последовательность натуральных чисел $[i_1, i_2, i_3, \ldots]$, у которой $1 \leqslant i_1 \leqslant 4$, $4i_k - 3 \leqslant i_{k+1} \leqslant 4i_k$, определяет систему вложенных друг в друга отрезков

$$T_{i_1}^{(1)} \supset T_{i_2}^{(2)} \supset T_{i_3}^{(3)} \supset \ldots$$

---

[1]) Легко понять, что при $k = 1, 2, \ldots, n-2$
$$4i_k - 3 \leqslant i_{k+1} \leqslant 4i_k.$$

[2]) Пример: $\frac{5}{8} = [3, 10, 40, 160, \ldots] = [3, 11, 41, 161, \ldots]$.

и, стало быть, может рассматриваться как запись некоторой точки t_0 из $[0, 1]$.

4. Теперь мы построим нечто вроде такого же аппарата для записи точек квадрата $Q(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$. Начнем с разложения Q при помощи прямых $x = \frac{1}{2}$ и $y = \frac{1}{2}$ на четыре равных квадрата, которые будем называть *квадратами первого ранга* и обозначать через $Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)}, Q_3^{(1)}, Q_4^{(1)}$. Нижние индексы расставим так, как указано на рис. 2.

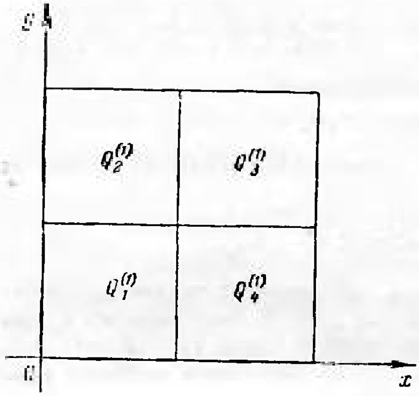


Рис. 2.

Проделав указанное построение, разложим каждый из квадратов $Q_i^{(1)} (i = 1, 2, 3, 4)$ на четыре равных квадрата, которые назовем *квадратами второго ранга* и обозначим $Q_i^{(2)}$ $(i = 1, 2, \ldots, 16)$. Рис. 3 указывает расстановку нижних индексов i. Обратим внимание на то, что $Q_1^{(2)}$ содержит точку $O(0, 0)$ и что любая пара квадратов $Q_i^{(2)}$ и $Q_{i+1}^{(2)}$ $(i = 1, 2, \ldots, 15)$ имеет общую сторону.

Будем продолжать указанный процесс разложения построенных квадратов на четыре равных квадрата неограниченно. В результате для каждого натурального k будет получено 4^k квадратов ранга k, сторона каждого из которых равна $\frac{1}{2^k}$. Эти квадраты мы будем обозначать через $Q_i^{(k)} (i = 1, 2, \ldots, 4^k)$, озаботившись при расстановке нижних индексов i лишь тем, чтобы соблюдались три условия:

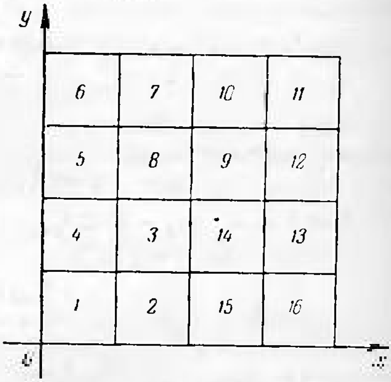


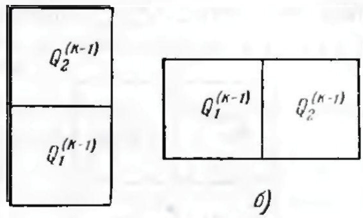
Рис. 3.

1) каждый квадрат $Q_1^{(k)}$ содержит точку $O(0, 0)$;

2) все четыре квадрата $Q_{4i-3}^{(k)}, Q_{4i-2}^{(k)}, Q_{4i-1}^{(k)}, Q_{4i}^{(k)}$ содержатся в $Q_i^{(k-1)} (k > 1;\ i = 1, 2, \ldots, 4^{k-1})$;

3) любые два квадрата $Q_i^{(k)}$ и $Q_{i+1}^{(k)} (i = 1, 2, \ldots, 4^k - 1)$ с соседними нижними индексами имеют общую сторону.

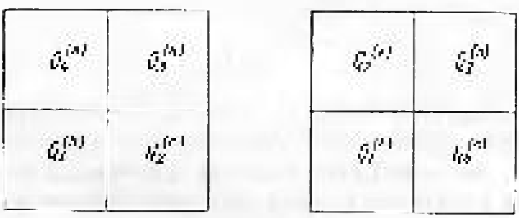
То обстоятельство, что первым двум условиям можно удовлетворять, не вызывает сомнения. Менее очевидно, что в каждой четверке квадратов $Q^{(k)}_{4i-3}$, $Q^{(k)}_{4i-2}$, $Q^{(k)}_{4i-1}$, $Q^{(k)}_{4i}$, полученной разложением одного и того же квадрата $Q^{(k-1)}_i$, можно так расставить нижние индексы, чтобы выполнялось и третье условие. Этот факт мы докажем индуктивно. Рис. 2 и 3 показывают, что нумерация квадратов первых двух рангов, удовлетворяющая всем трем поставленным условиям, нам удалась. Допустим, что нам так удалось перенумеровать все квадраты рангов $1, 2, \ldots, k-1$, что оказались соблюденными все три поставленных выше условия. Покажем, что и для квадратов ранга k можно установить требуемую нумерацию.



а) б)

Рис. 4.

Для этого мы прежде всего, разбивая квадрат $Q^{(k-1)}_1$ на четыре равные части, обозначим через $Q^{(k)}_1$ ту из них, которая содержит точку O. Сделав это, мы различим два возможных взаимных расположения квадратов $Q^{(k-1)}_1$ и $Q^{(k-1)}_2$, указанных на рис. 4. В случае *а*) мы перенумеруем квадраты $Q^{(k)}_i$ для $i=1, 2, 3, 4$ по образцу, указанному на рис. 5, *а*, а в случае *б*) — по образцу рис. 5, *б*).



а) б)

Рис. 5.

Ясно, что в обоих случаях любая пара квадратов $Q^{(k)}_i$ и $Q^{(k)}_{i+1}$ $(i=1, 2, 3)$ будет обладать общей стороной и через $Q^{(k)}_4$ будет обозначен квадрат, сторона которого является половиной стороны квадрата $Q^{(k-1)}_2$.

Допустим же, что для некоторого m $(1 \leqslant m \leqslant 4^{k-1}-1)$ нам уже удалось перенумеровать квадраты

$$Q^{(k)}_1, Q^{(k)}_2, \ldots, Q^{(k)}_{4m}$$

так, что любые два из них с соседними нижними индексами имеют общую сторону, и через $Q^{(k)}_{4m}$ оказался обозначенным квадрат, сторона которого является половиной стороны квадрата $Q^{(k-1)}_{m+1}$. Тогда само собой определяется, какая именно из четвертей квадрата $Q^{(k-1)}_{m+1}$ должна получить обозначение $Q^{(k)}_{4m+1}$ — это будет четверть, которая имеет общую сторону с $Q^{(k)}_{4m}$. Остается указать нумерацию для остальных трех четвертей $Q^{(k-1)}_{m+1}$. Если $m+1=4^{k-1}$, т. е. $Q^{(k-1)}_{m+1}$ есть последний из квадратов ранга $k-1$, то надо позаботиться лишь о

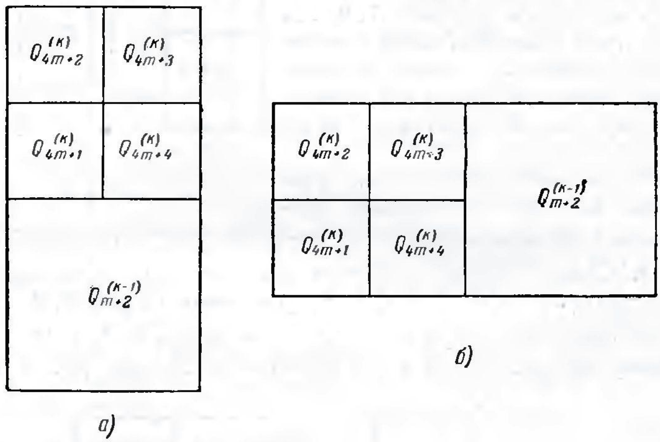


Рис. 6.

том, чтобы упомянутые четверти, имеющие общую сторону, получили соседние номера, что никаких трудностей не представляет. Если же $m+1<4^{k-1}$, то дело будет обстоять сложнее. Здесь нам придется различить две возможности взаимного расположения квадратов $Q^{(k)}_{4m+1}$ и $Q^{(k-1)}_{m+2}$: а) они соседствуют, б) они не соседствуют. Обе эти возможности схематически указаны на рис. 6, где одновременно с этим показана и та нумерация, которую следует применить.

Таким образом, всегда можно осуществить нумерацию, удовлетворяющую всем трем поставленным требованиям.

Как и в случае отрезков, рассмотренных в п. 3, соотношения $1 \leqslant p \leqslant 4^k$ и $4p-3 \leqslant q \leqslant 4p$ имеют следствием включение

$$Q^{(k)}_{p} \supset Q^{(k+1)}_{q}.$$

Это непосредственно следует из свойства 2) нашей нумерации. Но тогда всякая бесконечная последовательность натуральных чисел

$$i_1,\ i_2,\ i_3,\ \ldots,$$

в которой $1 \leqslant i_1 \leqslant 4$ и $4i_k - 3 \leqslant i_{k+1} \leqslant 4i_k$, задает последовательность вложенных друг в друга квадратов

$$Q_{i_1}^{(1)} \supset Q_{i_2}^{(2)} \supset Q_{i_3}^{(3)} \supset \ldots$$

и тем самым определяет единственную точку (x_0, y_0) исходного квадрата Q.

Мы будем для этой точки применять запись

$$(x_0, y_0) = \langle i_1, i_2, i_3, \ldots \rangle,$$

используя ломаные скобки для отличия от ранее введенной записи $[i_1, i_2, i_3, \ldots]$, обозначающей точку отрезка $[0, 1]$.

Весьма существенно, что *каждая* точка $(x_0, y_0) \in Q$ допускает такую запись [1]), поскольку она является пересечением стягивающейся системы вложенных друг в друга квадратов возрастающих рангов.

5. Теперь мы можем построить интересующие нас функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Именно, взяв произвольное $t_0 \in [0, 1]$, записываем это t_0 в форме

$$t_0 = [i_1, i_2, i_3, \ldots]$$

и рассматриваем точку

$$(x_0, y_0) = \langle i_1, i_2, i_3, \ldots \rangle.$$

Решающим для дальнейшего является то обстоятельство, что *точка (x_0, y_0) полностью определяется точкой t_0*. Иными словами, если даже точка t_0 допускает не одну, а две записи вида $[i_1, i_2, i_3, \ldots]$, то обе эти записи приводят к *одной и той же* точке (x_0, y_0). В самом деле, две записи допускают точки вида $\frac{m}{4^n}$, где $1 \leqslant m < 4^n$ и m не делится на 4. Как мы видели выше, эти записи таковы: $[i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, m, 4m, 16m, \ldots]$ и $[i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, m+1, 4m+1, 16m+1, \ldots]$. Пусть же

$$\langle i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, m, 4m, 16m, \ldots \rangle = (x_1, y_1),$$

$$\langle i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, m+1, 4m+1, 16m+1, \ldots \rangle = (x_2, y_2).$$

Тогда при любом натуральном r будет

$$(x_1, y_1) \in Q_{4^r m}^{(n+r)}, \quad (x_2, y_2) \in Q_{4^r m+1}^{(n+r)}.$$

---

[1]) Некоторые из точек (x_0, y_0) допускают только одну такую запись, а некоторые несколько. Например, точка $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, очевидно, может быть записана *четырьмя* способами:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \langle 1, 3, \ldots \rangle = \langle 2, 8, \ldots \rangle = \langle 3, 9, \ldots \rangle = \langle 4, 14, \ldots \rangle.$$

У квадратов $Q^{(n+r)}_{4^r m}$ и $Q^{(n+r)}_{4^r m+1}$ соседние нижние индексы, и потому эти квадраты имеют общую сторону. Но длина стороны каждого из них есть $2^{-(n+r)}$. Отсюда

$$|x_2 - x_1| \leqslant 2^{1-(n+r)},$$

и ввиду произвольности r оказывается $x_2 = x_1$. Аналогично и $y_2 = y_1$. Стало быть, обе записи точки t_0 привели нас к одной и той же точке (x_0, y_0). Положив

$$\varphi(t_0) = x_0, \quad \psi(t_0) = y_0,$$

мы однозначно определяем функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, причем само собою ясно, что множество M точек вида $(\varphi(t), \psi(t))$ тождественно с квадратом Q[1]).

6. Остается убедиться в непрерывности функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. С этой целью рассмотрим две какие-либо точки t' и t'' из $[0, 1]$. Пусть

$$t' = [i_1, i_2, i_3, \ldots],$$
$$t'' = [j_1, j_2, j_3, \ldots].$$

Выберем и закрепим какое-нибудь натуральное k. Тогда

$$t' \in T^{(k)}_{i_k}, \quad t'' \in T^{(k)}_{j_k},$$

или, что то же самое,

$$\frac{i_k - 1}{4^k} \leqslant t' \leqslant \frac{i_k}{4^k}, \quad \frac{j_k - 1}{4^k} \leqslant t'' \leqslant \frac{j_k}{4^k}.$$

Отсюда

$$\frac{i_k - j_k - 1}{4^k} \leqslant t' - t'' \leqslant \frac{i_k - j_k + 1}{4^k},$$

и, стало быть,

$$\left| \frac{i_k - j_k}{4^k} - (t' - t'') \right| \leqslant \frac{1}{4^k}.$$

Но тогда

$$|i_k - j_k| \leqslant 1 + 4^k |t' - t''|.$$

Если

$$|t' - t''| < \frac{1}{4^k}, \qquad (*)$$

то

$$|i_k - j_k| < 2,$$

---

[1]) В самом деле, если $(x^*, y^*) \in Q$, то (x^*, y^*) допускает одну или несколько записей $\langle i_1, i_2, i_3, \ldots \rangle$. Выбрав одну из этих записей и положив $[i_1, i_2, i_3, \ldots] = t^*$, получим $\varphi(t^*) = x^*$, $\psi(t^*) = y^*$.

и поскольку оба числа i_k и j_k натуральны, ясно, что i_k и j_k либо совпадают, либо суть соседние натуральные числа. Но справедливы включения

$$(\varphi(t'), \psi(t')) \in Q_{i_k}^{(k)}, \quad (\varphi(t''), \psi(t'')) \in Q_{j_k}^{(k)}.$$

Квадраты $Q_{i_k}^{(k)}$ и $Q_{j_k}^{(k)}$ либо совпадают, либо имеют общую сторону. Длина же стороны каждого из них равна 2^{-k}. Стало быть, из неравенства (*) вытекают неравенства

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leqslant 2^{1-k}, \quad |\psi(t') - \psi(t'')| \leqslant 2^{1-k}.$$

Теперь уже легко закончить рассуждение. В самом деле, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, находим столь большое k, чтобы оказалось

$$2^{1-k} < \varepsilon.$$

Полагая $4^{-k} = \delta$, видим, что неравенство $|t' - t''| < \delta$ обеспечивает неравенства

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| < \varepsilon, \quad |\psi(t') - \psi(t'')| < \varepsilon,$$

чем и доказана непрерывность обеих функций φ и ψ.

7. В заключение мы предлагаем читателю несколько задач, связанных с изложенным материалом.

1. Точка (x_0, y_0) кривой $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ называется *кратной*, если существует больше одного значения t, для которого $\varphi(t) = x_0$, $\psi(t) = y_0$. Если таких значений t имеется ровно p, то точка (x_0, y_0) называется p-кратной. Доказать, что построенная выше кривая Пеано не имеет p-кратных точек при $p > 4$.

2. Доказать, что на построенной кривой имеются как некратные, так и p-кратные точки при $p = 2, 3, 4$. В частности, точка $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ трехкратная [1].

3. Доказать, что на *всякой* (а не только на построенной выше) кривой Пеано обязательно имеются кратные точки.

4. Построить *пространственную* кривую Пеано, т. е. задать на $[0, 1]$ такие три непрерывные функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$, чтобы множество всех точек вида $(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ совпало с кубом $K(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1)$.

[1]) Интересно, что сам Гильберт ошибочно утверждал (цит. соч., стр. 460), что на построенной им кривой имеются (помимо некратных) лишь двукратные и четырехкратные точки.