



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Аллаков, Об одной оценке Г. Вейля – И. М. Виноградова, *Сиб. матем. журн.*, 2002, том 43, номер 1, 9–13

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

17 марта 2025 г., 17:59:56



УДК 511.28

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ
Г. ВЕЙЛЯ — И. М. ВИНОГРАДОВА
И. А. Аллаков

Аннотация: Доказано, что если $k \geq 6$, $\alpha = aq^{-1} + z$, $(a, q) = 1$, $|z| < q^{-2}$, то

$$\sum_{n \leq P} e^{2\pi i f(n)} \ll P^{1+\varepsilon} (Pz_0^{-1}q^{-1} + P^{-2} + qz_0P^{1-k})^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{-k},$$

где $f(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-2} x^{k-2} + \alpha_{k-3} x^{k-3} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ — полином с действительными коэффициентами и $z = \max(1; P^k |z|)$. Полученный результат при $P^3 \leq q \leq P^{k-3}$ и $|z| \leq P^{-k}$ является улучшением известной оценки Вейля о тригонометрической сумме. Библиогр. 4.

Пусть $f(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ — полином k -й степени ($k \geq 2$) с вещественными коэффициентами $\alpha_k = \alpha$, $\alpha_{k-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ и

$$S(f) = \sum_{n \leq P} e(f(n)). \quad (1)$$

Тогда согласно неравенству Вейля (см. [1, лемма 2.4]) при $(a, q) = 1$, $|\alpha - aq^{-1}| \leq q^{-2}$ имеем

$$S(f) \ll P^{1+\varepsilon} (q^{-1} + P^{-1} + qP^{-k})^{2^{1-k}}, \quad (2)$$

где ε — произвольное положительное число и постоянная в символе Виноградова \ll зависит от k и $\varepsilon > 0$.

В настоящей работе доказана

Теорема 1. Если $k \geq 6$, $\alpha = aq^{-1} + z$, $(a, q) = 1$, $|z| < q^{-2}$ и $\alpha_{k-1} = 0$, то

$$S(f) \ll P^{1+\varepsilon} (Pz_0^{-1}q^{-1} + P^{-2} + qz_0P^{1-k})^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{-k}, \quad (3)$$

где $z_0 = \max(1; P^k |z|)$.

Отсюда, в частности, следует, что

$$S(f) \ll P^{1+\varepsilon} (Pq^{-1} + P^{-2} + qP^{1-k})^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{-k}. \quad (4)$$

Оценка (4) лучше, чем оценки (2) при $P^3 \leq q \leq P^{k-3}$. Таким образом, оценка (3) является усилением оценки Вейля (2) и обобщением результата из [2, 3]. Отметим также, что полученный результат, улучшающий ранее доказанную оценку $S(f)$ методом Виноградова [4] при $6 \leq k \leq 11$, можно применять для оценки распределения дробных долей последовательности $\{f(n)\}$, а также в некоторых аддитивных задачах теории чисел. Из оценки (3), в частности, следует, что при $k \geq 6$ неравенство $\|f(n)\| \leq n^{\varepsilon - \frac{8}{3}} 2^{-k}$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $f(x) = \alpha x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \alpha_{k-2} x^{k-2} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ — произвольный полином степени $k \geq 6$. Для того чтобы установить оценку (3), во-первых, используя симметричную разность

$$\Delta_h(f(x)) = f(x+h) - f(x-h), \quad (5)$$

методом математической индукции покажем, что для $0 \leq j \leq k$ справедливо неравенство

$$|S(f)|^{2^j} \leq 2^{2^j-1} P^{2^j-j-1} \sum_{|h_1| < P/2} \dots \sum_{|h_j| < P/2} \left| \sum_{n \in I_j} e(\Delta_j(n)) \right|, \quad (6)$$

где $I_1 = I(h_1) \subset [1; P]$, $I_j = I(h_1, \dots, h_j) \subset I_{j-1} = I(h_1, \dots, h_{j-1})$ и $\Delta_j(n) = \Delta_{h_1} \dots \Delta_{h_j}(f(n))$.

При $j = 0$ неравенство (6) очевидно. Предположим, что неравенство (6) справедливо для некоторого j , и покажем, что оно будет справедливым и для $j+1$. Так как

$$\left| \sum_{n \in I_j} e(\Delta_j(n)) \right| \leq \sum_{i=0,1} \left| \sum_{\substack{n \in I_j \\ n \equiv i \pmod{2}}} e(\Delta_j(n)) \right|,$$

используя неравенство Коши в виде

$$\left| \sum_{i=1}^N X_i \right|^m \leq N^{m-1} \sum_{i=1}^N |X_i|^m,$$

находим

$$\begin{aligned} |S(f)|^{2^{j+1}} &\leq 2^{2^{j+1}-2} P^{2^{j+1}-2j-2} \left(\sum_{|h_1| < P/2} \dots \sum_{|h_j| < P/2} \sum_{i=0,1} \left| \sum_{\substack{n \in I_j \\ n \equiv i \pmod{2}}} e(\Delta_j(n)) \right| \right)^2 \\ &\leq 2^{2^{j+1}-2} P^{2^{j+1}-2j-2} \cdot P^j \cdot 2 \sum_{|h_1| < P/2} \dots \sum_{|h_j| < P/2} \sum_{i=0,1} \left| \sum_{\substack{n \in I_j \\ n \equiv i \pmod{2}}} e(\Delta_j(n)) \right|^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sum_{i=0,1} \left| \sum_{\substack{n \in I_j \\ n \equiv i \pmod{2}}} e(\Delta_j(n)) \right|^2 &= \sum_{i=0,1} \sum_{\substack{m, n \in I_j \\ m \equiv i \pmod{2}, n \equiv i \pmod{2}}} e(\Delta_j(m) - \Delta_j(n)) \\ &= \sum_{\substack{m, n \in I_j \\ m \equiv n \pmod{2}}} e(\Delta_j(m) - \Delta_j(n)) = \sum_{|h| < P/2} \sum_{r \in I_{j+1}} e(\Delta_j(r+h) - \Delta_j(r-h)) \\ &= \sum_{|h| < P/2} \sum_{r \in I_{j+1}} e(\Delta_{j+1}(r)), \end{aligned} \quad (8)$$

где $I_{j+1} = \{r : r \pm h \in I_j\}$.

Из (7) и (8) следует, что

$$|S(f)|^{2^{j+1}} \leq 2^{2^{j+1}-1} P^{2^{j+1}-j-2} \sum_{|h_1| < P/2} \dots \sum_{|h_j| < P/2} \sum_{|h_{j+1}| < P/2} \left| \sum_{r \in I_{j+1}} e(\Delta_{j+1}(r)) \right|,$$

т. е. неравенство (6) справедливо для $j+1$.

Таким образом, неравенство (6) справедливо для любого натурального j .

Теперь в (6) положим $j = k - 3$ и рассмотрим

$$\Delta_{k-3}(n) = \Delta_{h_1} \dots \Delta_{h_{k-3}}(f(n)).$$

Так как

$$\begin{aligned} (x+h)^k - (x-h)^k &= 2h(C_k^1 x^{k-1} + C_k^3 x^{k-3} h^2 + C_k^5 x^{k-5} h^4 + \dots) \\ &= 2h\left(kx^{k-1} + \sum_{1 \leq l \leq \frac{1}{2}(k-1)} C_k^{2l+1} h^{2l} x^{k-2l-1}\right), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \Delta_h(f(x)) &= \alpha \cdot 2h\left(kx^{k-1} + \sum_{1 \leq l \leq \frac{1}{2}(k-1)} C_k^{2l+1} h^{2l} x^{k-2l-1}\right) \\ &\quad + \alpha_{k-1} \cdot 2h\left((k-1)x^{k-2} + \sum_{1 \leq l \leq \frac{1}{2}(k-2)} C_{k-1}^{2l+1} h^{2l} x^{k-2l-2}\right) \\ &\quad + \alpha_{k-2} \cdot 2h\left((k-2)x^{k-3} + \sum_{1 \leq l \leq \frac{1}{2}(k-3)} C_{k-2}^{2l+1} h^{2l} x^{k-2l-3}\right) \\ &\quad + \dots + \alpha_2 \cdot 4hx + \alpha_1 \cdot 2h. \end{aligned}$$

Здесь $C_m^i = \frac{m!}{i!(m-i)!}$. Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1} \dots \Delta_{h_{k-3}}(f(x)) &= 2^{k-3} h_1 \dots h_{k-3} \left\{ \alpha \left(\frac{1}{6} k! x^3 + ax \right) \right. \\ &\quad \left. + \alpha_{k-1} \left(\frac{1}{2} (k-1)! x^2 + b \right) + \alpha_{k-2} (k-2)! x + \alpha_{k-3} \cdot c \right\} \\ &= 2^{k-3} h_1 \dots h_{k-3} \left\{ \frac{1}{6} k! \alpha_k x^3 + \frac{1}{2} (k-1)! \alpha_{k-1} x^2 \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_k a + \alpha_{k-2} (k-1)!) x + (\alpha_{k-1} b + \alpha_{k-3} c) \right\}, \quad (9) \end{aligned}$$

где a, b, c — некоторые целые числа.

Из (6) и (9) следует, что

$$\begin{aligned} |S(f)|^{2^{k-3}} &\ll P^{2^{k-3}-k+2} \sum_{|h_1| < P/2} \dots \sum_{|h_{k-3}| < P/2} \left| \sum_{n \in I_{k-3}} e(2^{k-3} h_1 \dots h_{k-3} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{1}{6} k! \alpha n^3 + \alpha_{k-1} \frac{1}{2} (k-1)! n^2 + (\alpha a + \alpha_{k-2} (k-2)!) n \right) \right|. \quad (10) \end{aligned}$$

Для дальнейших оценок правой части (10) положим $\alpha_{k-1} = 0$, тогда из (10) получим

$$\begin{aligned} |S(f)|^{2^{k-3}} &\ll P^{2^{k-3}-k+2} \sum_{|h_1| < P/2} \dots \sum_{|h_{k-3}| < P/2} \left| \sum_{n \in I_{k-3}} e \left(2^{k-3} h_1 \dots h_{k-3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(\frac{1}{6} k! \alpha n^3 + (\alpha a + \alpha_{k-2} (k-2)!) n \right) \right) \right|. \quad (11) \end{aligned}$$

Для каждого целого m пусть $L(m) = [mP^{-3}; (m+1)P^{-3}]$, и для любого действительного x пусть $m = m(x)$ — целое число, для которого $x \in L(m)$.

Положим $L(x) = L(m(x))$ и

$$T(x) = \max_{y,z} \left| \sum_{n \in I} e(yn^3 + zn) \right|,$$

где I — некоторый подынтервал интервала $[1; P]$, $y \in L(m)$, $z \in [0; 1]$. В этих обозначениях из (11) получим

$$|S(f)|^{2^{k-3}} \ll P^{2^{k-3}-k+2} \sum_{|h_1| < P/2} \cdots \sum_{|h_{k-3}| < P/2} T(\alpha K h_1 \dots h_{k-3}), \quad (12)$$

где $K = \frac{1}{6} 2^{k-3} k!$.

Далее, полагая $h = K h_1 h_2 \dots h_{k-3}$ и учитывая, что вклад членов в сумму правой части (12) для $h = 0$ оценивается как $\ll P^{k-4}$ и количество представлений h в указанном виде оценивается как $\ll \tau_{k-2}(h) \ll h^\varepsilon \ll P^\varepsilon$, находим

$$|S(f)|^{2^{k-3}} \ll P^{2^{k-3}-1} + P^{2^{k-3}-k+2+\varepsilon} \sum_{h=1}^R T(\alpha h),$$

где $R = KP^{k-3}$. Отсюда, возведя обе части в шестую степень и затем применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} |S(f)|^{3 \cdot 2^{k-2}} &\ll P^{3 \cdot 2^{k-2}-6} + P^{3 \cdot 2^{k-2}-6k+12+6\varepsilon} \left(\sum_{h=1}^R T(\alpha h) \right)^6 \\ &\ll P^{3 \cdot 2^{k-2}-6} + P^{3 \cdot 2^{k-2}-6k+12+6\varepsilon} \cdot R^{6-1} \sum_{h=1}^R T^6(\alpha h) \\ &\ll P^{3 \cdot 2^{k-2}-6} + P^{3 \cdot 2^{k-2}-k-3+6\varepsilon} \sum_{h=1}^R T^6(\alpha h). \quad (13) \end{aligned}$$

Для оценки суммы в правой части (13) будем использовать следующие две леммы (см. [2, леммы 5, 6]).

Лемма 1. Для любого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\sum_{m=1}^{P^3} T(mP^{-3})^6 \ll P^{7+\varepsilon}.$$

Лемма 2. Если $\alpha = aq^{-1} + z$, $(a, q) = 1$ и $|z| \leq q^{-2}$, то для любого вещественного μ и $0 < \Delta < \frac{1}{2}$ справедливы неравенства

$$\{h \leq H : \|\alpha h - \mu\| \leq \Delta\} \leq 4(1 + q\Delta)(1 + q^{-1}H), \quad (14)$$

$$\{h \leq H : \|\alpha h - \mu\| \leq \Delta\} \leq 8(1 + (q|z|)^{-1}\Delta)(1 + q|z|H). \quad (15)$$

Применяя лемму 1, из (13) находим

$$|S(f)|^{3 \cdot 2^{k-2}} \ll P^{3 \cdot 2^{k-2}-6} + P^{3 \cdot 2^{k-2}-k+4+7\varepsilon} \max_m F(m), \quad (16)$$

где

$$F(m) = \left\{ h \leq P : \alpha h \in \bigcup_{l=-\infty}^{\infty} L(m + P^3 l) \right\} \leq \{h \leq R : \|\alpha h - mP^{-3}\| \leq P^{-3}\}.$$

Из (14) и (15) при $H = R = KP^{k-3}$, $\Delta = P^{-3}$ соответственно получим

$$F(m) \ll qP^{-3} + P^{k-4} + q^{-1}P^{k-3},$$

$$F(m) \ll q|z| \cdot P^{k-3} + P^{k-6} + q^{-1}|z|^{-1}P^{-3}.$$

Из этих оценок имеем

$$F(m) \ll qz_0P^{-3} + P^{k-6} + q^{-1}z_0P^{k-3}, \quad (17)$$

где $|z_0| = \max\{1; |z|P^k\}$.

Наконец, из (16) и (17) находим

$$|S(f)|^{3 \cdot 2^{k-2}} \ll P^{3 \cdot 2^{k-2} - 6} + qzP^{3 \cdot 2^{k-2} - k + 1 + 7\epsilon} + P^{3 \cdot 2^{k-2} - 2 + 7\epsilon} + q^{-1}z_0^{-1}P^{3 \cdot 2^{k-2} + 1 + 7\epsilon}$$

$$\ll P^{3 \cdot 2^{k-2} + \epsilon} (qz_0P^{-k+1} + P^{-2} + q^{-1}z_0^{-1}P),$$

т. е.

$$S(f) \ll P^{1+\epsilon} (qz_0P^{-k+1} + P^{-2} + q^{-1}z_0^{-1}P)^{\frac{1}{3 \cdot 2^{k-2}}},$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что произвольный полином k -й степени

$$f(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \alpha_{k-2} x^{k-2} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

с вещественными коэффициентами $\alpha_k, \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ при помощи преобразования $x = y - \alpha_{k-1}(k\alpha_k)^{-1}$ можно привести к виду

$$f(y) = \beta_k y^k + \beta_{k-2} y^{k-2} + \beta_{k-3} y^{k-3} \dots + \beta_1 y + \beta_0,$$

но при этом указанное преобразование не всегда будет целочисленным.

В заключение автор выражает благодарность за весьма полезные обсуждения академику АН РУз профессору А. Ф. Лаврику и профессору М. И. Исраилову.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вон Р. Метод Харди — Литтлвуда. М.: Мир, 1985.
2. Heath-Brown D. R. Weyl's inequality, Hua's inequality, and Waring's problem // J. London Math. Soc. 1988. V. 38, N 2. P. 216–230.
3. Heath-Brown D. R. Weyl's inequality and Hua's inequality // Lecture Notes Math. 1989. V. 1380. P. 87–92.
4. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1980.

Статья поступила 20 февраля 2001 г.

Аллаков Исмаил Аллакович

Термизский гос. университет, математический факультет, кафедра
математического анализа, ул. Ф. Ходжаева, 43, Термиз 732011, Узбекистан
ahrortmz@online.ru