Б. В. Гладков, А. Н. Даценко-Чигорин, Дискретная оптимальная фильтрация, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 4, 88–103

DOI: 10.4213/dm443

Дискретная математика

том 10 выпуск 4 * 1998

УДК 519.24

Дискретная оптимальная фильтрация

© 1998 г. Б. В. Гладков, А. Н. Даценко-Чигорин

Решается задача дискретной оптимальной фильтрации: по знакам наблюдаемой двоичной последовательности $\{\eta_t\}$ строится двоичная последовательность $\{w_t^*\}$, которая является в некотором смысле наилучшей оценкой ненаблюдаемой детерминированной двоичной последовательности $\{\vartheta_t\}$, связанной с последовательностью $\{\eta_t\}$ соотношением

$$\eta_t = \xi_t \oplus \vartheta_t,$$

где $\{\xi_t\}$ — случайная стационарная двоичная последовательность, а символ $\oplus$ означает сложение по модулю 2.

Приводятся примеры применения предложенного метода дискретной оптимальной фильтрации для случая, когда последовательность $\{\vartheta_t\}$ представляет собой закодированное черно-белое факсимильное или телевизионное изображение, передаваемое по некоторому каналу связи с помехами.

1. Рассматривается двумерная частично наблюдаемая двоичная последовательность

$$\{(\vartheta_t, \eta_t), t = 1, \dots, N\},$$

где $\{\vartheta_t\}$ — ненаблюдаемая, а $\{\eta_t\}$ — наблюдаемая компоненты;

$$\vartheta_t, \eta_t \in \{0, 1\}, \qquad t = 1, \dots, N.$$

Будем считать, что ненаблюдаемая двоичная последовательность $\{\vartheta_t\}$ является детерминированной и при каждом значении дискретного параметра t элементы (знаки) двоичных последовательностей $\{\vartheta_t\}$ и $\{\eta_t\}$ связаны соотношением

$$\eta_t = \vartheta_t \oplus \xi_t, \tag{1}$$

где

$$\{\xi_t, t = 1, \dots, N\} \tag{2}$$

— в некотором смысле стационарная последовательность двоичных случайных величин, вообще говоря, зависимых, а символ $\oplus$ означает сложение по модулю 2.

В этих условиях решается следующая, отличная от традиционной, задача оптимальной фильтрации, которую мы назовем задачей дискретной оптимальной фильтрации: по тем или иным знакам наблюдаемой двоичной последовательности $\{\eta_t\}$ построить новую двоичную последовательность, которая является в некотором смысле оптимальной оценкой ненаблюдаемой двоичной последовательности $\{\vartheta_t\}$.

Более подробно, из всех n-местных двоичных функций $w(x_1, \dots, x_n)$, где n — некоторое фиксированное число, аргументами которых являются знаки двоичной последовательности $\{\eta_t\}$, выбирается такая двоичная функция $w^*(x_1, \dots, x_n)$, что в последовательности ее значений

$$w_t^* = w(\eta_t, \eta_{t+1}, \dots, \eta_{t+n-1}), \qquad t = 1, \dots, N-n+1,$$

которую мы будем считать оценкой последовательности $\{\vartheta_t\}$, в некотором смысле наилучшим образом сохраняются большие серии подряд идущих единиц и подряд идущих нулей ненаблюдаемой двоичной последовательности $\{\vartheta_t\}$.

Строгая постановка задачи дискретной оптимальной фильтрации будет дана ниже в пп. 3 и 4.

2. Введем некоторые обозначения и определения. Вектор, составленный из n подряд идущих значений параметра t, обозначим символом $\rho_t^{(n)}$ (или, для краткости, просто ρ) :

$$\rho = \rho_t^{(n)} = (t, t+1, \dots, t+n-1), \tag{3}$$

и будем называть его $\rho_t^{(n)}$-окрестностью (ρ-окрестностью) точки t или окном размера (длины) n, содержащим точку t.

Двоичные n-мерные векторы, составленные из знаков последовательностей $\{\vartheta_t\}$, $\{\eta_t\}$, $\{\xi_t\}$, при значениях параметра, составляющих $\rho_t^{(n)}$-окрестность точки t, будем обозначать соответственно

$$\begin{aligned}\vartheta(\rho) &= \vartheta(\rho_t^{(n)}) = (\vartheta_t, \dots, \vartheta_{t+n-1}),\\ \eta(\rho) &= \eta(\rho_t^{(n)}) = (\eta_t, \dots, \eta_{t+n-1}),\\ \xi(\rho) &= \xi(\rho_t^{(n)}) = (\xi_t, \dots, \xi_{t+n-1}\}.\end{aligned} \tag{4}$$

Выражения $\xi(\rho) = x$ и $\eta(\rho) = y$ будут означать, что указанные n-мерные двоичные векторы принимают значения x и y соответственно, где

$$x = (x_1, \dots, x_n), \qquad y = (y_1, \dots, y_n),$$

$x, y \in V_n$, V_n — n-мерное векторное пространство над полем $GF(2)$.

Выражение $\vartheta(\rho) = \vartheta(\rho_t^{(n)}) \equiv \varepsilon$ будет означать, что все компоненты n-мерного двоичного вектора $\vartheta(\rho)$ равны $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

3. Перейдем к точным формулировкам. Всюду в дальнейшем будем считать выполненными три следующих условия.

Условие C1. Ненаблюдаемая детерминированная последовательность $\{\vartheta_t\}$ такова, что в ней содержатся хотя бы одна серия из R подряд идущих нулей и хотя бы одна серия из R подряд идущих единиц, где параметр R — некоторое фиксированное натуральное число, то есть

$$\exists t \exists \nu [(\vartheta(\rho_t^{(R)}) \equiv 0) \wedge (\vartheta(\rho_\nu^{(R)}) \equiv 1].$$

Замечание 1. При условии C1 детерминированная последовательность $\{\vartheta_t\}$, рассматриваемая как случайная последовательность, является нестационарной в том смысле, что не состоит только из нулей или только из единиц.

Условие C2. Распределение n-мерных случайных двоичных векторов $\xi(\rho_t^{(n)})$ при любом n, не превосходящем некоторого фиксированного натурального числа M, стационарно, то есть не зависит от параметра t при $1 \leqslant n \leqslant M$:

$$P_t^{(n)}(x) = \mathsf{P}\{\xi(\rho_t^{(n)}) = x\} = \mathsf{P}\{\xi(\rho_1^{(n)}) = x\} = p^{(n)}(x),$$
$$\sum_{x \in V_n} p^{(n)}(x) = 1, \qquad t = 1, \dots, N-n+1, \quad n = 1, \dots, M. \tag{5}$$

Последовательность (2) и n-мерное распределение вероятностей (5) при этом будем называть M-стационарными.

Замечание 2. Если не оговорено противное, распределение вероятностей (5) будем считать известным.

Условие C3. Размер окна $\rho_t^{(n)}$ удовлетворяет неравенствам

$$1 \leqslant n \leqslant \min(R, M).$$

Определение 1. Коэффициентом инверсной асимметрии n-мерного M-стационарного распределения вероятностей $\{p_t^{(n)}(x)\}$ называется величина

$$\lambda_p^{(n)} = \lambda(\{p^{(n)}(x)\}) = \frac{1}{2} \sum_{x \in V_n} |p^{(n)}(\bar{x}) - p^{(n)}(x)|, \tag{6}$$

где $\bar{x} = (x_1 \oplus 1, \dots, x_n \oplus 1)$.

Замечание 3. Нетрудно показать, что $0 \leqslant \lambda_p^{(n)} \leqslant 1$ и $\lambda_p^{(n)}$ является неубывающей функцией n. Покажем, что

$$\lambda_p^{(n)} \leqslant \lambda_p^{(s)}, \qquad 1 \leqslant n < s \leqslant M. \tag{7}$$

В силу (6)

$$0 \leqslant \lambda_p^{(n)} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{x \in V_n} p^{(n)}(\bar{x}) + \frac{1}{2} \sum_{x \in V_n} p^{(n)}(x) = 1.$$

Очевидно, что для доказательства неравенства (7) достаточно показать, что оно справедливо при $s = n+1$. Вводя обозначения

$$X = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x, x_{n+1})$$

и, по аналогии с (5),

$$\mathsf{P}\{\xi(\rho_1^{(n+1)} = X\} = p^{(n+1)}(X) = p^{(n+1)}(x, x_{n+1})$$

и учитывая, что

$$p^{(n)}(\bar{x}) = p^{(n+1)}(\bar{x}, 0) + p^{(n+1)}(\bar{x}, 1),$$
$$p^{(n)}(x) = p^{(n+1)}(x, 0) + p^{(n+1)}(x, 1),$$

из (6) получаем, что

$$\begin{aligned}
\lambda_p^{(n)} &= \lambda(\{p^{(n)}(x)\}) = \frac{1}{2}\sum_{x\in V_n} |p^{(n)}(\bar{x}) - p^{(n)}(x)| \\
&= \frac{1}{2}\sum_{x\in V_n} |p^{(n+1)}(\bar{x},0) - p^{(n+1)}(x,1)p^{(n+1)}(\bar{x},1) - p^{(n+1)}(x,0)| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\sum_{x\in V_n} |p^{(n+1)}(\bar{x},0) - p^{(n+1)}(x,1)|\frac{1}{2}\sum_{x\in V_n} |p^{(n+1)}(\bar{x},1) - p^{(n+1)}(x,0)| \\
&= \frac{1}{2}\sum_{X\in V_{n+1}} |p^{(n+1)}(\bar{X}) - p^{(n+1)}(X)| \\
&= \lambda(\{p^{(n+1)}(X)\}) = \lambda_p^{(n+1)}.
\end{aligned}$$

Замечание 4. Если $\lambda_p^{(n)} > 0$ при некотором n, то в силу (1) и замечания 1 наблюдаемая двоичная последовательность $\{\eta_t\}$ будет также нестационарна.

Определение 2. Фильтром с окном $\rho = \rho_t^{(n)}$ называется произвольная n-местная двоичная функция

$$w(x) = w(x_1, \dots, x_n), \tag{8}$$

множество истинности которой мы будем обозначать

$$W_n = \{x\colon w(x) = 1, x \in V_n\} \tag{9}$$

и аргументами которой для любого $t = 1, \dots, N - n + 1$ являются компоненты двоичного вектора $\eta(\rho_t^{(n)})$, определенного в (4).

Фильтрацией наблюдаемой двоичной последовательности называется процесс последовательного нахождения значений функции $w(x)$

$$w_t = w(\eta(\rho_t^{(n)})) = w(\eta_t, \dots, \eta_{t+n-1}), \qquad t = 1, \dots, N - n + 1. \tag{10}$$

Двоичная последовательность $\{w_t\}$ называется отфильтрованной последовательностью и принимается в качестве оценки ненаблюдаемой двоичной последовательности $\{\vartheta_t\}$.

По аналогии с традиционной задачей фильтрации величину w_t следовало бы принять в качестве оценки величины ϑ_{t+n-1}, однако, поскольку в рассматриваемом случае с равным основанием w_t можно считать оценкой любого из знаков $\vartheta_t, \dots, \vartheta_{t+n-1}$, мы будем полагать w_t оценкой величины ϑ_t.

4. Введем параметр, характеризующий качество фильтра $w(x)$ и отфильтрованной последовательности $\{w_t\}$. Из (1) и условий C1, C2 и C3 получаем, что

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\{w_t = w(\eta(\rho_t^{(n)})) = 1 \mid \vartheta(\rho_t^{(n)}) \equiv 1\} &= \mathsf{P}\{w(\bar{\xi}(\rho)) = 1\} \\
&= \sum_{x\in W_n} p^{(n)}(\bar{x}) = \sum_{x\in V_n} w(x)p^{(n)}(\bar{x}), \\
\mathsf{P}\{w_\nu = w(\rho_\nu^{(n)})) = 1 \mid \vartheta(\rho_\nu^{(n)}) \equiv 0\} &= \mathsf{P}\{w(\xi(\rho)) = 1\} \\
&= \sum_{x\in W_n} p^{(n)}(x) = \sum_{x\in V_n} w(x)p^{(n)}(x),
\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\xi(\rho) = (\xi_1, \dots, \xi_n), \qquad \bar{\xi}(\rho) = (\xi_1 \oplus 1, \dots, \dots, \xi_n \oplus 1),$$

$p^{(n)}(x)$ и W_n определены в (5) и (9) соответственно. Отсюда следует, что в наших условиях для разности вероятностей (11), которую мы обозначим $\mu^{(n)}(w,\rho)$, справедливы равенства

$$\begin{aligned}
\mu^{(n)}(w,\rho) &= \mathbf{P}\{w_t = w(\eta(\rho_t^{(n)})) = 1 \mid \vartheta(\rho_t^{(n)}) \equiv 1\} \\
&\quad - \mathbf{P}\{w_\nu = w(\eta(\rho_\nu^{(n)})) = 1 \mid \vartheta(\rho_\nu^{(n)}) \equiv 0\} \\
&= \sum_{x \in W_n} p^{(n)}(\bar{x}) - \sum_{x \in W_n} p^{(n)}(x) = \sum_{x \in W_n} (p^{(n)}(\bar{x}) - p^{(n)}(x)) \\
&= \sum_{x \in V_n} w(x)(p^{(n)}(\bar{x}) - p^{(n)}(x)).
\end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, величина $\mu^{(n)}(w,\rho)$ зависит только от фильтра $w(x)$ и распределения вероятностей $\{p^{(n)}(x)\}$ и не зависит от значений дискретного параметра t и ν.

Определение 3. Мерой контрастности фильтра $w(x)$ с окном $\rho = \rho_t^{(n)}$ и мерой контрастности отфильтрованного этим фильтром последовательности $\{w_t\}$ называется величина

$$m_k^{(n)}(w,\rho) = |\mu^{(n)}(w,\rho)|, \tag{13}$$

где $\mu^{(n)}(w,\rho)$ задается равенствами (12).

Замечание 5. Таким образом, параметром, характеризующим фильтр $w(x)$ и отфильтрованную последовательность $\{w_t\}$, нами выбрана абсолютная величина разности между вероятностью появления единицы в двоичной последовательности $\{w_t\}$ на фоне серии единиц в ненаблюдаемой двоичной последовательности $\{\vartheta_t\}$ и вероятностью появления единицы в последовательности $\{w_t\}$ на фоне серии нулей в последовательности $\{\vartheta_t\}$. Обоснование термина мера контрастности и ряда других вводимых ниже терминов будет дано в п. 8.

Замечание 6. Если фильтр $w(x)$ с окном $\rho = \rho_t^{(n)}$ таков, что $n-1$ последних переменных являются фиктивными и

$$w(x) = w'(x) \equiv x_1,$$

то выражение (13) примет вид

$$m_k^{(n)}(w',\rho) = |\mathbf{P}\{\eta_t = 1 \mid \vartheta(\rho_t^{(n)}) \equiv 1\} - \mathbf{P}\{\eta_\nu = 1 \mid \vartheta(\rho_t^{(n)}) \equiv 0\}| \tag{14}$$

и в силу определения 3 и замечания 5 может служить мерой контрастности наблюдаемой двоичной последовательности $\{\eta_t\}$. Если, к тому же, последовательность $\{\xi_t\}$ такова, что $\xi_t = 0$, $t = 1, \dots, N$, то выражение (14), которое в силу условия С1 в этом случае будет равно 1, можно понимать как меру контрастности ненаблюдаемой двоичной детерминированной последовательности $\{\vartheta_t\}$.

5. Перейдем теперь к нахождению оптимального фильтра. В наших условиях среди всех фильтров с окном заданного размера n (n-местных двоичных функций) найдем такой фильтр $w^*(x)$, для которого мера контрастности $m_k^{(n)}(w^*, \rho)$ наибольшая. Такова строгая постановка задачи дискретной оптимальной фильтрации, изложенной в п. 1.

Определение 4. Фильтр $w^*(x)$ с окном $\rho = \rho_t^{(n)}$ называется оптимальным, если его мера контрастности $m_k^{(n)}(w^*, \rho)$ не меньше меры контрастности $m_k^{(n)}$ любого другого фильтра $w(x)$ с тем же окном $\rho = \rho_t^{(n)}$, то есть

$$m_k^{(n)}(w^*, \rho) \geqslant m_k^{(n)}(w, \rho). \tag{15}$$

Существование оптимального фильтра следует из конечности множества n-местных двоичных функций.

Введем еще несколько терминов, с помощью которых будет удобно сформулировать основную теорему.

Определение 5. Фильтр $w(x)$ с окном $\rho = \rho_t^{(n)}$ и отфильтрованная этим фильтром последовательность $\{w_t\}$, определяемая (10), называются позитивными (негативными, неконтрастными), если величина $\mu^{(n)}(w, \rho)$, задаваемая формулой (12), положительна (отрицательна, равна нулю).

Замечание 7. В силу (12) и (13) всякому позитивному (негативному, неконтрастному) фильтру с окном $\rho = \rho_t^{(n)}$ соответствует негативный (позитивный, неконтрастный) фильтр $\bar{w}(x) = w(x) \oplus 1$ с тем же окном и той же мерой контрастности (13).

Сформулируем и докажем основную теорему, задающую оптимальный фильтр.

Теорема 1. *Пусть ненаблюдаемая детерминированная двоичная последовательность $\{\vartheta_t\}$ с параметром R (условие* C1*) и наблюдаемая двоичная последовательность $\{\eta_t\}$ связаны соотношением* (1), *то есть*

$$\eta_t = \vartheta_t \oplus \xi_t, \qquad t = 1, \dots, N,$$

где $\{\xi_t\}$ — M-стационарная двоичная последовательность (условие C2*) с заданным n-мерным распределением вероятностей* (5), *где $1 \leqslant n \leqslant \min(R, M)$ (условие* C3*).*

Тогда самодвойственная n-местная двоичная функция

$$w^*(x) = \begin{cases} 1, & x \in W_n^*, \\ 0, & x \notin W_n^*, \end{cases} \tag{16}$$

множество истинности которой

$$W_n^* = \{x\colon p^{(n)}(\bar{x}) > p^{(n)}(x), x \in V_n\} \cup \{x\colon x_1 = 0, p^{(n)}(\bar{x}) = p^{(n)}(x), x \in V_n\}, \tag{17}$$

где $p^{(n)}(x)$ определено в (5),

$$x = (x_1, \dots, x_n), \qquad \bar{x} = (x_1 \oplus 1, \dots, x_n \oplus 1),$$

$x \in V_n$, V_n — n-мерное векторное пространство над полем $GF(2)$, является оптимальным (определение 4) позитивным или неконтрастным (определение 5) фильтром с окном $\rho = \rho_t^{(n)}$.

При этом мера контрастности оптимального фильтра $w^*(x)$ и мера контрастности отфильтрованной этим фильтром последовательности

$$\{w_t^* = w^*(\eta(\rho_t^{(n)}))\}, \qquad t = 1, \ldots, N-n+1,$$

(определение 2) равны коэффициенту инверсной асимметрии $\lambda_\rho^{(n)}$ (определение 1) M-стационарного распределения вероятностей (5):

$$\begin{aligned} m_k^{(n)}(w^*, \rho) &= \sum_{x \in W_n^*} (p^{(n)}(\bar{x}) - p^{(n)}(x)) = \sum_{x \in V_n} w^*(x)(p^{(n)}(\bar{x}) - p^{(n)}(x)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in V_n} |p^{(n)}(\bar{x}) - p^{(n)}(x)| = \lambda_p^{(n)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Доказательство. Соотношение (18) для фильтра $w^*(x)$ с окном $\rho = \rho_t^{(n)}$ сразу следует из (11), (12), (13) и (17). Отсюда следует также, что фильтр (16) является позитивным или (если $\lambda_\rho^{(n)} = 0$) неконтрастным.

Проверим выполнение неравенства (15) для фильтра (16) и произвольного фильтра $w(x)$ с тем же окном $\rho = \rho_t^{(n)}$.

В силу определения 4 и замечания 7 неравенство (15) будет выполнено для любого фильтра $w(x)$, если оно справедливо для любого позитивного фильтра с тем же окном ρ.

Для произвольного позитивного фильтра $w(x)$ с множеством истинности W_n в силу (12)

$$\begin{aligned} m_k^{(n)}(w, \rho) = \mu^{(n)}(w, \rho) &= \sum_{x \in V_n} w(x)(p^{(n)}(\bar{x}) - p^{(n)}(x)) \\ &= \sum_{x \in W_n} (p^{(n)}(\bar{x}) - p^{(n)}(x)). \end{aligned} \tag{19}$$

Очевидно, что справедливо следующее разбиение множества W_n на два непересекающихся подмножества:

$$W_n = W_n^* W_n \cup (V_n \setminus W_n^*) W_n,$$

где в силу (17)

$$V_n \setminus W_n^* = \{x \colon p^{(n)}(\bar{x}) < p^{(n)}(x), x \in V_n\} \cup \{x \colon x_1 = 1, p^{(n)}(\bar{x}) = p^{(n)}(x), x \in V_n\}.$$

Отсюда и из (18), (17), (19) и соотношений

$$W_n^* W_n \subset W_n^*, \qquad (V_n \setminus W_n^*) W_n \subset V_n \setminus W_n^*$$

следует, что

$$\begin{aligned} m_k^{(n)}(w, \rho) &= \sum_{x \in W_n^* W_n} (p^{(n)}(\bar{x}) - p^{(n)}(x)) + \sum_{x \in (V_n \setminus W_n^*) W_n} (p^{(n)}(\bar{x}) - p^{(n)}(x)) \\ &\leqslant \sum_{x \in W_n^*} (p^{(n)}(\bar{x}) - p^{(n)}(x)) = m_k^{(n)}(w^*, \rho). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если последовательность $\{\xi_t\}$ такова, что для некоторого окна $\rho = \rho_t^{(n)}$ коэффициент инверсной асимметрии $\lambda_\rho^{(n)} = 0$, то мера контрастности любого фильтра с тем же окном равна нулю.*

Замечание 8. Если множество $\{x\colon p^{(n)}(\bar{x}) = p^{(n)}(x)\}$ не пусто, то существует несколько оптимальных позитивных (неконтрастных) фильтров, не обязательно являющихся самодвойственными функциями. Кроме того, согласно замечанию 7, каждому оптимальному позитивному фильтру соответствует оптимальный негативный фильтр.

6. Для некоторого фиксированного окна $\rho = \rho_t^{(n)}$ рассмотрим следующее множество значений дискретного параметра t:

$$T = T(\rho_t^{(n)}) = \{t\colon (\vartheta(\rho_t^{(n)}) \equiv 0) \vee (\vartheta(\rho_n^{(n)}) \equiv 1)\} \tag{20}$$

В силу условий C1 и C3 множество T не пусто.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если условия пункта 1 и условия C1, C2 и C3 выполнены и фильтр $w(x)$ с окном $\rho = \rho_t^{(n)}$ является самодвойственной двоичной функцией, то для значений дискретного параметра $t \in T$ знаки отфильтрованной двоичной последовательности $\{w_t\}$ связаны со знаками ненаблюдаемой двоичной последовательности $\{\vartheta_t\}$ соотношением*

$$w_t = \vartheta_t \oplus \zeta_t,$$

где $\{\zeta_t, t \in T\}$ — двоичные случайные величины, вообще говоря, зависимые, причем

$$\mathsf{P}\{\zeta_t = 0\} = (1 + 2\mu^{(n)}(w,\rho))/2, \qquad \mathsf{P}\{\zeta_t = 1\} = (1 - 2\mu^{(n)}(w,\rho))/2.$$

Множество $T = T(\rho_t^{(n)})$ для выбранного окна задается формулой (20), а величина $\mu^{(n)}(w,\rho)$ формулой (12).

Доказательство следует из (11), (12) и равенства

$$w(\bar{x}) = 1 - w(x),$$

справедливого для самодвойственных двоичных функций.

Следствие 2. *Для оптимального фильтра $w^*(x)$ при $t \in T$ имеет место соотношение*

$$w_t^* = \vartheta_t^* \oplus \zeta_t^*,$$

где $\{w_t^*, t \in T\}$ — знаки отфильтрованной фильтром $w^*(x)$ двоичной последовательности, а $\{\zeta_t^*, t \in T\}$ — двоичные случайные величины, принимающие значения 0 и 1 с вероятностями

$$(1 + \lambda_\rho^{(n)})/2, \qquad (1 - \lambda_\rho^{(n)})/2$$

соответственно, $\lambda_\rho^{(n)}$ — коэффициент инверсной асимметрии, задаваемый формулой (6).

7. Для значений дискретного параметра t, принадлежащих множеству T, процесс фильтрации наблюдаемой двоичной последовательности $\{\eta_t\}$ оптимальным фильтром $w^*(x)$ с окном $\rho = \rho_t^{(n)}$ равносилен применению при каждом таком t статистического критерия для различения по наблюденным n-мерным двоичным векторам $\eta(\rho_t^{(n)})$, составленным из знаков последовательности $\{\eta_t\}$, двух простых гипотез относительно распределения этих векторов:

$$H_0 \colon \mathbf{P}\{\eta(\rho_t^{(n)}) = x\} = \mathbf{P}\{\xi(\rho_t^{(n)}) = x\} = p^{(n)}(x), \qquad x \in V_n,$$

и

$$H_1 \colon \mathbf{P}\{\eta(\rho_t^{(n)}) = x\} = \mathbf{P}\{\bar{\xi}(\rho_t^{(n)}) = x\} = p^{(n)}(\bar{x}), \qquad x \in V_n.$$

При этом критическим множеством критерия является множество истинности W_n^* оптимального фильтра.

Для $t \in T$ распределение вектора $\eta(\rho_t^{n)})$ в силу (1) полностью определяется n-мерным вектором $\vartheta(\rho_t^{(n)})$: гипотеза H_0 имеет место при $\vartheta(\rho_t^{(n)}) \equiv 0$, гипотеза H_1 при $\vartheta(\rho_t^{(n)}) \equiv 1$.

Учитывая (11), нетрудно убедиться, что для значений t из множества T указанный критерий является наиболее мощным критерием для проверки гипотезы H_0 при конкурирующей гипотезе H_1 среди всех критериев, имеющих ошибку первого рода

$$\alpha = \sum_{x \in W_n^*} p^{(n)}(x) = \sum_{x \in V_n} w^*(x) p^{(n)}(x), \tag{21}$$

где $w^*(x)$ и $p^{(n)}(x)$ определены в (16) и (5) соответственно.

Мощность такого критерия равна

$$h = \sum_{x \in W_n^*} p^{(n)}(\bar{x}) = \sum_{x \in V_n} w^*(x) p^{(n)}(x). \tag{22}$$

Из (21), (22) и (18) следует, что коэффициент инверсной асимметрии $\lambda_\rho^{(n)}$ и мера контрастности оптимального фильтра $m_k^{(n)}(w^*, \rho)$ равны разности $h - \alpha$:

$$m_k^{(n)}(w^*, \rho) = \lambda_p^{(n)} = \sum_{x \in V_n} w^*(x)(p^{(n)}(\bar{x}) - p^{(n)}(x)) = h - \alpha.$$

При этом указанный критерий информативен, если $h - \alpha > 0$, то есть если оптимальный фильтр $w^*(x)$ при выбранном окне ρ не является неконтрастным.

8. Рассмотрим примеры применения метода дискретной оптимальной фильтрации для улучшения изображений (по терминологии [1], глава 12), то есть для случая, когда по некоторому каналу связи с помехами передается черно-белое факсимильное или телевизионное изображение, которое на приеме подвергается обработке (в нашем случае дискретной оптимальной фильтрации) с целью улучшения его визуального восприятия.

Предварительно рассмотрим структурную схему одноканальной системы передачи информации в общем виде (см., например, [2]). Такую схему можно представить в виде следующей цепочки:

источник сообщений $\to$ передающее устройство (кодирующее устройство и модулятор) $\to$ линия связи с помехами $\to$ приемное устройство (демодулятор и декодирующее устройство) $\to$ получатель.

Если ненаблюдаемую детерминированную двоичную последовательность $\{\vartheta_t\}$ рассматривать как закодированное сообщение, сформированное кодирующим устройством из некоторого исходного передаваемого сообщения θ, то наблюдаемая последовательность $\{\eta_t\}$ будет представлять собой принятую получателем случайную двоичную последовательность, сформированную декодирующим устройством после демодуляции смеси сигнал+помеха, получившейся в результате прохождения переданного сигнала в линии связи с помехами.

Тогда в предположениях п. 1 случайную двоичную последовательность $\{\xi_t\}$, связанную соотношением $\eta_t = \vartheta_t \oplus \xi_t$ с неизвестным получателю закодированным сообщением $\{\vartheta_t\}$ и принятой получателем последовательностью $\{\eta_t\}$, следует интерпретировать как некоторый шум, отражающий воздействие помех в линии связи: $\xi_t = 0$, когда в момент времени t знак сообщения ϑ_t в линии связи не искажается, и $\xi_t = 1$, когда знак сообщения ϑ_t в линии связи вследствие воздействия помех заменяется на противоположный знак $\vartheta_t \oplus 1$.

В этом случае вместо приведенной выше цепочки
источник сообщений $\to \ldots \to$ получатель
будем иметь следующую упрощенную схему системы передачи информации:
источник сообщений (сообщение θ) $\to$ кодирующее устройство (ненаблюдаемая детерминированная двоичная последовательность $\{\vartheta_t\}$) $\to$ линия связи с помехами (наблюдаемая получателем двоичная последовательность $\{\eta_t = \vartheta_t \oplus \xi_t\}$) $\to$ декодирующее устройство (восстановленное сообщение θ', которое, вообще говоря, отлично от переданного сообщения и которое естественно назвать зашумленным или искаженным сообщением) $\to$ получатель.

Такая схема соответствует стационарному дискретному двоичному симметричному каналу с памятью или без памяти (см. [2], стр. 140–141).

При проведении оптимальной фильтрации в эту схему добавляется еще одно звено: получение из последовательности $\{\eta_t\}$ отфильтрованной оптимальным фильтром $w^*(x)$ последовательности $\{w_t^* = w^*(\eta(\rho_t^{(n)}))\}$, которую декодирующее устройство преобразует в отфильтрованное сообщение θ^*.

В дальнейшем для удобства изложения мы будем отождествлять сообщения θ' и θ^* с последовательностями $\{\eta_t\}$ и $\{w_t^*\}$ соответственно. Кроме того, последовательности $\{\eta_t\}$ и $\{w_t^*\}$ будут рассматриваться то как случайные последовательности, то как выборочные реализации этих последовательностей.

Итак, в нашем случае

θ — фиксированное черно-белое изображение;

ненаблюдаемая двоичная детерминированная последовательность $\{\vartheta_t\}$ — это закодированное изображение (результат кодирования элементов изображения θ при построчной развертке факсимильного сообщения или телевизионного кадра, когда элемент изображения черного цвета кодируется знаком 1, элемент белого цвета знаком 0);

двоичная случайная последовательность $\{\xi_t\}$, определенная в (2), — это шум;

двоичная случайная последовательность $\{\eta_t\}$, определенная в (1), — это принятое получателем закодированное изображение, искаженное помехами в линии свя-

Рис. 1.

зи, которое декодируется, представляется в виде фототелеграфного бланка (или телевизионного кадра), где знаку 1 последовательности $\{\eta_t\}$ соответствует элемент изображения черного цвета, знаку 0 элемент белого цвета, и визуально воспринимается получателем (зашумленнное изображение θ') ;

двоичная случайная последовательность

$$\{w_t^* = w^*(\eta(\rho_t^{(n)}))\},$$

(которая также декодируется, представляется в виде факсимильного сообщения (телевизионного кадра) и визуально воспринимается получателем) — это отфильтрованное изображение θ^*.

Ниже приводятся два конкретных примера передачи исходного черно-белого изображения θ, представляющего собой белую полосу на черном фоне (рис. 1), по некоторому смоделированному на ЭВМ стационарному двоичному симметричному каналу связи с помехами.

Пример 1. В качестве шума $\{\xi_t\}$ используется генерируемая на ЭВМ последовательность независимых двоичных случайных величин (канал без памяти) таких, что

$$\mathsf{P}\{\xi_t = 0\} = (1+\alpha)/2, \qquad \mathsf{P}\{\xi_t = 1) = (1-\alpha)/2,$$

где $0 < \alpha < 1$.

В этом случае в силу теоремы 1 оптимальным фильтром с окном нечетной длины $n = 2k+1$ является так называемый медианный фильтр (см., например, [1], с.342)

$$w^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \|x\| \leqslant k, \\ 1, & \text{если } \|x\| > k, \end{cases} \tag{23}$$

где $\|x\|$ — вес двоичного вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$.

На рис. 2 приведено зашумленное (искаженное) изображение θ', параметр шума $\alpha = 0{,}05$; на рис. 3 приведено отфильтрованное медианным фильтром (23) с окном длины $n = 21$ изображение θ'. Сопоставление рисунков 2 и 3 позволяет сделать вывод, что процедура дискретной оптимальной фильтрации улучшает визуальное восприятие полученного изображения.

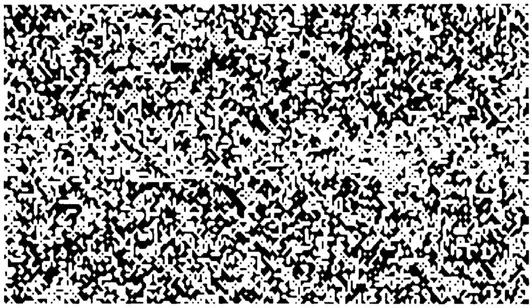

Рис. 2.

Рис. 3.

Пример 2. В качестве шума $\{\xi_t\}$ используется генерируемая на ЭВМ последовательность зависимых двоичных случайных величин, составляющих следующую цепь Маркова. Для некоторого нечетного r строится простая регулярная цепь Маркова, состояниями которой являются $(r-1)$-мерные двоичные векторы

$$\{\xi_t, \xi_{t+1}, \dots, \xi_{t+r-2}\},$$

а переходные вероятности равны

$$\mathsf{P}\{\xi_{t+1} = x_2, \dots, \xi_{t+r-1} = x_r \mid \xi_t = x_1, \dots, \xi_{t+r-2} = x_{r-1}\} = 1/2 + (-1)^{L_r(x)}\delta,$$

где δ, $0 < \delta < 1/2$, — некоторый заданный параметр, а

$$L_r(x) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_r.$$

Нетрудно проверить, что $2^{r-1} \times 2^{r-1}$ матрица переходных вероятностей является дважды стохастической. Если при этом начальное состояние цепи выбирается случайно и равновероятно, то рассматриваемая цепь Маркова стационарна, и при любом t и $s = 0, 1, \dots, r-2$ и любых $x_1, x_2, \dots, x_{s+1}$

$$\mathsf{P}\{\xi_t = x_1, \dots, \xi_{t+s} = x_{s+1}\} = 1/2^{s+1} \tag{24}$$

($(s+1)$-мерные двоичные векторы $\{\xi_t, \dots, \xi_{t+s}\}$ равновероятны), а при $s = r-1$

$$\mathsf{P}\{\xi(\rho_t^{(n)}) = x\} = \mathsf{P}\{\xi_t = x_1, \dots, \xi_{t+r-1} = x_r\} = \frac{1}{2^{r-1}}(1/2 + (-1)^{L_r(x)}\delta).$$

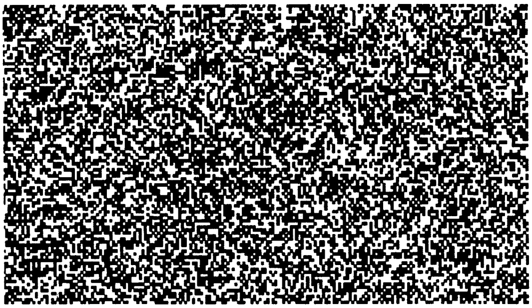

Рис. 4.

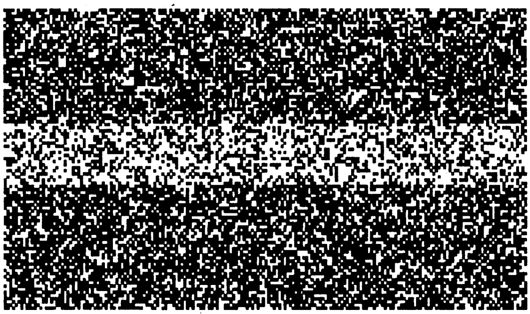

Рис. 5.

В этом случае вследствие теоремы 1 оптимальным фильтром с окном длины $n = r$ является фильтр

$$w^*(x) = L_n(x) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n, \qquad (25)$$

мера контрастности (13) которого равна $\lambda_p^{(n)} = 2\delta$.

На рис. 4 приведено зашумленное (искаженное) изображение θ' при выбранных значениях параметров шума $r = 7$ и $\delta = 0{,}15$, на рис. 5 приведено отфильтрованное фильтром (25) с окном длины $n = r = 7$ изображение θ^*.

Так как в силу (24) для $s = 0$ шум в рассматриваемом примере представляет собой реализацию последовательности равновероятных двоичных зависимых случайных величин, в зашумленном изображении θ' на рис. 4 исходное изображение θ (рис. 1) совершенно не просматривается: мера контрастности (14) зашумленного изображения равна нулю. В то же время процедура дискретной оптимальной фильтрации четко выделяет в отфильтрованном изображении (рис. 5) исходное изображение: мера контрастности (13) отфильтрованного изображения отлична от нуля и равна $\lambda_p^{(7)} = 2\delta = 0{,}3$.

Разумеется, обсуждение вопроса, насколько реальна ситуация примера 2, выходит за рамки настоящей статьи (впрочем, как и обсуждение вопроса, насколько выполнимы вообще условия C1, C2 и C3 в случае передачи черно-белых изображений по реальному каналу связи с помехами). Тем не менее, пример 2 достаточно наглядно демонстрирует возможности метода дискретной оптимальной фильтрации.

После рассмотрении примеров дискретной оптимальной фильтрации черно-белых изображений становится понятным происхождение терминов мера контрастности, позитивный фильтр и т.д., введенных выше.

9. Изложим некоторые соображения по поводу выбора длины окна оптимального фильтра.

Для того, чтобы отфильтрованное изображение имело максимальную меру контрастности, длину окна оптимального фильтра n в силу (18) и (7) следует выбирать наибольшей, при которой еще выполняется условие C3, то есть $n = \min(R, M)$. Однако следует учитывать, что с ростом n уменьшается мощность множества (20), а это, как нетрудно установить, приводит к тому, что в отфильтрованной последовательности $\{w_t^*\}$ не сохраняются относительно небольшие серии единиц и нулей, имевшиеся в ненаблюдаемой последовательности $\{\vartheta_t\}$. Кроме того, с увеличением n границы между соседними большими сериями единиц и нулей становятся все менее четкими.

Так, при дискретной оптимальной фильтрации черно-белых изображений при большом окне фильтра в отфильтрованном изображении будут размываться мелкие детали и границы перехода участков разных цветов исходного изображения. Таким образом, для сохранения достаточной четкости отфильтрованного изображения приходится, уменьшая длину окна фильтра, довольствоваться менее контрастным изображением.

10. Изложенное в п. 5 построение оптимального фильтра для дискретной оптимальной фильтрации было проведено в предположении, что распределение вероятностей $p^{(n)}(x)$ n-мерных случайных двоичных векторов $\xi(\rho_t^{(n)})$ шума $\{\xi_t\}$ известно.

Приведем некоторые (нестрогие) рассуждения о построении оптимального фильтра при неизвестном распределении (5). Для наглядности рассмотрим ситуацию п. 8, когда последовательности $\{\vartheta_t\}$ и $\{\eta_t\}$ представляют исходное и зашумленное черно-белое изображение соответственно.

Если распределение вероятностей (5) неизвестно, то в формуле (17) для множества истинности оптимального фильтра $w^*(x)$ вероятности $p^{(n)}(x)$ следовало бы заменить соответствующими частотами $h_1^{(n)}(x)$ появления двоичных векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ в шуме $\{\xi_t\}$ (в предположении его эргодичности) и получить в результате следующую формулу для множества истинности некоторого фильтра $\hat{w}^*(x)$, который естественно назвать эмпирическим оптимальным фильтром:

$$\hat{W}_n^* = \{x\colon h_1^{(n)}(\bar{x}) > h_1^{(n)}(x), x \in V_n\} \cup \{x\colon x_1 = 0, h_1^{(n)}(\bar{x}) = h_1^{(n)}(x), x \in V_n\}. \qquad (26)$$

Рис. 6.

Такая процедура индуцирует вероятностную меру на множестве всех n-местных двоичных функций (фильтров). Можно ввести расстояние на этом множестве, характеризуя, например, степень близости двух функций расстоянием Хемминга между 2^n-мерными векторами их истинностных значений. Естественно ожидать, что изображения, отфильтрованные близкими в этом смысле фильтрами, зрительно мало отличаются друг от друга.

Эмпирический оптимальный фильтр $\hat{w}^*(x)$ является выборочной оценкой оптимального фильтра $w^*(x)$. В силу статистической устойчивости частот можно ожидать, что множества (26) и (17) мало отличаются друг от друга, так что эмпирический оптимальный фильтр $\hat{w}^*(x)$ и оптимальный фильтр $w^*(x)$ близки, как близки и отфильтрованные этими фильтрами изображения.

Однако в реальной ситуации получателю известны только реализации наблюдаемой последовательности $\{\eta_t = \vartheta_t \oplus \xi_t\}$ (зашумленного изображения θ'), а не шума $\{\xi_t\}$. В этом случае вместо упомянутых выше частот $h_1^{(n)}(x)$ следует найти частоты появления двоичных векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ в зашумленном изображении, которые мы обозначим $h_2^{(n)}(x)$. Очевидно, что если доля элементов черного цвета в исходном изображении далека от половины (что, как правило, соответствует реальной ситуации), то частоты $h_1^{(n)}(x)$ и $h_2^{(n)}(x)$ будут близки. Поэтому множество W_n^*, определяемое формулой (26), и множество $\tilde{W}_n^*$, определяемое соотношением, получающимся из (26) заменой частот $h_1^{(n)}(x)$ частотами $h_2^{(n)}(x)$, будут мало отличаться друг от друга, а значит, и от множества истинности (17) оптимального фильтра с окном той же длины n. Следовательно, эмпирический фильтр $\tilde{w}^*(x)$ с множеством истинности $\tilde{W}_n^*$, эмпирический оптимальный фильтр $\hat{w}^*(x)$ с множеством истинности (26) и оптимальный фильтр $w^*(x)$, будут близки в указанном выше смысле, как и отфильтрованные этими фильтрами изображения.

Изложенные выше рассуждения подтверждает рис. 6, где приведено изображение $\tilde{\theta}^*$, полученное в результате фильтрации зашумленного изображения θ' (см. рис. 4) эмпирическим фильтром $\tilde{w}^*(x)$ с окном длины $n = 7$, построенным по этому же зашумленному изображению. В отфильтрованном изображении достаточно четко выделяется исходное изображение. Более того, в рассмотренном случае отфильтрованное изображение $\tilde{\theta}^*$ (см. рис. 6) и изображение θ^* (см. рис. 5), отфильтрованное фильтром $w^*(x)$ с окном той же длины 7, практически совпадают.

Авторы признательны Б. В. Ермолаеву и А. В. Васильеву, подготовившим первоначальный вариант программной реализации алгоритма дискретной оптимальной фильтрации.

Список литературы

1. Прэтт У. *Цифровая обработка изображений.* т. 2, Мир, Москва, 1982.
2. Дмитриев В. И. *Прикладная теория информации.* Высшая школа, Москва, 1989.

Статья поступила 20.06.1998.