Математические заметки

Том 105 выпуск 4 апрель 2019

УДК 517.983

# Разрешимость операторного уравнения Риккати в фешбаховском случае

**С. Альбеверио, А. К. Мотовилов**

Пусть $L$ – ограниченная блочно-операторная $(2\times 2)$-матрица, блок-компоненты которой на главной диагонали являются самосопряженными операторами. Предполагается, что спектр одной из этих блок-компонент является абсолютно непрерывным и представлен единственной конечной зоной, а спектр другой такой блок-компоненты целиком лежит в этой зоне. Устанавливаются условия, при которых операторная матрица $L$ допускает комплексную деформацию, а операторные уравнения, ассоциированные с продеформированной $L$, обладают ограниченными решениями. Эти условия также гарантируют факторизацию типа Маркуса–Мацаева для одного из исходных дополнений Шура после его аналитического продолжения на нефизические листы комплексной плоскости спектрального параметра. Дается доказательство того, что операторные корни этого дополнения Шура выражаются через соответствующие решения деформированных уравнений Риккати.

Библиография: 38 названий.

**Ключевые слова:** операторное уравнение Риккати, фешбаховский случай, модель Фридрихса, резонанс, нефизический лист.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12061

**1. Введение.** Пусть $L$ – ограниченный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Предположим, что $\mathfrak{H}$ разложено в ортогональную сумму

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_A \oplus \mathfrak{H}_D \tag{1.1}$$

подпространств $\mathfrak{H}_A$ и $\mathfrak{H}_D$. По отношению к разложению (1.1) оператор $L$ записывается как блочная $(2\times 2)$-матрица вида

$$L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

Настоящее исследование было поддержано Программой Гейзенберг–Ландау, Немецким научно-исследовательским обществом (DFG; грант № AL 214/49) и Российским фондом фундаментальных исследований (гранты №№ 15-51-12389, 16-01-00706).

где матричные элементы $A$ и $D$, стоящие на главной диагонали, являются операторами в $\mathfrak{H}_A$ и $\mathfrak{H}_D$ соответственно; оператор $B$ отображает $\mathfrak{H}_D$ в $\mathfrak{H}_A$, а $C$ действует из $\mathfrak{H}_A$ в $\mathfrak{H}_D$. Соотношения

$$XA - DX + XBX = C, \qquad X\colon \mathfrak{H}_A \to \mathfrak{H}_D, \tag{1.3}$$

$$YD - AY + YCY = B, \qquad Y\colon \mathfrak{H}_D \to \mathfrak{H}_A, \tag{1.4}$$

называются *операторными уравнениями Риккати*, ассоциированными с блочно-операторной матрицей $L$.

Как известно (см., например, [1], [2]), ограниченный оператор $X$, действующий из $\mathfrak{H}_A$ в $\mathfrak{H}_D$, является решением уравнения Риккати (1.3), если и только если график $\mathscr{G}(X)$ оператора $X$,

$$\mathscr{G}(X) := \{x \oplus Xx \mid x \in \mathfrak{H}_A\}, \tag{1.5}$$

представляет собой инвариантное подпространство $L$. Аналогично, ограниченный оператор $Y\colon \mathfrak{H}_D \to \mathfrak{H}_A$ – решение уравнения Риккакти (1.4) тогда и только тогда, когда граф-подпространство

$$\mathscr{G}(Y) = \{Yy \oplus y \mid y \in \mathfrak{H}_D\} \tag{1.6}$$

инвариантно относительно $L$. Таким образом проблема существования и единственности решений для операторных уравнений Риккати превращается в важный вопрос для различных разделов математики и физики, связанных с изучением инвариантных подпространств линейных операторов. Здесь следует упомянуть, в частности, давнюю проблему оптимальной оценки на поворот спектрального подпространства самосопряженного оператора под действием аддитивного возмущения, для которой на данный момент получены лишь частные решения (см., например, статьи, в хронологическом порядке, [3]–[5], а также имеющиеся там ссылки). Именно возможность построения приводящих подпространств для квантово-механического гамильтониана в терминах решений операторных уравнений Риккати является основой для известных преобразований Окубо [7] и Фолди–Ваутхойзена [8]. Операторные уравнения Риккати и инвариантные граф-подпространства также тесно связаны с задачей факторизации [9] операторных пучков с резольвентной зависимостью от спектрального параметра (см. [10]–[14]).

Большая часть известных результатов по разрешимости операторных уравнений Риккати (1.3), (1.4) относится к случаю, когда спектры $\sigma_A$ и $\sigma_D$ операторов $A$ и $D$ на главной диагонали (1.2) не пересекаются, т.е.,

$$d := \operatorname{dist}(\sigma_A, \sigma_D) > 0, \tag{1.7}$$

а сама блочно-операторная матрица $L$ является самосопряженной. Полный список работ, затрагивающих вопрос существования решений для уравнений Риккати (1.3), (1.4), ассоциированных с самосопряженными $L$, весьма обширен. Здесь мы ограничиваемся упоминанием лишь публикаций [1]–[5], [11], [12], [14], [15]. Для некоторых специальных случаев взаимного положения (непересекающихся) спектральных множеств $\sigma_A$ и $\sigma_D$ известны даже точные условия на $B$ (и $C = B^*$), гарантирующие разрешимость (1.3), (1.4). Эти специальные случаи отвечают ситуации, когда одно

из спектральных множеств $\sigma_A$ и $\sigma_D$ целиком вкладывается в конечную или бесконечную лакуну другого множества (см. [16], [17]). Оптимальные условия разрешимости сопровождаются точными оценками на норму решения $X$, вытекающими из соответствующих оценок на поворот спектральных подпространств, известных как $\operatorname{tg} 2\Theta$-теорема Дэвиса–Кахана [18] и *априорная* $\operatorname{tg}\Theta$-теорема [19], [20]. Наилучшие известные достаточные условия существования ограниченного решения $X$ для уравнения (1.3) и наилучшая (но все еще не оптимальная) оценка на норму $X$ при наличии единственного спектрального предположения (1.7) вытекают из основного результата работы [5] (ср. с [21]). Ряд результатов о существовании решения (1.3) и оценки на его норму при условии (1.7) в случае $J$-самосопряженной блочно-операторной матрицы $L$ содержится в [22], [23] (см. также [24], [25]). Мы отсылаем читателя к [26] касательно результатов о разрешимости (1.3) в случае, когда хотя бы один из операторов из операторов $A$ и $D$ является нормальным, а спектры $\sigma_A$ и $\sigma_D$ отделены друг от друга. Наконец, в работе [13], опирающейся на понятие квадратичного числового образа, были установлены достаточные условия разрешимости уравнения Риккати (1.3) в более общем несамосопряженном случае.

В статье [27], где рассматривается случай самосопряженных $L$, предположение (1.7) заменяется гипотезой о том, что спектр одного из операторов $A$ и $D$, стоящих на главной диагонали (1.2), частично или полностью лежит на абсолютно непрерывном спектре другого, скажем,

$$\sigma_A \cap \sigma_D^{\mathrm{ac}} \neq \varnothing, \tag{1.8}$$

где обозначение $\sigma_D^{\mathrm{ac}}$ используется для абсолютно непрерывного спектра $D$. Следуя квантово-механической терминологии, мы называем взаимное положение спектров (1.8) *фешбаховским спектральным случаем*, поскольку при включении инфинитезимально малых возмущений $B \neq 0$ (и $C = B^*$) типичной судьбой собственных значений $A$, погруженных в $\sigma_D^{\mathrm{ac}}$, является их превращение в фешбаховские резонансы [28].

Условия на $B$ (а значит, и на $C = B^*$) в [27] выбираются таким образом, что дополнение Шура

$$M_A(z) = A - z - B(D - z)^{-1}C, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_D, \tag{1.9}$$

рассматриваемое как операторно-значная функция переменной $z$, допускает аналитическое продолжение через зоны $\sigma_D^{\mathrm{ac}}$ на некоторые прилегающие области, находящиеся уже на нефизических листах комплексной плоскости $z$. При допущениях, сделанных в [27], было установлено, что аналитически продолженное дополнение Шура (1.9) допускает факторизацию типа Маркуса–Мацаева [9] и, тем самым, оно обладает операторными корнями. Спектр операторного корня $M_A$ наряду с частью обычного спектра операторной матрицы $L$ может включать также некоторое подмножество резонансов $L$. В [29] результаты [27] были обобщены на самосопряженные (а в [30] даже и на несамосопряженные) $L$ с неограниченными $B$ и $C$ из определенного класса. В недавней работе [31] факторизационный подход [27] позволил нам доказать существование ограниченных решений у операторного уравнения Риккати (1.3), ассоциированного с $J$-самосопряженной блочно-операторной матрицей $L$ вида (1.2) в случае $\sigma_A \subset \sigma_D^{\mathrm{ac}}$.

В настоящей работе мы изучаем случай, когда операторы $A$ и $D$ самосопряжены, причем $D$ задан в спектральном представлении. Таким образом, мы принимаем, что $D$ является попросту оператором умножения на независимую переменную. Более того, чтобы обеспечить максимальную прозрачность изложения, мы ограничиваемся рассмотрением ситуации, когда весь спектр $D$ является абсолютно непрерывным и однородным, будучи представлен единственной зоной, т.е.

$$\sigma_D = \sigma_D^{\mathrm{ac}} = [\alpha, \beta], \quad \sigma_A \subset (\alpha, \beta), \qquad -\infty < \alpha < \beta < \infty.$$

Таким образом, исследуемый нами оператор $L$ представляет собой не что иное, как расширение известной $(2 \times 2)$-операторно-матричной модели Фридрихса, обсуждаемой [32; § 6]. Дополнительно мы предполагаем, что блок-компоненты $B$ и $C$ задаются посредством оператор-функций $\mathfrak{b}(\lambda)$ и $\mathfrak{c}(\lambda)$ переменной $\lambda \in (\alpha, \beta)$, которые обе вещественно-аналитичны и допускают аналитическое продолжение на некоторую область $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}$ (подробности см. ниже в п. 4). Это позволяет проводить *комплексную деформацию* оператора $L$. Последняя вовлекает, в частности, замену исходной блок-компоненты $D$ оператором $D_\Gamma$ умножения на независимую переменную $\lambda$, пробегающую кусочно-гладкий жорданов контур $\Gamma$, получаемый путем непрерывной деформации интервала $(\alpha, \beta)$ и лежащий в $\mathscr{D}$. Для комплексно деформированных операторов $B$ и $C$ мы используем соответствующие обозначения $B_\Gamma$ и $C_\Gamma$. Отметим, что в случае малочастичных гамильтонианов, заданных в импульсном представлении, подход, применяемый нами к $L$, известен под названием *метода деформации контура* (contour deformation method) (см., например, статью [33] и содержащиеся в ней ссылки). Вариант этого метода, приводящий к вращению компонент непрерывного спектра гамильтониана в $\mathbb{C}$ вокруг соответствующих порогов, широко известен как *комплексный скейлинг*. Метод комплексного скейлинга используется и в импульсном, и в координатном представлениях (см. [34]–[36]).

Комплексная деформация матрицы $L$ приводит к *комплексно деформированным* уравнениям Риккати (1.3), (1.4), в которых присутствует исходный оператор $A$, однако операторы $B$, $C$ и $D$ заменяются соответствующими деформированными операторами $B_\Gamma$, $C_\Gamma$, и $D_\Gamma$. Комплексно деформированная компонента $D_\Gamma$ – нормальный оператор, спектр которого $\sigma_{D_\Gamma} = \overline{\Gamma}$ оказывается отделенным от спектра $\sigma_A$ при подходящем выборе контура $\Gamma$. В таком случае к деформированным уравнениям Риккати можно применить уже упоминавшийся метод [26], работающий при условии разделения спектральных компонент (1.7). Таким способом мы, в частности, доказываем, что операторные корни продолженного дополнения Шура (1.9) допускают явное выражение в терминах решений $X_\Gamma$ комплексно деформированного уравнения Риккати (1.3).

Статья организована следующим образом. В п. 2 мы собираем необходимые сведения, касающиеся существования и свойств решений уравнений Риккати (1.3), (1.4), с акцентом на случай, когда, по крайней мере, один из операторов $A$ и $D$ – нормальный. В п. 3 представляем версию результатов [27], адаптированную к рассматриваемому нами случаю $\sigma_A \subset \sigma_D^{\mathrm{ac}}$. В отличие от [27], однако, мы не накладываем требования $C = B^*$. В числе прочего в этом пункте описываются условия, гарантирующие существование операторных корней аналитически продолженного дополнения

Шура (1.9). Наконец, в п. 4 мы вводим расширение $(2\times 2)$-блочно-матричной модели Фридрихса из [32; § 6] и рассматриваем ее вариант, позволяющий комплексную деформацию. Предполагая существование кусочно-гладкого жорданова контура $\Gamma$ такого, что $\Gamma\setminus\{\alpha,\beta\}\subset\mathscr{D}\cap\mathbb{C}^{\pm}$, а нормы[1] $\|B_\Gamma\|_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}}$ и $\|C_\Gamma\|_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}}$ деформированных операторов $B_\Gamma$ и $C_\Gamma$ по отношению к спектральной мере нормального оператора $D_\Gamma$ подчиняются условию

$$\sqrt{\|B_\Gamma\|_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}}\|C_\Gamma\|_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}}}<\frac{1}{2}\operatorname{dist}(\sigma_A,\Gamma). \tag{1.10}$$

Это условие гарантирует существование ограниченных решений $X_\Gamma$ и $Y_\Gamma$ у комплексно деформированных уравнений Риккати (1.3) и (1.4) (см. теорему 4). Операторные корни аналитически продолженного дополнения Шура (1.9) являются не чем иным, как операторами $Z_A=A+B_\Gamma X_\Gamma$. При условии (1.10) эти операторы зависят от знака $\mathfrak{s}=\pm$ индекса полуплоскости $\mathbb{C}^{\mathfrak{s}}$, но не зависят от (формы) контура $\Gamma\subset\mathscr{D}\cap(\mathbb{C}^{\mathfrak{s}}\cup\mathbb{R})$. Решения $X_\Gamma$ и $Y_\Gamma$ обладают свойством $\|X_\Gamma Y_\Gamma\|<1$, обеспечивающим блочную диагонализуемость комплексно деформированной операторной матрицы $L_\Gamma$ (см. следствие 3).

Следующие обозначения используются на протяжении всей статьи. Под подпространством гильбертова пространства всегда подразумевается его замкнутое линейное подмножество. Тождественный оператор обозначается $I$. Банахово пространство ограниченных линейных операторов из гильбертова пространства $\mathfrak{L}$ в гильбертово пространство $\mathfrak{M}$ обозначаем через $\mathscr{B}(\mathfrak{L},\mathfrak{M})$ и через $\mathscr{B}(\mathfrak{L})$, если $\mathfrak{L}=\mathfrak{M}$. Через $\sigma_S$ мы обозначаем спектр оператора $S\in\mathscr{B}(\mathfrak{M})$. Обозначение $\mathsf{E}_T(\delta)$ используется для спектрального проектора нормального оператора $T$, отвечающего борелевскому множеству $\delta\subset\mathbb{C}$. В частном случае, когда $T$ – самосопряженный, мы имеем $\delta\subset\mathbb{R}$. Через $\overline{\delta}$ обозначается замыкание произвольного $\delta\subset\mathbb{C}$. Под $\mathscr{O}_r(\delta)$, $r>0$, понимается открытая $r$-окрестность $\delta$ в $\mathbb{C}$,

$$\mathscr{O}_r(\delta)=\{z\in\mathbb{C}\mid\operatorname{dist}(z,\delta)<r\}.$$

Через $\mathbb{C}^+$ и $\mathbb{C}^-$ обозначаются соответственно верхняя и нижняя полуплоскости комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (с исключенной вещественной осью), т.е.,

$$\mathbb{C}^{\pm}=\{z\in\mathbb{C}\mid\pm\operatorname{Im}z>0\}.$$

**2. Предварительные сведения.** Предположим, что ограниченные операторы $X\in\mathscr{B}(\mathfrak{H}_A,\mathfrak{H}_D)$ и $Y\in\mathscr{B}(\mathfrak{H}_D,\mathfrak{H}_A)$ являются решениями уравнений Риккати (1.3) и (1.4) соответственно. Операторы

$$Z_A=A+BX, \tag{2.1}$$
$$Z_D=D+CY, \tag{2.2}$$
$$\widetilde{Z}_A=A-YC, \tag{2.3}$$
$$\widetilde{Z}_D=D-XB \tag{2.4}$$

[1] См. ниже определение 1 для нормы ограниченного оператора по отношению к спектральной мере нормального оператора.

играют выдающуюся роль в спектральной теории блочно-операторных матриц вида (1.2) и связанных с ними операторных пучков. Это относится, в частности, к дополнениям Шура $M_A$ и $M_D$, отвечающим матрице $L$, $M_A(z)$ определено в (1.9), а

$$M_D(z) = D - z - C(A-z)^{-1}B, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_A. \tag{2.5}$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующих тождеств:

$$\begin{aligned} M_A(z) &= W_A(z)(Z_A - z), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_D, \\ M_D(z) &= W_D(z)(Z_D - z), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_A, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где $Z_A$ и $Z_D$ – операторы (2.1) и (2.2) соответственно; оператор-функции $W_A$ и $W_D$ задаются явными выражениями

$$\begin{aligned} W_A(z) &= I - B(D-z)^{-1}X, \\ W_D(z) &= I - C(A-z)^{-1}Y. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} M_A(z) &= (\widetilde{Z}_A - z)\widetilde{W}_A(z), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_D, \\ M_D(z) &= (\widetilde{Z}_D - z)\widetilde{W}_D(z), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_A \end{aligned} \tag{2.8}$$

где $\widetilde{Z}_A$ и $\widetilde{Z}_A$ определяются (2.3) и (2.4), а

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_A(z) &= I + Y(D-z)^{-1}C, \\ \widetilde{W}_D(z) &= I + X(A-z)^{-1}B. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Если оказывается так, что

$$1 \notin \operatorname{spec}(XY) \qquad \text{или, что равносильно,} \quad 1 \notin \operatorname{spec}(YX) \tag{2.10}$$

(см., например, [37; теорема 1.1]), то внедиагональная блочно-операторная матрица

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ X & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

образованная из решений $X$ и $Y$, позволяет осуществить преобразование подобия, приводящее $L$ к блочно-диагональному виду. При этом используются либо пара операторов (2.1), (2.2), либо пара операторов (2.3), (2.4). А именно,

$$L = (I+Q)\begin{pmatrix} Z_A & 0 \\ 0 & Z_D \end{pmatrix}(I+Q)^{-1} = (I-Q)^{-1}\begin{pmatrix} \widetilde{Z}_A & 0 \\ 0 & \widetilde{Z}_D \end{pmatrix}(I-Q), \tag{2.12}$$

При условии (2.10) из (2.12) следует, что операторы $Z_A$ и $\widetilde{Z}_A$ подобны друг другу, как, впрочем, и операторы $Z_D$ и $\widetilde{Z}_D$. Точнее,

$$\widetilde{Z}_A = (I - YX)Z_A(I - YX)^{-1}, \tag{2.13}$$

$$\widetilde{Z}_D = (I - XY)Z_D(I - XY)^{-1}. \tag{2.14}$$

Если оператор $D$ нормальный и его спектр не пересекается со спектром $Z_A$, то решение $X$ допускает интегральное представление

$$X = \int_{\sigma_D} \mathsf{E}_D(d\mu) C (Z_A - \mu)^{-1}, \tag{2.15}$$

где $\mathsf{E}_D$ – спектральная мера $D$. (По поводу определения интеграла по спектральной мере $\mathsf{E}_D$ и доказательства (2.15) см. [26]). Представление (2.15), переписанное в виде

$$X = \int_{\sigma_D} \mathsf{E}_D(d\mu) C (A + BX - \mu)^{-1}, \tag{2.16}$$

можно рассматривать как еще одно уравнение для поиска $X$. Подобным образом в случае, когда друг от друга отделены спектры $D$ и $\widetilde{Z}_A = A - YC$, оператор $Y$ является решением "интегрального" уравнения

$$Y = -\int_{\sigma_D} (A - YC - \mu)^{-1} B \, \mathsf{E}_D(d\mu). \tag{2.17}$$

Отметим, что (2.15) позволяет записать оператор-функцию $W_A(z)$ в (2.7) в следующем виде:

$$W_A(z) = I - \int_{\sigma_D} B \, \mathsf{E}_D(d\mu) C \frac{1}{\mu - z} (Z_A - \mu)^{-1}. \tag{2.18}$$

В статье [27] введено понятие нормы ограниченного оператора по отношению к спектральной мере самосопряженного оператора. В [26] это понятие распространено на спектральную меру нормального оператора. Норма оператора относительно спектральной меры оказалась весьма полезным средством исследования операторных уравнений Сильвестра и Риккати (см. [1] и [26]). Мы напоминаем здесь определение этой нормы, имея в виду ее применение к анализу уравнений (2.16) и (2.17).

Определение 1. Пусть $S \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_A, \mathfrak{H}_D)$ – ограниченный оператор из гильбертова пространства $\mathfrak{H}_A$ в гильбертово пространство $\mathfrak{H}_D$, и пусть оператор $D \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_D)$ нормальный. Введем величину

$$\|S\|_{\mathsf{E}_D} = \left( \sup_{\{\delta_j\}} \sum_j \|S^* \mathsf{E}_D(\delta_j) S\| \right)^{1/2}, \tag{2.19}$$

где супремум берется по конечным или счетным системам взаимно непересекающихся борелевских подмножеств $\delta_j$ спектра $\sigma_D$ оператора $D$, $\delta_j \cap \delta_k = \varnothing$, если $j \neq k$. Число $\|S\|_{\mathsf{E}_D}$ называется *нормой оператора $S$ по отношению к спектральной мере $\mathsf{E}_D$ оператора $D$* или, короче, *$\mathsf{E}_D$-нормой $S$*. Для $T \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_D, \mathfrak{H}_A)$ величина $E$-нормы $\|T\|_{\mathsf{E}_D}$ вводится равенством

$$\|T\|_{\mathsf{E}_D} := \|T^*\|_{\mathsf{E}_D}.$$

Замечание 1. Очевидно, определение 1 подразумевает, что

$$\|S\| \leqslant \|S\|_{\mathsf{E}_D} \qquad \text{и} \qquad \|T\| \leqslant \|T\|_{\mathsf{E}_D}. \tag{2.20}$$

В случае, когда оба оператора $A$ и $D$ – нормальные, можно доказать существование неподвижных точек у отображений в правых частях (2.16) и (2.17) при условии известной малости операторов $B$ и $C$, вовлекающем $\mathsf{E}_D$-нормы $B$ или $C$ (см. [26]; более ранние результаты в случае самосопряженных $A$ и/или $D$ см. в [1], [11], [15]).

Замечание 2. В случае $B = 0$ уравнение Риккати (1.3) переходит в линейное уравнение

$$XA - DX = C, \qquad X \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_A, \mathfrak{H}_D), \tag{2.21}$$

называемое *уравнением Сильвестра*. Аналогично, при $C = 0$ уравнение Риккати (1.4) превращается в уравнение Сильвестра

$$YD - AY = B, \qquad Y \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_D, \mathfrak{H}_A). \tag{2.22}$$

Если $D$ является нормальным оператором и $\sigma_A \cap \sigma_D = \varnothing$, то единственные ограниченные решения $X$ и $Y$ для уравнений Сильвестра (2.21) и (2.22) соответственно даются интегралами по спектральной мере $\mathsf{E}_D$:

$$\begin{aligned} X &= \int_{\sigma_D} \mathsf{E}_D(d\mu)\, C(D-\mu)^{-1}, \\ Y &= -\int_{\sigma_D} (A-\mu)^{-1} B\, \mathsf{E}_D(d\mu) \end{aligned} \tag{2.23}$$

(ср. с (2.15) и (2.17); см. [26; теорема 4.5]).

Следующее утверждение представляет собой частный случай теоремы 5.7 из [26].

Теорема 1. *Пусть оба оператора $A \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_A)$ и $D \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_D)$ в (1.3) – нормальные. Предположим, что $0 \neq B \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_A, \mathfrak{H}_D)$ и*

$$d = \operatorname{dist}(\sigma_A, \sigma_D) > 0. \tag{2.24}$$

*Кроме того, будем полагать, что оператор $C \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_D, \mathfrak{H}_A)$ имеет конечную $\mathsf{E}_D$-норму и*

$$\sqrt{\|B\|\|C\|_{\mathsf{E}_D}} < \frac{d}{2}. \tag{2.25}$$

*Тогда в шаре*

$$\{T \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_A, \mathfrak{H}_D) \mid \|T\| < \|B\|^{-1}(d - \sqrt{\|B\|\|C\|_{\mathsf{E}_D}})\} \tag{2.26}$$

*у уравнения Риккати (1.3) имеется решение $X$, причем только одно. Более того, это решение имеет конечную $\mathsf{E}_D$-норму, подчиняющуюся оценке*

$$\|X\|_{\mathsf{E}_D} \leqslant \frac{1}{\|B\|}\left(\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \|B\|\|C\|_{\mathsf{E}_D}}\right). \tag{2.27}$$

Аналогичное утверждение справедливо и в отношении уравнения Риккати (1.4).

Теорема 2. *Предположим, что оба оператора $A \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_A)$ и $D \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_D)$ в (1.4) нормальные. Предположим также, что $0 \neq C \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_D, \mathfrak{H}_A)$ и выполняется условие (2.24). Кроме того, будем считать, что оператор $B \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_A, \mathfrak{H}_D)$ имеет конечную $\mathsf{E}_D$-норму и*

$$\sqrt{\|B\|_{\mathsf{E}_D}\|C\|} < \frac{d}{2}. \tag{2.28}$$

*Тогда шар*

$$\{S \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_D, \mathfrak{H}_A) \mid \|S\| < \|C\|^{-1}(d - \sqrt{\|B\|_{\mathsf{E}_D}\|C\|}\,)\} \tag{2.29}$$

*содержит решение $Y$ уравнения Риккати (1.4), причем только одно. Это решение имеет конечную $\mathsf{E}_D$-норму, удовлетворяющую оценке*

$$\|Y\|_{\mathsf{E}_D} \leqslant \frac{1}{\|C\|}\left(\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \|B\|_{\mathsf{E}_D}\|C\|}\right). \tag{2.30}$$

Следствие 1. *При условии*

$$\sqrt{\|B\|_{\mathsf{E}_D}\|C\|_{\mathsf{E}_D}} < \frac{d}{2} \tag{2.31}$$

*выполняются неравенства*

$$\|X\|_{\mathsf{E}_D}\|Y\|_{\mathsf{E}_D} \leqslant \frac{\|B\|_{\mathsf{E}_D}\|C\|_{\mathsf{E}_D}}{d^2/4} < 1. \tag{2.32}$$

Доказательство. Заметим, что благодаря (2.20) из (2.31) следуют обе оценки (2.25) и (2.28), гарантирующие существование решений $X$ и $Y$, удовлетворяющих соответствующим оценкам (2.27) и (2.30). Для правых частей этих оценок имеем

$$\frac{1}{\|B\|}\left(\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \|B\|\|C\|_{\mathsf{E}_D}}\right) = \frac{\|C\|_{\mathsf{E}_D}}{d/2 + \sqrt{d^2/4 - \|B\|\|C\|_{\mathsf{E}_D}}} < \frac{\|C\|_{\mathsf{E}_D}}{d/2}, \tag{2.33}$$

$$\frac{1}{\|C\|}\left(\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \|B\|_{\mathsf{E}_D}\|C\|}\right) = \frac{\|B\|_{\mathsf{E}_D}}{d/2 + \sqrt{d^2/4 - \|B\|_{\mathsf{E}_D}\|C\|}} < \frac{\|B\|_{\mathsf{E}_D}}{d/2}; \tag{2.34}$$

тогда из (2.27) и (2.30) с учетом (2.31) следует (2.32).

Замечание 3. Ввиду (2.20) из оценки (2.32) следует, что произведения $XY$ и $YX$ являются строгими сжатиями, $\|XY\| < 1$ и $\|YX\| < 1$. Последнее означает, что при условии (2.31) блочно-операторная матрица (1.2) допускает блочную диагонализацию в любой из двух форм (2.12).

Рассмотрим теперь операторы $Z_A$ и $Z_D$, построенные согласно (2.1) и (2.2) с помощью тех единственных решений $X$ и $Y$, о которых говорится в теоремах 1 и 2 соответственно. Легко видеть, что в условиях теоремы 1 оператор-функция $W_A(z)$, задаваемая первым из равенств (2.7), является ограниченно-обратимой и голоморфной по $z$, по крайней мере, на открытой $(d/2)$-окрестности $\mathscr{O}_{d/2}(\sigma_A)$ спектра $\sigma_A$. Из (2.20) и (2.27) следует, что эта окрестность включает в себя весь спектр оператора $Z_A$. Аналогично, в условиях теоремы 2 оператор-функция $W_D(z)$ ограниченно обратима и голоморфна по $z$, по крайней мере, в открытой $(d/2)$-окрестности $\mathscr{O}_{d/2}(\sigma_D)$ спектра $\sigma_D$, содержащей весь спектр оператора $Z_D$. Но тогда факторизация (2.6) означает, что $Z_A$ и $Z_D$ представляют собой не что иное, как *операторные корни* дополнений Шура $M_A(z)$ и $M_D(z)$ в смысле Маркуса-Мацаева [9]. В свою очередь, из (2.6) следует, что

$$\operatorname{spec}(M_A) \cap \mathscr{O}_{d/2}(\sigma_A) = \operatorname{spec}(Z_A), \qquad \operatorname{spec}(M_D) \cap \mathscr{O}_{d/2}(\sigma_A) = \operatorname{spec}(Z_D).$$

Если $X$ и $Y$ снова те единственные решения, о которых говорится в теоремах 1 и 2, то же самое рассмотрение проходит и в случае операторов $\widetilde{Z}_A$ и $\widetilde{Z}_D$, определенных равенствами (2.3) и (2.4) соответственно. Ввиду факторизации (2.8) операторы (2.3) и (2.4) могут быть названы *левыми операторными корнями* дополнений Шура $M_A$ и $M_D$ соответственно (ср. с [30; теорема 4.1]).

**3. Факторизация одного из дополнений Шура в фешбаховском случае.** Всюду далее мы будем полагать, что операторы $A$ и $D$ самосопряженные, причем их спектры пересекаются. Точнее, мы рассматриваем ситуацию, когда, по крайней мере, часть спектра $A$ лежит на абсолютно непрерывном спектре $D$. Имеются примеры (см. [1; замечание 3.9 и лемма 3.10]), показывающие, что в такой спектральной ситуации (обычных) решений у уравнений Риккати может не быть вообще. Тем не менее, и в этом случае можно надеяться на факторизацию типа Маркуса–Мацаева [9] и отыскание операторных корней, по крайней мере, для аналитически продолженных дополнений Шура. Эта идея была впервые доведена до реализации в [27] для самосопряженных операторных матриц (1.2) с ограниченными $B$ (и $C = B^*$). В дальнейшем подход [27] был распространен на самосопряженные (в [29]) и даже несамосопряженные (в [30]) блочно-операторные матрицы $L$ с некоторыми неограниченными блок-компонентами $B$ и $C$.

Для того чтобы напомнить идею подхода [27], перепишем выражение для дополнения Шура (1.9) в терминах спектральной меры $\mathsf{E}_D$ самосопряженного оператора $D$:

$$M_A(z) = A - z - B\int_{\sigma_D} \mathsf{E}_D(d\mu)\frac{1}{\mu - z}C \tag{3.1}$$

$$= A - z - \int_{\mathbb{R}} B\, d\mathsf{E}^D(\mu)C\frac{1}{\mu - z}, \tag{3.2}$$

где $\mathsf{E}^D(\mu) = \mathsf{E}_D((-\infty, \mu))$ – спектральная функция $D$. В [27] (при $C = B^*$) принимается, что операторы $D$ и $B$ таковы, что оператор-функция $M_A(z)$ допускает аналитическое продолжение по $z$ через определенные интервалы из $\sigma_D^{\mathrm{ac}}$ на некоторые области, находящиеся на так называемых *нефизических* листах комплексной плоскости переменной $z$ (см. рис. 1; этот рисунок заимствован из статьи [27], к которой мы отсылаем читателя также по поводу понятия нефизического листа).

Для того, чтобы максимально упростить наше рассмотрение, мы сводим его к случаю, когда весь спектр $D$ представлен единственным конечным сегментом абсолютно непрерывного спектра, т.е.,

$$\sigma_D = \sigma_D^{\mathrm{ac}} = \overline{\Delta}, \tag{3.3}$$

где

$$\Delta = (\alpha, \beta) \qquad \text{при некоторых} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha < \beta, \tag{3.4}$$

и

$$\sigma_A \subset \Delta. \tag{3.5}$$

Основное допущение (см. [27]) состоит в том, что $\mathscr{B}(\mathfrak{H}_A)$-значная функция

$$K(\mu) := B\mathsf{E}^D(\mu)C, \qquad \mu \in \mathbb{R}, \tag{3.6}$$

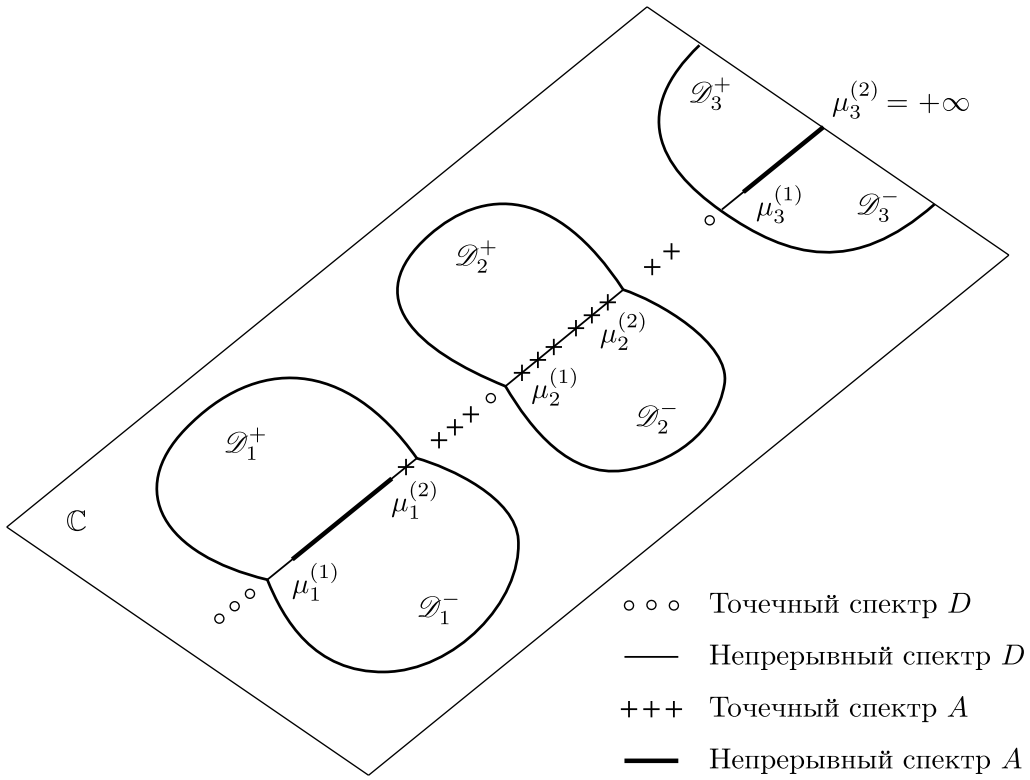


Рис. 1. Пример спектральной ситуации, рассмотривавшейся в [27] и отвечающей случаю, когда самосопряженный оператор $D$ неограничен, а его абсолютно непрерывный спектр состоит из двух конечных непересекающихся зон $[\mu_j^{(1)}, \mu_j^{(2)}]$, $j = 1, 2$, и одной полубесконечной зоны $[\mu_3^{(1)}, +\infty)$. В [27] принимается, что $C = B^*$ и операторы $D$ и $B$ таковы, что дополнение Шура $M_A(z)$ допускает аналитическое продолжение по $z$ через интервалы $(\mu_j^{(1)}, \mu_j^{(2)}) \subset \sigma_D^{\mathrm{ac}}$ на некоторые области $\mathscr{D}_j^{\pm}$ (относящиеся уже к нефизическим листам римановой поверхности $M_A$).

вещественно-аналитична на интервале $\Delta$ и допускает аналитическое продолжение с $\Delta$ на область $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}$. Это допущение подразумевает включение $\Delta \subset \mathscr{D}$. Через $\mathscr{D}^-$ и $\mathscr{D}^+$ мы будем обозначать части[2] области $\mathscr{D}$, находящиеся соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, $\mathscr{D}^{\pm} = \mathscr{D} \cap \mathbb{C}^{\pm}$ (см. рис. 2). Допускается, что производная

$$K'(\mu) = \frac{d}{d\mu} K(\mu), \qquad \mu \in \mathscr{D},$$

имеет слабые сингулярности в точках $\alpha$ и $\beta$, а именно,

$$\|K'(\mu)\| \leqslant c|\mu - \alpha|^{-\nu} \quad \text{для любых } \mu \neq \alpha \text{ в некоторой открытой окрестности } \alpha \text{ в } \mathscr{D}, \tag{3.7a}$$

$$\|K'(\mu)\| \leqslant c|\mu - \beta|^{-\nu} \quad \text{для любых } \mu \neq \beta \text{ в некоторой открытой окрестности } \beta \text{ в } \mathscr{D}, \tag{3.7b}$$

[2]Отметим, что в самосопряженном случае с $C = B^*$ области $\mathscr{D}^-$ и $\mathscr{D}^+$ с необходимостью оказываются симметричными относительно вещественной оси, $\mathscr{D}^+ = (\mathscr{D}^-)^*$, и $K(\mu^*) = K(\mu)^*$.

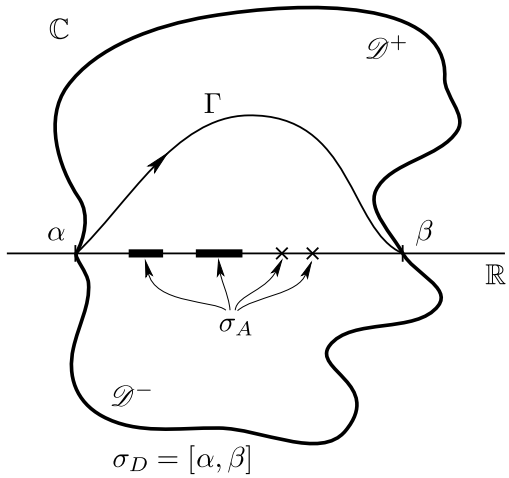


Рис. 2. Спектры операторов $A$ и $D$, области голоморфности $\mathscr{D}^-$ и $\mathscr{D}^+$ продолженной оператор-функции $K$ и контур интегрирования $\Gamma$.

где $c$ и $\nu$ – константы, $c > 0$ и $0 \leqslant \nu < 1$. Сказанное позволяет переписать (3.1) в виде

$$M_A(z) = A - z - \int_\alpha^\beta d\mu \frac{K'(\mu)}{\mu - z}, \tag{3.8}$$

где интегральный член хорошо определен и голоморфен при $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$.

Будем полагать, что $\Gamma^-$ – кусочно-гладкий жорданов контур с концами $\alpha$ и $\beta$, за исключением этих концов, целиком лежащий $\mathscr{D}^-$. Аналогично, обозначение $\Gamma^+$ будем использовать для кусочно-гладкого жорданова контура с концевыми точками $\alpha$ и $\beta$ и, за исключением $\alpha$ и $\beta$, целиком лежащего в $\mathscr{D}^+$. При $\Gamma = \Gamma^-$ или $\Gamma = \Gamma^+$ через $\Omega(\Gamma)$ будем обозначать область лежащую внутри замкнутой кривой, образованной интервалом $\Delta$ и контуром $\Gamma$. Разумеется, $\Omega(\Gamma^\pm) \subset \mathscr{D}^\pm$.

Правая часть (3.8) включает интеграл типа Коши. Легко проверить, что при выполнении предположений, принятых в настоящем разделе, функция $M_A(z)$ допускает аналитическое продолжение по $z$ через интервал $(\alpha, \beta)$ как сверху вниз, так и снизу вверх. После такого продолжения мы имеем дело уже с нефизическим листом (или даже с разными нефизическими листами) римановой поверхности функции $M_A$, который отличается от исходного листа комплексной плоскости спектрального параметра. Для $z \in \Omega(\Gamma)$ явное выражение для продолженной $M_A$ имеет вид

$$M_A(z, \Gamma) := A - z - \int_\Gamma d\mu \frac{K'(\mu)}{\mu - z}, \qquad \Gamma = \Gamma^\pm. \tag{3.9}$$

Заметим, что как функция переменной $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^\pm$ отображение $M_A(\,\cdot\,, \Gamma^\pm)$ обладает следующим свойством (см. [27; лемма 2.1]):

$$M_A(z, \Gamma^\mathfrak{s}) = \begin{cases} M_A(z), & z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega(\Gamma^\mathfrak{s})}, \\ M_A(z) + 2\pi i \mathfrak{s} K'(z), & z \in \Omega(\Gamma^\mathfrak{s}), \end{cases} \qquad \mathfrak{s} = \pm 1. \tag{3.10}$$

Здесь и далее мы отождествляем число $\mathfrak{s} = +1$ или $\mathfrak{s} = -1$ в верхнем или нижнем индексе с соответствующим знаком $\pm$. Например, $\Gamma^{+1} \equiv \Gamma^+$ и $\Gamma^{-1} \equiv \Gamma^-$.

Введем в рассмотрение уравнение

$$Z_A = A - \int_\Gamma d\mu K'(\mu)(Z_A - \mu)^{-1}, \qquad \Gamma = \Gamma^\pm, \quad \Omega(\Gamma^\pm) \subset \mathscr{D}^\pm, \tag{3.11}$$

имеющее смысл при условии, что спектр $\sigma_{Z_A}$ неизвестного $Z_A \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_A)$ не пересекается с контуром $\Gamma$. Кроме того, введем величину

$$\mathscr{V}_K(\Gamma) := \int_\Gamma |d\mu| \, \|K'(\mu)\|, \tag{3.12}$$

называемую *вариацией оператор-функции* (3.6) *вдоль контура* $\Gamma$, и положим

$$d(\Gamma) := \operatorname{dist}(\sigma_A, \Gamma). \tag{3.13}$$

Применение к уравнению (3.11) теоремы Банаха о неподвижной точке приводит к следующему результату (ср. с [27; теорема 3.1]).

Теорема 3. *Пусть* $\Gamma^\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s} = \pm 1$, – *кусочно-гладкий жорданов контур с концами* $\alpha$ *и* $\beta$ *такой, что* $\Omega(\Gamma^\mathfrak{s}) \subset \mathscr{D}^\mathfrak{s}$. *Предположим, что*

$$\mathscr{V}_K(\Gamma^\mathfrak{s}) < \frac{1}{4}\, d(\Gamma^\mathfrak{s})^2. \tag{3.14}$$

*Тогда уравнение* (3.11) *имеет решение* $Z_A^\mathfrak{s}$ *вида*

$$Z_A^\mathfrak{s} = A + T^\mathfrak{s} \tag{3.15}$$

*с*

$$\|T^\mathfrak{s}\| \leqslant r(\Gamma^\mathfrak{s}), \tag{3.16}$$

*где*

$$r(\Gamma^\mathfrak{s}) = \frac{d(\Gamma^\mathfrak{s})}{2} - \sqrt{\frac{d(\Gamma^\mathfrak{s})^2}{4} - \mathscr{V}_K(\Gamma^\mathfrak{s})}\,. \tag{3.17}$$

*Решение* $Z_A^\mathfrak{s}$ *вида* (3.15) *является единственным в замкнутом шаре*

$$\|T^\mathfrak{s}\| \leqslant d(\Gamma^\mathfrak{s}) - \sqrt{\mathscr{V}_K(\Gamma^\mathfrak{s})}\,.$$

Лемма 1. *При фиксированном значении* $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s} = \pm 1$, *единственное решение* $Z_A^\mathfrak{s}$ *вида* (3.15), *упоминаемое в теореме* 3, *является решением уравнения* (3.11) *одновременно для всех кусочно-гладких жордановых контуров* $\Gamma^\mathfrak{s}$ *с концами* $\alpha$, $\beta$ *таких, что*

$$\Omega(\Gamma^\mathfrak{s}) \subset \mathscr{D}^\mathfrak{s} \qquad \text{и} \qquad \mathscr{V}_K(\Gamma^\mathfrak{s}) < \frac{1}{4}\, d(\Gamma^\mathfrak{s})^2. \tag{3.18}$$

*Более того, справедлива следующая оценка*:

$$\|Z_A^\mathfrak{s} - A\| \leqslant r_0(K) \tag{3.19}$$

*с*

$$r_0(K) := \inf_{\Gamma^\mathfrak{s}\,:\,\omega(\Gamma^\mathfrak{s})>0} r(\Gamma^\mathfrak{s}), \tag{3.20}$$

*где инфимум берется по всем кусочно-гладким жордановым контурам* $\Gamma^\mathfrak{s}$, *удовлетворяющим* (3.18), *значение* $r(\Gamma^\mathfrak{s})$ *дается* (3.17), *и*

$$\omega(\Gamma^\mathfrak{s}) = d_0^2(\Gamma^\mathfrak{s}) - 4\mathscr{V}_K(\Gamma^\mathfrak{s}). \tag{3.21}$$

Доказательство леммы 1 практически буквально повторяет доказательство следствия 3.4 в [27]. Поэтому мы опускаем и его, и доказательство следующего утверждения.

Следствие 2. *Спектр $Z_A^{\mathfrak{s}}$ лежит в замкнутой комплексной $r_0(K)$-окрестности $\overline{\mathscr{O}_{r_0(K)}(\sigma_A)}$ спектра $\sigma_A$ оператора $A$.*

Пункт завершается представлением факторизационного результата для оператор-функции $M_A(\,\cdot\,,\Gamma^{\pm})$. Доказательство снова опускаем, поскольку оно попросту повторило бы доказательство теоремы 4.1 в [27].

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы 3, и пусть $Z_A^{\mathfrak{s}}$, $\mathfrak{s}=\pm1$ – то единственное решение (3.11), о котором говорится в этой теореме. Тогда при $z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma^{\mathfrak{s}}$ оператор-функция $M_A(z,\Gamma^{\mathfrak{s}})$ допускает факторизацию вида*

$$M_A(z,\Gamma^{\mathfrak{s}})=W_A(z,\Gamma^{\mathfrak{s}})(Z_A^{\mathfrak{s}}-z), \tag{3.22}$$

*где*

$$W_A(z,\Gamma^{\mathfrak{s}})=I-\int_{\Gamma^{\mathfrak{s}}}d\mu K'(\mu)\frac{1}{\mu-z}(Z_A^{\mathfrak{s}}-\mu)^{-1}. \tag{3.23}$$

*Для $z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma^{\mathfrak{s}}$ оператор $W_A(z,\Gamma^{\mathfrak{s}})$ ограничен, т.е., $W_A(z,\Gamma^{\mathfrak{s}})\in\mathscr{B}(\mathfrak{H}_A)$. Более того, если $\operatorname{dist}(z,\sigma_A)\leqslant d(\Gamma^{\mathfrak{s}})/2$, то этот оператор имеет ограниченный обратный и*

$$\|W_A(z,\Gamma^{\mathfrak{s}})\|^{-1}\leqslant\frac{1}{1-\dfrac{\mathscr{V}_K(\Gamma^{\mathfrak{s}})}{d(\Gamma^{\mathfrak{s}})^2/4}}<\infty. \tag{3.24}$$

Подчеркнем, что конечность оценки (3.24) вытекает из предположения (3.18). Сравнивая (3.23) с (2.18), можно интерпретировать факторизационный результат (3.22) как прямой аналог факторизации (2.6).

**4. Комплексная деформация блочно-операторной матрицы и разрешимость операторного уравнения Риккати.** В настоящем пункте в качестве $L$ будет выступать гамильтониан, отвечающий расширению одной из известных моделей Фридрихса, а именно, модели, введенной в [32; § 6]. Будем полагать, что $L$ – блочно-операторная $(2\times2)$-матрица вида (1.2), компонента $D$ которой с самого начала задается в спектральном представлении и, следовательно, является оператором умножения на независимую переменную. То есть

$$(Df_D)(\lambda)=\lambda f_D(\lambda),\quad f_D\in\mathfrak{H}_D=L^2(\Delta\to\mathfrak{h})\qquad(\text{как и ранее,}\quad\Delta=(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}), \tag{4.1}$$

где $\mathfrak{h}$ – вспомогательное гильбертово пространство, так что $L^2(\Delta\to\mathfrak{h})$ сформировано из функций $f_D$, отображающих $\Delta$ в $\mathfrak{h}$, измеримых в смысле [38; § 7.1] и таких, что $\mathfrak{h}$-норма $\|f(\lambda)\|_{\mathfrak{h}}$ квадратично интегрируема на $\Delta$,

$$\|f\|_{\mathfrak{H}_D}:=\left(\int_\alpha^\beta d\lambda\|f(\lambda)\|_{\mathfrak{h}}^2\right)^{1/2}<\infty. \tag{4.2}$$

Скалярное произведение в $\mathfrak{H}_D=L^2(\Delta\to\mathfrak{h})$ определяется как

$$\langle f,g\rangle_{\mathfrak{H}_D}:=\int_\alpha^\beta d\lambda\langle f(\lambda),g(\lambda)\rangle_{\mathfrak{h}},\qquad f,g\in\mathfrak{H}_D, \tag{4.3}$$

где $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{\mathfrak{h}}$ обозначает скалярное произведение в $\mathfrak{h}$.

Только что приведенное определение означает, что спектр $D$ состоит из единственной ветви абсолютно непрерывного спектра, однородно покрывающей сегмент $[\alpha,\beta]$. Мы никак не специфицируем блок-компоненту $A$, за исключением предположения о том, что $A$ – самосопряженный оператор, спектр которого погружен внутрь спектра $\sigma_D$, т.е. выполняется включение (3.5), $\sigma_A \subset (\alpha,\beta)$. Оператор $C\colon \mathfrak{H}_A \to \mathfrak{H}_D$ с необходимостью действует как оператор умножения

$$(Cf_A)(\lambda) = \mathfrak{c}(\lambda) f_A, \qquad f_A \in \mathfrak{H}_A, \tag{4.4}$$

на некоторую $\mathscr{B}(\mathfrak{H}_A,\mathfrak{h})$-значную функцию $\mathfrak{c}(\lambda)$, $\lambda \in (\alpha,\beta)$. Мы также принимаем, что

$$Bf_D = \int_\Delta d\lambda \mathfrak{b}(\lambda) f_D(\lambda) \tag{4.5}$$

для некоторой $\mathscr{B}(\mathfrak{h},\mathfrak{H}_A)$-значной функции $\mathfrak{b}(\lambda)$, $\lambda \in (\alpha,\beta)$.

Если $L$ самосопряжен, то $C = B^*$ и с необходимостью $\mathfrak{c}(\lambda) = \mathfrak{b}(\lambda)^*$ для п.в. $\lambda \in \Delta$. Отметим, самосопряженная блочно-операторная матрица $L$ вида (1.2) с блок-компонентами $D$ и $B$, заданными (4.1) и (4.5) соответственно, с $C = B^*$, но с оператором $A$, имеющим лишь точечный спектр, обсуждалась [27; § 8].

Сформулируем основное предположение этого пункта.

Предположение 1. *Будем считать, что оператор-функции* $\mathfrak{b}\colon \Delta \to \mathscr{B}(\mathfrak{h},\mathfrak{H}_A)$ *и* $\mathfrak{c}\colon \Delta \to \mathscr{B}(\mathfrak{H}_A,\mathfrak{h})$ *вещественно-аналитичны на интервале* $\Delta = (\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}$ *и допускают аналитическое продолжение с* $\Delta$ *на область* $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}$, $\mathscr{D} \supset \Delta$ (*и* $\mathscr{D} \not\supset \{\alpha,\beta\}$). *Будем полагать также, что*

$$\|\mathfrak{b}(\mu)\|_{\mathscr{B}(\mathfrak{h},\mathfrak{H}_A)} \leqslant c|\mu-\alpha|^{-\nu_\mathfrak{b}} \qquad \text{и} \qquad \|\mathfrak{c}(\mu)\|_{\mathscr{B}(\mathfrak{H}_A,\mathfrak{h})} \leqslant c|\mu-\alpha|^{-\nu_\mathfrak{c}} \tag{4.6a}$$

*для всех* $\mu \neq \alpha$ *из некоторой открытой комплексной окрестности точки* $\alpha$ *в* $\mathscr{D}$,

$$\|\mathfrak{b}(\mu)\|_{\mathscr{B}(\mathfrak{h},\mathfrak{H}_A)} \leqslant c|\mu-\beta|^{-\nu_\mathfrak{b}} \qquad \text{и} \qquad \|\mathfrak{c}(\mu)\|_{\mathscr{B}(\mathfrak{H}_A,\mathfrak{h})} \leqslant c|\mu-\beta|^{-\nu_\mathfrak{c}} \tag{4.6b}$$

*для всех* $\mu \neq \beta$ *из некоторой открытой комплексной окрестности точки* $\beta$ *в* $\mathscr{D}$, *где* $c$, $\nu_\mathfrak{b}$, *и* $\nu_\mathfrak{c}$ – *некоторые постоянные*, $c > 0$ *и* $0 \leqslant \nu_\mathfrak{b} < 1/2$, $0 \leqslant \nu_\mathfrak{c} < 1/2$. *Кроме того, положим* $\mathscr{D}^- = \mathscr{D} \cap \mathbb{C}^-$ *и* $\mathscr{D}^+ = \mathscr{D} \cap \mathbb{C}^+$.

Сделав предположение 1, рассмотрим всевозможные кусочно-гладкие жордановы контуры $\Gamma$ с фиксированными концами $\alpha$ и $\beta$, получаемые из интервала $\Delta = (\alpha,\beta)$ путем непрерывной деформации и лежащие целиком либо в $\mathscr{D}^- \cup \Delta$, либо в $\mathscr{D}^+ \cup \Delta$. С каждым таким контуром $\Gamma$ свяжем гильбертово пространство $\mathfrak{H}_{D,\Gamma} := L^2(\Gamma \to \mathfrak{h})$, состоящее из функций $f_{D,\Gamma}\colon \Gamma \to \mathfrak{h}$, которые квадратично интегрируемы по отношению к мере Лебега $|d\lambda|$ на $\Gamma$, т.е. скалярное произведение в $\mathfrak{H}_{D,\Gamma}$ определяется формулой

$$\langle f,g\rangle_{\mathfrak{H}_{D,\Gamma}} = \int_\Gamma |d\lambda| \, \langle f(\lambda), g(\lambda)\rangle_\mathfrak{h}. \tag{4.7}$$

Отметим, что гильбертово пространство $\mathfrak{H}_D$ является частным случаем $\mathfrak{H}_{D,\Gamma}$ при $\Gamma = \Delta$. Далее, введем семейство блочно-операторных матриц вида

$$L_\Gamma = \begin{pmatrix} A & B_\Gamma \\ C_\Gamma & D_\Gamma \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

где $D_\Gamma$ – оператор умножения на независимую переменную $\lambda \in \Gamma$ в $L^2(\Gamma \to \mathfrak{h})$, т.е.

$$(D_\Gamma f_{D,\Gamma})(\lambda) = \lambda f_{D,\Gamma}(\lambda), \qquad f_{D,\Gamma} \in \mathfrak{H}_{D,\Gamma}; \tag{4.9}$$

блок-компонента $C_\Gamma \colon \mathfrak{H}_A \to \mathfrak{H}_{D,\Gamma}$ определяется согласно равенству

$$(C_\Gamma f_A)(\lambda) = \mathfrak{c}(\lambda) f_A, \qquad f_A \in \mathfrak{H}_A, \quad \lambda \in \Gamma, \tag{4.10}$$

а оператор $B_\Gamma \colon \mathfrak{H}_{D,\Gamma} \to \mathfrak{H}_A$ задается так:

$$B_\Gamma f_{D,\Gamma} = \int_\Gamma d\lambda \mathfrak{b}(\lambda) f_{D,\Gamma}(\lambda), \qquad f_{D,\Gamma} \in \mathfrak{H}_{D,\Gamma}. \tag{4.11}$$

Замечание 4. Поскольку $D_\Gamma$, определяемый (4.9), является оператором умножения на независимую переменную, то он нормален, т.е. $D_\Gamma^* D_\Gamma = D_\Gamma D_\Gamma^*$. Его спектр $\sigma_{D_\Gamma}$ заполняет замыкание $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ контура $\Gamma$ и абсолютно непрерывен. Спектральная мера $\mathsf{E}_{D_\Gamma}$ оператора $D_\Gamma$ дается выражением

$$(\mathsf{E}_{D_\Gamma}(\delta) f)(\lambda) = \chi_\delta(\lambda) f(\lambda), \quad \lambda \in \Gamma, \qquad f \in \mathfrak{H}_{D,\Gamma} = L^2(\Gamma \to \mathfrak{h}), \tag{4.12}$$

где $\delta$ – произвольное борелевское подмножество $\overline{\Gamma}$, а $\chi_\delta$ обозначает характеристическую функцию $\delta$: $\chi_\delta(\lambda) = 1$, если $\lambda \in \delta$, и $\chi_\delta(\lambda) = 0$, если $\lambda \in \overline{\Gamma} \setminus \delta$.

Замечание 5. В отличие от спектра (первоначального) оператора $D$, спектр $D_\Gamma$ отделен от спектра оператора $A$,

$$d(\Gamma) = \operatorname{dist}(\sigma_A, \sigma_{D_\Gamma}) = \operatorname{dist}(\sigma_A, \Gamma) > 0 \tag{4.13}$$

(разумеется, при условии $\Gamma \cap \Delta = \varnothing$).

Мы интерпретируем $L_\Gamma$, задаваемый (4.8)–(4.11), как результат *комплексной деформации* исходного оператора $L = L_\Delta$, отвечающего $\Gamma = \Delta$. Отметим, что на главной диагонали изменению подвергается лишь компонента $D$, тогда как другая компонента на этой диагонали, $A$, при комплексной деформации не меняется. Аналогично, операторные уравнения Риккати

$$XA - D_\Gamma X + X B_\Gamma X = C_\Gamma, \qquad X \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_A, \mathfrak{H}_{D_\Gamma}), \tag{4.14}$$

$$Y D_\Gamma - A Y + Y C_\Gamma Y = B_\Gamma, \qquad Y \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_{D_\Gamma}, \mathfrak{H}_A), \tag{4.15}$$

ассоциированные с блочно-операторной матрицей $L_\Gamma$, называются *комплексно деформированными*. Подразумевается, что деформация имеет место по отношению к исходным уравнениям Риккати (4.14), (4.15), отвечающим $\Gamma = \Delta$.

Как и в п. 3, при $\Gamma = \Gamma^- \subset \mathscr{D}^-$ или $\Gamma = \Gamma^+ \subset \mathscr{D}^+$ через $\Omega(\Gamma)$ мы снова обозначаем область, ограниченную замкнутой кривой, образуемой сегментом $\overline{\Delta}$ и контуром $\Gamma$. Понятно, что $\Omega(\Gamma^\pm) \subset \mathscr{D}^\pm$. Говоря об операторе $L_\Gamma$, под *резонансами* мы понимаем часть его точечного спектра $\sigma_p(L_\Gamma)$, находящуюся в $\Omega(\Gamma)$. Следующая лемма утверждает, что резонансы, лежащие в пересечении областей $\Omega(\Gamma^\mathfrak{s})$ для различных контуров $\Gamma^\mathfrak{s}$ с одним и тем же индексом $\mathfrak{s}$, являются общими резонансами для всех соответствующих операторов $L_{\Gamma^\mathfrak{s}}$. Это свойство представляет собой аналог независимости резонансов от параметра скейлинга в обычном методе комплексного скейлинга (см., например, [36; XIII.10] и цитируемую там литературу).

Лемма 3. *Пусть выполнено предположение 1. Будем считать, что* $\Gamma_1^{\mathfrak{s}}$ *и* $\Gamma_2^{\mathfrak{s}}$, $\mathfrak{s}=\pm 1$, – *кусочно-гладкие жордановы контуры с концами* $\alpha$ *и* $\beta$, *полученные путем непрерывной деформации интервала* $\Delta$ *и лежащие целиком в* $\mathscr{D}^{\mathfrak{s}}\cup\Delta$. *Обозначим через* $L_{\Gamma_j^{\mathfrak{s}}}$, $j=1,2$, *операторы, определяемые для соответствующих контуров* $\Gamma_j^{\mathfrak{s}}$ *формулами* (4.8)–(4.11).

*Тогда* $z\in\Omega(\Gamma_1^{\mathfrak{s}})\cap\Omega(\Gamma_2^{\mathfrak{s}})$ *принадлежит точечному спектру* $\sigma_p(L_{\Gamma_1^{\mathfrak{s}}})$ *оператора* $L_{\Gamma_1^{\mathfrak{s}}}$, *если и только если* $z\in\sigma_p(L_{\Gamma_2^{\mathfrak{s}}})$. *Кроме того, если* $z\in\sigma_p(L_{\Gamma_1^{\mathfrak{s}}})\cap(\mathbb{C}\setminus\overline{\Omega(\Gamma_1^{\mathfrak{s}})})$, *то* $\lambda\in\sigma_p(L)$, *где* $L=L_\Delta$ – *исходная (недеформированная) блочно-операторная матрица* (4.8), *отвечающая* $\Gamma=\Delta$.

Доказательство. Предположим, что

$$z\in\sigma_p(L_{\Gamma_1})\qquad\text{и}\qquad z\in\Omega(\Gamma_1)\cap\Omega(\Gamma_2),\tag{4.16}$$

где $\Gamma_1=\Gamma_1^{\mathfrak{s}}$ и $\Gamma_2=\Gamma_2^{\mathfrak{s}}$ при некотором $\mathfrak{s}=\pm1$. Пусть $f\neq0$ – собственный вектор $L_{\Gamma_1}$, отвечающий собственному числу $z$, $f=(f_A,f_D)$, где $f_A\in\mathfrak{H}_A$, $f_D\in\mathfrak{H}_{D_{\Gamma_1}}$. Уравнение $L_{\Gamma_1}f=zf$ эквивалентно системе уравнений

$$(A-z)f_A+B_{\Gamma_1}f_D=0,\tag{4.17}$$

$$C_{\Gamma_1}f_A+(D_{\Gamma_1}-z)f_D=0.\tag{4.18}$$

С учетом (4.9) и (4.10), из (4.18) мы получаем для $\lambda\in\Gamma_1$ (а значит, автоматически для $\lambda\neq z$), что

$$f_D(\lambda)=-\frac{1}{\lambda-z}\,\mathfrak{c}(\lambda)f_A.\tag{4.19}$$

Первоначально представление (4.19) работает только для $\lambda\in\Gamma_1$. Однако эта формула может быть использована для того, чтобы аналитически продолжить $f_D$ на всю ту область (за исключением точки $z$), где определена и голоморфна $\mathscr{B}(\mathfrak{H}_A,\mathfrak{h})$-значная функция $\mathfrak{c}$. Тогда в условиях сделанного нами предположения 1 продолженная $\mathfrak{h}$-значная функция (4.19) определена и аналитична для всех $\lambda\in\mathscr{D}=\mathscr{D}^-\cup\mathscr{D}^+\cup\Delta$, исключая $\lambda=z$. Более того, выполняется равенство

$$\mathfrak{c}(\lambda)f_A+(\lambda-z)f_D(\lambda)=0\qquad\text{для любых}\quad\lambda\in\mathscr{D}\setminus\{z\}.\tag{4.20}$$

В то же время ввиду (4.19) член $B_{\Gamma_1}f_D$ в левой части (4.17) записывается как

$$B_{\Gamma_1}f_D=\int_{\Gamma_1}d\mu\,\frac{\mathfrak{b}(\mu)\mathfrak{c}(\mu)}{\mu-z}\,f_A.\tag{4.21}$$

Поскольку подынтегральная функция в (4.21) голоморфна при $\mu\in\mathscr{D}\setminus\{z\}$, контур $\Gamma_1$ можно заменить, с сохранением значения интеграла, любым другим кусочно-непрерывным жордановым контуром $\Gamma\subset\mathscr{D}^{\mathfrak{s}}$, полученным из $\Gamma_1$ путем непрерывной деформации без пересечения точки $z$. В частности, ввиду предположения $z\in\Omega(\Gamma_1)\cap\Omega(\Gamma_2)$ для этой цели можно выбрать контур $\Gamma_2$, и тогда возникает равенство (4.17), в котором $\Gamma_1$ заменен на $\Gamma_2$. Далее, сужение (4.20) на $\lambda\in\Gamma_2$ приводит к равенству (4.18), переписанному для $L_{\Gamma_2}$. Таким образом, мы показали, что из (4.16) следует $z\in\sigma_p(L_{\Gamma_2})$. Перемена ролей $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ приводит обратной импликации, и, тем самым, к завершению доказательства первого утверждения леммы.

Оставшееся утверждение доказывается тем же путем на основании наблюдения, что при $z \in \sigma_p(L_{\Gamma_1}) \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega(\Gamma_1)})$ в правой части (4.21) можно провести эквивалентную замену интегрирования вдоль $L_{\Gamma_1}$ интегрированием по $\Delta$. В свою очередь, равенство (4.20) также сужается к $\lambda \in \Delta$. Следовательно, в рассматриваемом случае из включения $z \in \sigma_p(L_{\Gamma_1})$ следует включение $z \in \sigma_p(L)$, что и завершает доказательство.

Перейдем к рассмотрению дополнения Шура

$$M_{A,\Gamma}(z) := A - z - B_\Gamma (D_\Gamma - z)^{-1} C_\Gamma \tag{4.22}$$

$$= A - z - \int_{\sigma_{D_\Gamma}} B_\Gamma \mathsf{E}_{D_\Gamma}(d\mu) C_\Gamma \frac{1}{\mu - z}, \qquad z \notin \sigma_{D_\Gamma} = \overline{\Gamma}, \tag{4.23}$$

отвечающего блочно-диагональной матрице $L_\Gamma$. Легко видеть, что в исследуемом случае

$$B_\Gamma \, \mathsf{E}_{D_\Gamma}(d\mu) C_\Gamma = \mathfrak{b}(\mu)\mathfrak{c}(\mu)\, d\mu \tag{4.24}$$

и, следовательно,

$$M_{A,\Gamma}(z) := A - z - \int_\Gamma d\mu \frac{\mathfrak{b}(\mu)\mathfrak{c}(\mu)}{\mu - z}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Gamma}, \tag{4.25}$$

Заметим, что соответствующая оператор-функция $K$, определяемая на $\mathbb{R}$ выражением (3.6), для $\mu \in \overline{\Delta}$ представляется в виде

$$K(\mu) = \int_\alpha^\mu d\lambda \mathfrak{b}(\lambda)\mathfrak{c}(\lambda), \qquad \alpha \leqslant \mu \leqslant \beta. \tag{4.26}$$

Последнее означает, что в условиях предположения 1 функция $K$ допускает явное аналитическое продолжение с $\Delta$ на область $\mathscr{D}$ как контурный интеграл

$$K(\mu) = \int_{\gamma(\alpha,\mu)} d\lambda \mathfrak{b}(\lambda)\mathfrak{c}(\lambda), \qquad \mu \in \mathscr{D}, \tag{4.27}$$

где $\gamma(\alpha, \mu)$ – произвольный кусочно-гладкий жорданов контур с концами $\alpha$ и $\mu$, лежащий, за исключением конца $\alpha$, целиком в $\mathscr{D}$. Таким образом, производная $K'(\lambda)$ представляет собой не что иное, как

$$K'(\lambda) = \mathfrak{b}(\lambda)\mathfrak{c}(\lambda), \qquad \lambda \in \mathscr{D}. \tag{4.28}$$

Тем самым, дополнение Шура $M_{A,\Gamma}(\,\cdot\,)$, отвечающее $L_\Gamma$, попросту совпадает с функцией $M_A(\,\cdot\,, \Gamma)$, определенной в (3.9),

$$M_{A,\Gamma}(z) = M_A(z, \Gamma), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Gamma}. \tag{4.29}$$

Замечание 6. Аналитичность оператор-функции $K'$, вообще говоря, не означает аналитичности $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ (и, следовательно, в общем случае она не предоставляет возможности для той комплексной деформации $L$, которую мы провели в данном пункте). Это видно из следующих двух элементарных примеров.

Пример 1. Пусть $\alpha = -1$, $\beta = 1$ и $\mathfrak{H}_A = \mathfrak{h} = \mathbb{C}$. Предположим, что $\mathfrak{b}(\lambda) = \lambda - i$ и $\mathfrak{c}(\lambda) = 1/(\lambda - i)$, $\lambda \in (-1, 1)$. Произведение $\mathfrak{b}(\lambda)\mathfrak{c}(\lambda) \equiv 1$ допускает аналитическое продолжение с интервала $(-1, 1)$ на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$, тогда как функция $\mathfrak{c}$ не допускает.

Пример 2. Пусть $\alpha$, $\beta$, $\mathfrak{H}_A$, и $\mathfrak{h}$ – те же, что в примере 1. Предположим, что $\mathfrak{b}(\lambda) = \mathfrak{c}(\lambda) = |\lambda|$, $\lambda \in (-1, 1)$. Произведение $\mathfrak{b}(\lambda)\mathfrak{c}(\lambda) \equiv \lambda^2$ допускает аналитическое продолжение с интервала $(-1, 1)$ на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$, в то время как обе функции $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ не являются вещественно-аналитическими в точке $\lambda = 0$.

Заметим, что ввиду (4.12) $\mathsf{E}_{D_\Gamma}$-нормы операторов $B_\Gamma$ и $C_\Gamma$ (см. определение 1) записываются как

$$\|B_\Gamma\|_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}} = \left(\int_\Gamma |d\mu|\, \|\mathfrak{b}(\mu)\mathfrak{b}(\mu)^*\|_{\mathscr{B}(\mathfrak{h})}\right)^{1/2} = \left(\int_\Gamma |d\mu|\, \|\mathfrak{b}(\mu)\|^2_{\mathscr{B}(\mathfrak{h},\mathfrak{H}_A)}\right)^{1/2}, \tag{4.30}$$

$$\|C_\Gamma\|_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}} = \left(\int_\Gamma |d\mu|\, \|\mathfrak{c}(\mu)^*\mathfrak{c}(\mu)\|_{\mathscr{B}(\mathfrak{H}_A)}\right)^{1/2} = \left(\int_\Gamma |d\mu|\, \|\mathfrak{c}(\mu)\|^2_{\mathscr{B}(\mathfrak{H}_A,\mathfrak{h})}\right)^{1/2}. \tag{4.31}$$

В рассматриваемом нами случае из (4.28) следует, что вариация (3.12) $\mathscr{B}(\mathfrak{H}_A)$-значной функции $K$ вдоль $\Gamma$ имеет явный вид

$$\mathscr{V}_K(\Gamma) = \int_\Gamma |d\mu|\, \|\mathfrak{b}(\mu)\mathfrak{c}(\mu)\|. \tag{4.32}$$

Ввиду (4.30) и (4.31) из (4.32) вытекает оценка

$$\mathscr{V}_K(\Gamma) = \int_\Gamma |d\mu|\, \|\mathfrak{b}(\mu)\mathfrak{c}(\mu)\| \leqslant \|B_\Gamma\|_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}} \|C_\Gamma\|_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}}. \tag{4.33}$$

Ради удобства ссылок мы объединяем предположение 1 с нашими дальнейшими допущениями.

Предположение 2. *Пусть выполнено предположение 1. Дополнительно предположим, что существуют кусочно-непрерывные жордановы контуры* $\Gamma^-$ *и/или* $\Gamma^+$ *с концами* $\alpha$ *и* $\beta$, *такие, что* $\Gamma^{\mathfrak{s}} \subset \mathscr{D}^{\mathfrak{s}} \cup \Delta$ *и*

$$\|B_\Gamma\|_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}} \|C_\Gamma\|_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}} < \frac{d(\Gamma)^2}{4} \qquad \textit{при} \quad \Gamma = \Gamma^{\mathfrak{s}}, \quad \mathfrak{s} = \pm 1. \tag{4.34}$$

В условиях предположения 2 оба деформированных уравнения Риккати (4.14) и (4.15) обладают соответствующими ограниченными решениями $X_\Gamma$ и $Y_\Gamma$. В то же время интегральное уравнение (3.11) обладает решением $Z_A^{\mathfrak{s}}$, $\mathfrak{s} = \pm 1$, существование и единственность которого гарантируется теоремой 3. Между решениями $Z_A^{\mathfrak{s}}$ и операторами $X_\Gamma$, ассоциированными с $\Gamma \subset \mathscr{D}^{\mathfrak{s}}$, имеется самая непосредственная связь. Все эти результаты собраны в следующем утверждении.

Теорема 4. *Пусть выполнено предположение 2. Пусть* $\Gamma = \Gamma^{\mathfrak{s}}$, $\mathfrak{s} = \pm 1$ – *жорданов контур из этого предположения, и пусть* $d = d(\Gamma)$. *Тогда деформированные операторные уравнения Риккати* (4.14) *и* (4.15) *имеют соответственно решения* $X_\Gamma \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_A, \mathfrak{H}_{D_\Gamma})$ *и* $Y_\Gamma \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_{D_\Gamma}, \mathfrak{H}_A)$ *со следующими свойствами*:

- *при* $B_\Gamma \neq 0$ *оператор* $X_\Gamma$ *является единственным решением* (4.14) *в шаре*

$$\left\{T \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_A, \mathfrak{H}_{D_\Gamma}) \,|\, \|T\| < \|B_\Gamma\|^{-1}_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}} \left(d - \sqrt{\|B_\Gamma\|_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}} \|C_\Gamma\|_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}}}\right)\right\}; \tag{4.35}$$

*решение* $X_\Gamma$ *имеет конечную* $\mathsf{E}_{D_\Gamma}$*-норму, удовлетворяющую оценке*

$$\|X_\Gamma\|_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}} \leqslant \frac{1}{\|B_\Gamma\|_{E_{D_\Gamma}}} \left(\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \|B_\Gamma\|_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}} \|C_\Gamma\|_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}}}\right); \tag{4.36}$$

- *при* $C_\Gamma \neq 0$ *оператор* $Y_\Gamma$ *является единственным решением* (4.15) *в шаре*

$$\left\{T \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_{D_\Gamma}, \mathfrak{H}_A) \,|\, \|T\| < \|C_\Gamma\|^{-1}_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}} \left(d - \sqrt{\|B_\Gamma\|_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}} \|C_\Gamma\|_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}}}\right)\right\}; \tag{4.37}$$

*решение* $Y_\Gamma$ *имеет конечную* $\mathsf{E}_{D_\Gamma}$*-норму, удовлетворяющую оценке*

$$\|Y_\Gamma\|_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}} \leqslant \frac{1}{\|C_\Gamma\|_{E_{D_\Gamma}}} \left(\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \|B_\Gamma\|_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}} \|C_\Gamma\|_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}}}\right). \tag{4.38}$$

*При этом решение* $Z^{\mathfrak{s}}_A$ *уравнения* (3.11)*, о котором говорится в теореме* 3*, задается равенством*

$$Z^{\mathfrak{s}}_A = A + B_\Gamma X_\Gamma, \qquad \mathfrak{s} = \pm 1, \tag{4.39}$$

*и не зависит от формы жорданова контура* $\Gamma \subset \mathscr{D}^{\mathfrak{s}} \cup \Delta$*, удовлетворяющего условиям предположения* 2*.*

Доказательство. Условия теоремы включают оценку (4.34), ввиду (2.20) означающую и (2.25), и (2.28). Поэтому утверждения в отношении решений $X_\Gamma$ и $Y_\Gamma$ уравнений Риккати (4.14) и (4.15) следуют из теорем 1 и 2 соответственно.

В рассматриваемом случае интегральная версия (2.16) уравнения Риккати для $X_\Gamma$ имеет вид

$$X_\Gamma = \int_\Gamma \mathsf{E}_{D_\Gamma}(d\mu) C_\Gamma (A + B_\Gamma X_\Gamma - \mu)^{-1}. \tag{4.40}$$

Согласно (4.36) имеем

$$\|B_\Gamma X_\Gamma\| \leqslant \|B\|_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}} \|X\|_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}} < \frac{d(\Gamma)}{2}. \tag{4.41}$$

Поскольку оператор $A$ самосопряжен, отсюда следует

$$\|(A + B_\Gamma X_\Gamma - \mu)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\operatorname{dist}(\mu, \sigma_A) - \|B_\Gamma X_\Gamma\|} < \frac{2}{d(\Gamma)} \qquad \text{для любых} \quad \mu \in \Gamma, \tag{4.42}$$

что означает, что интеграл в правой части (4.40) корректно определен. Из (4.40) вытекает, что $Z_{A,\Gamma} := A + B_\Gamma X_\Gamma$ удовлетворяет уравнению

$$Z_{A,\Gamma} = A - \int_\Gamma d\mu B_\Gamma \, E_{D_\Gamma}(d\mu) C_\Gamma (Z_{A,\Gamma} - \mu)^{-1}. \tag{4.43}$$

Ввиду (4.24), (4.27) и (4.28) это уравнение представляет собой не что иное, как уравнение (3.11). Тогда по теореме 3 имеем $Z^{\mathfrak{s}}_A = Z_{A,\Gamma}$, и, следовательно, справедливо (4.39). В условиях предположения 2 независимость $Z^{\mathfrak{s}}_A$ от контура $\Gamma \subset \mathscr{D}^{\mathfrak{s}} \cup \Delta$ имеет место по лемме 1.

Следствие 3. *В условиях предположения 2 частично деформированная блочно операторная матрица $L_\Gamma$, задаваемая (4.8)–(4.11) для $\Gamma = \Gamma^{\mathfrak{s}} \subset \mathscr{D}^{\mathfrak{s}} \cup \Delta$, $\mathfrak{s} = \pm 1$, допускает блочную диагонализацию (2.12) в терминах решений $X_\Gamma$ и $Y_\Gamma$, о которых говорится в теореме 4. В частности,*

$$L_\Gamma = (I + Q_\Gamma) \begin{pmatrix} Z_A^{\mathfrak{s}} & 0 \\ 0 & Z_{D,\Gamma} \end{pmatrix} (I + Q_\Gamma)^{-1}, \tag{4.44}$$

*где $Z_A^{\mathfrak{s}}$ задается выражением (4.39), $Q_\Gamma$, $Z_{D,\Gamma}$ определяются равенствами*

$$Q_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & Y_\Gamma \\ X_\Gamma & 0 \end{pmatrix}, \qquad Z_{D,\Gamma} = D_\Gamma + C_\Gamma Y_\Gamma. \tag{4.45}$$

Доказательство. Одним из наших предположений является выполнение условия (4.34). Поэтому доказательство проводится путем отсылки сначала к следствию 1, а затем к замечанию 3.

Замечание 7. Отметим, что в силу (4.12) решение $X_{\Gamma^{\mathfrak{s}}}$, $\mathfrak{s} = \pm 1$, представляет собой оператор из $\mathfrak{H}_A$ в $\mathfrak{H}_{D,\Gamma} = L^2(\Gamma \to \mathfrak{h})$, действующий по правилу

$$(X_{\Gamma^{\mathfrak{s}}} f_A)(\lambda) = \mathfrak{x}^{\mathfrak{s}}(\lambda) f_A, \quad f_A \in \mathfrak{H}_A, \qquad \lambda \in \Gamma^{\mathfrak{s}}, \quad \mathfrak{s} = \pm 1, \tag{4.46}$$

где $\mathscr{B}(\mathfrak{H}_A, \mathfrak{h})$-значная функция $\mathfrak{x}^{\mathfrak{s}}$ комплексной переменной $\lambda \in \mathscr{D}^{\mathfrak{s}} \setminus \sigma_{Z_A^{\mathfrak{s}}}$ имеет вид

$$\mathfrak{x}^{\mathfrak{s}}(\lambda) := \mathfrak{c}(\lambda)(Z_A^{\mathfrak{s}} - \lambda)^{-1}, \qquad \lambda \in \mathscr{D}^{\mathfrak{s}} \setminus \sigma_{Z_A^{\mathfrak{s}}}. \tag{4.47}$$

Аналогично, для $\Gamma = \Gamma^{\mathfrak{s}}$ при фиксированном $\mathfrak{s} = \pm 1$ оператор $Y_\Gamma$ может быть задан равенством

$$Y_\Gamma f_{D,\Gamma} = \int_\Gamma d\mu \mathfrak{y}^{\mathfrak{s}}(\mu) f_{D,\Gamma}(\mu). \tag{4.48}$$

Здесь $f_{D,\Gamma} \in \mathfrak{H}_{D,\Gamma}$, а $\mathfrak{y}^{\mathfrak{s}} \colon \Gamma \to \mathscr{B}(\mathfrak{h}, \mathfrak{H}_A)$ – оператор-функция, определяемая равенством

$$\mathfrak{y}^{\mathfrak{s}}(\lambda) = -(\widetilde{Z}_A^{\mathfrak{s}} - \lambda)^{-1} \mathfrak{b}(\lambda), \qquad \lambda \in \mathscr{D}^{\mathfrak{s}} \setminus \sigma_{\widetilde{Z}_A^{\mathfrak{s}}} \quad (= \mathscr{D}^{\mathfrak{s}} \setminus \sigma_{Z_A^{\mathfrak{s}}}), \tag{4.49}$$

где $\widetilde{Z}_A^{\mathfrak{s}} = A - Y_\Gamma C_\Gamma$. Ввиду (2.13) операторы $\widetilde{Z}_A^{\mathfrak{s}}$ и $Z_A^{\mathfrak{s}}$ подобны,

$$\widetilde{Z}_A^{\mathfrak{s}} = (I - Y_\Gamma X_\Gamma) Z_A^{\mathfrak{s}} (I - Y_\Gamma X_\Gamma)^{-1}. \tag{4.50}$$

Это означает, что, как и $Z_A^{\mathfrak{s}}$, оператор $\widetilde{Z}_A^{\mathfrak{s}}$ не зависит от формы жорданова контура $\Gamma \subset \mathscr{D}^{\mathfrak{s}} \cup \Delta$, подчиняющегося условиям предположения 2. Функции $\mathfrak{x}^{\mathfrak{s}}$ и $\mathfrak{y}^{\mathfrak{s}}$ обслуживают одновременно все те кусочно-гладкие жордановы контуры $\Gamma^{\mathfrak{s}}$, для которых $\Omega(\Gamma^{\mathfrak{s}}) \subset \mathscr{D}^{\mathfrak{s}}$ и $\sigma_{Z_A^{\mathfrak{s}}} \subset \Omega(\Gamma^{\mathfrak{s}})$.

Замечание 8. Из (4.44) следует, что спектр $L_\Gamma$ является объединением спектров $Z_A^{\mathfrak{s}}$ и $Z_{D,\Gamma}$:

$$\sigma_{L_\Gamma} = \sigma_{Z_A^{\mathfrak{s}}} \cup \sigma_{Z_{D,\Gamma}}, \qquad \Gamma = \Gamma^{\mathfrak{s}}, \quad \mathfrak{s} = \pm 1. \tag{4.51}$$

В условиях теоремы 4 для произведения $B_\Gamma X_\Gamma$ действуют оценки (4.41). Из (4.38) следуют аналогичные оценки для $C_\Gamma Y_\Gamma$:

$$\|C_\Gamma Y_\Gamma\| \leqslant \|C_\Gamma\|_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}} \|Y_\Gamma\|_{\mathsf{E}_{D_\Gamma}} < \frac{d(\Gamma)}{2}. \tag{4.52}$$

Так как оператор $A$ – самосопряженный, а $D_\Gamma$ – нормальный, из (4.41) и (4.52) соответственно вытекает, что

$$\sigma_{Z_A^{\mathfrak{s}}} \subset \mathscr{O}_{d(\Gamma)/2}(\sigma_A), \qquad \sigma_{Z_{D,\Gamma}} \subset \mathscr{O}_{d(\Gamma)/2}(\sigma_{D_\Gamma}).$$

Значит, спектры $\sigma_{Z_A^{\mathfrak{s}}}$ и $\sigma_{Z_{D,\Gamma}}$ отделены друг от друга,

$$\operatorname{dist}(\sigma_{Z_A^{\mathfrak{s}}}, \sigma_{Z_{D,\Gamma}}) > 0. \tag{4.53}$$

Напомним, что спектр $\sigma_{Z_A^{\mathfrak{s}}}$ зависит от знака $\mathfrak{s}$, но не зависит от (формы) контура $\Gamma^{\mathfrak{s}}$, подчиняющегося условию (3.18) (см. теорему 4; ср. с леммой 1).

А. К. Мотовилов выражает благодарность Институту прикладной математики Боннского университета за гостеприимство во время визитов в этот институт в 2016 и 2017 гг.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] S. Albeverio, K. A. Makarov, A. K. Motovilov, “Graph subspaces and the spectral shift function”, *Canad. J. Math.*, **55**:3 (2003), 449–503.

[2] K. A. Makarov, S. Schmitz, A. Seelmann, “On invariant graph subspaces”, *Integral Equations Operator Theory*, **85**:3 (2016), 399–425.

[3] V. Kostrykin, K. A. Makarov, A. K. Motovilov, “Existence and uniqueness of solutions to the operator Riccati equation. A geometric approach”, *Advances in Differential Equations and Mathematical Physics*, Contemp. Math., **327**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, 181–198.

[4] S. Albeverio, A. K. Motovilov, “Sharpening the norm bound in the subspace perturbation theory”, *Complex Anal. Oper. Theory*, **7**:4 (2013), 1389–1416.

[5] A. Seelmann, “Notes on the subspace perturbation problem for off-diagonal perturbations”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **144**:9 (2016), 3825–3832.

[6] A. Seelmann, “On an estimate in the subspace perturbation problem”, *J. Anal. Math.*, **135**:1 (2018), 313–343.

[7] S. Okubo, “Diagonalization of Hamiltonian and Tamm-Dancoff equation”, *Progr. Theoret. Phys.*, **12** (1954), 603–622.

[8] L. L. Foldy, S. A. Wouthuysen, “On the Dirac theory of spin 1/2 particles and its non-relativistic limit”, *Phys. Rev.*, **78** (1950), 29–36.

[9] А. С. Маркус, В. И. Мацаев, “К спектральной теории голоморфных оператор-функций в гильбертовом пространстве”, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:1 (1975), 76–77.

[10] V. Adamjan, H. Langer, “Spectral properties of a class of operator-valued functions”, *J. Operator Theory*, **33**:2 (1995), 259–277.

[11] V. Adamyan, H. Langer, C. Tretter, “Existence and uniqueness of contractive solutions of some Riccati equations”, *J. Funct. Anal.*, **179**:2 (2001), 448–473.

[12] V. M. Adamyan, H. Langer, R. Mennicken, J. Saurer, “Spectral components of selfadjoint block operator matrices with unbounded entries”, *Math. Nachr.*, **178** (1996), 43–80.

[13] H. Langer, A. Markus, V. Matsaev, C. Tretter, “A new concept for block operator matrices: the quadratic numerical range”, *Linear Algebra Appl.*, **330**:1-3 (2001), 89–112.

[14] R. Mennicken, A. A. Shkalikov, “Spectral decomposition of symmetric operator matrices”, *Math. Nachr.*, **179** (1996), 259–273.

[15] A. K. Motovilov, “Removal of the resolvent-like energy dependence from interactions and invariant subspaces of a total Hamiltonian”, *J. Math. Phys.*, **36**:12 (1995), 6647–6664.

[16] V. Kostrykin, K. A. Makarov, A. K. Motovilov, "A generalization of the tan 2Θ theorem", *Current trends in Operator Theory and Its Applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **149**, Birkhäuser, Basel, 2004, 349–372.

[17] V. Kostrykin, K. A. Makarov, A. K. Motovilov, "On the existence of solutions to the operator Riccati equation and the tan Θ theorem", *Integral Equations Operator Theory*, **51**:1 (2005), 121–140.

[18] C. Davis, W. M. Kahan, "The rotation of eigenvectors by a perturbation. III", *SIAM J. Numer. Anal.*, **7** (1970), 1–46.

[19] S. Albeverio, A. K. Motovilov, "The a priori tan Θ theorem for spectral subspaces", *Integral Equations Operator Theory*, **73**:3 (2012), 413–430.

[20] A. K. Motovilov, A. V. Selin, "Some sharp norm estimates in the subspace perturbation problem", *Integral Equations Operator Theory*, **56**:4 (2006), 511–542.

[21] S. Albeverio, A. K. Motovilov, "Bounds on variation of the spectrum and spectral subspaces of a few-body Hamiltonian", *Procerdings of International Conference "Nuclear Theory in the Supercomputing Era – 2014"*, Pacific National University, Khabarovsk, 2016, 98–106, arXiv: 1410.3231.

[22] S. Albeverio, A. K. Motovilov, A. A. Shkalikov, "Bounds on variation of spectral subspaces under $J$-self-adjoint perturbations", *Integral Equations Operator Theory*, **64**:4 (2009), 455–486.

[23] S. Albeverio, A. K. Motovilov, C. Tretter, "Bounds on the spectrum and reducing subspaces of a $J$-self-adjoint operator", *Indiana Univ. Math. J.*, **59**:5 (2010), 1737–1776.

[24] K. Veselić, "On spectral properties of a class of $J$-selfadjoint operators. I", *Glasnik Mat. Ser. III*, **7** (1972), 229–248.

[25] K. Veselić, "On spectral properties of a class of $J$-selfadjoint operators. II", *Glasnik Mat. Ser. III*, **7** (1972), 249–254.

[26] С. Альбеверио, А. К. Мотовилов, "Операторные интегралы Стилтьеса по спектральной мере и решения некоторых операторных уравнений", Тр. ММО, **72**, № 1, МЦНМО, М., 2011, 63–103.

[27] R. Mennicken, A. K. Motovilov, "Operator interpretation of resonances arising in spectral problems for $2 \times 2$ operator matrices", *Math. Nachr.*, **201** (1999), 117–181.

[28] H. Feschbach, "Unified theory of nuclear reactions", *Ann. Phys.*, **5**:4 (1958), 357–390.

[29] V. Hardt, R. Mennicken, A. K. Motovilov, "Factorization theorem for the transfer function associated with a $2 \times 2$ operator matrix having unbounded couplings", *J. Operator Theory*, **48**:1 (2002), 187–226.

[30] V. Hardt, R. Mennicken, A. K. Motovilov, "Factorization theorem for the transfer function associated with an unbounded non-self-adjoint $2 \times 2$ operator matrix", *Singular Integral Operators, Factorization and Applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **142**, Birkhäuser, Basel, 2003, 117–132.

[31] S. Albeverio, A. K. Motovilov, "On invariant graph subspaces of a $J$-self-adjoint operator in the Feshbach case", *Math. Notes*, **100**:6 (2016), 761–773.

[32] K. O. Friedrichs, "On the perturbation of continuous spectra", *Comm. Pure Appl. Math.*, **1** (1948), 361–406.

[33] G. Hagen, J. S. Vaagen, M. Hjorth-Jensen, "The contour deformation method in momentum space, applied to subatomic physics", *J. Phys. A. Math. Gen.*, **37**:38 (2004), 8991–9021.

[34] E. Balslev, J. M. Combes, "Spectral properties of many-body Schrödinger operators with dilatation-analytic interactions", *Comm. Math. Phys.*, **22** (1971), 280–294.

[35] C. Lovelace, "Practical theory of three-particle states. I. Nonrealtivistic", *Phys. Rev. B*, **135** (1964), 1225–1249.

[36] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. IY. Analysis of Operators*, Academic Press, London, 1978.

[37] V. Hardt, A. Konstantinov, R. Mennicken, "On the spectrum of the product of closed operators", *Math. Nachr.*, **215** (2000), 91–102.

[38] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Лань, СПб., 2010.

**С. Альбеверио**
Universität Bonn, Institut für Angewandte Mathematik, Германия;
Universität Bonn, Interdisziplinäres Zentrum für Komplexe Systeme, Германия
*E-mail*: albeverio@iam.uni-bonn.de

**А. К. Мотовилов**
Объединенный институт ядерных исследований, Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, г. Дубна Московской обл.;
Государственный университет “Дубна”, г. Дубна Московской обл.
*E-mail*: motovilv@theor.jinr.ru

Поступило
08.05.2018
Принято к публикации
17.05.2018