Математические заметки

том 53 выпуск 6 июнь 1993

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Н. Н. Фролов

1. Постановка задачи. Изучается установившееся движение вязкой, несжимаемой, неоднородной жидкости в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей Γ. Область Ω может быть односвязной или многосвязной. В последнем случае $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$, где Γ_i – замкнутые простые не пересекающиеся кривые.

Пусть γ_i – линейно-связное множество на Γ_i. Рассматривается задача

$$\begin{gathered} \rho V_k \frac{\partial V}{\partial x_k} + \operatorname{grad} P = \nu \Delta V + \rho f, \\ \operatorname{div} V = 0,\ \operatorname{div}(\rho V) = 0, \\ V|_\Gamma = V_0,\ \rho|_{\gamma_i} = \rho_i \end{gathered} \tag{1}$$

относительно неизвестных V, ρ, P. Здесь $V(x) = (V_1(x), V_2(x))$ – вектор скорости, $0 < P(x)$ – давление, $0 < \rho(x)$ – плотность жидкости в точке $x = (x_1, x_2) \in \Omega$. Величины V_0, f, ρ_i, ν – заданы: $V_0(x)$ – вектор скорости жидкости на Γ, $f(x)$ – вектор массовых сил на Ω, $0 < \rho_i(x)$ – плотность жидкости на γ_i, $0 < \nu$ – коэффициент вязкости жидкости ($\nu = \mathrm{const}$). В (1) и ниже по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до 2.

Граничные условия для ρ на некоторых γ_i (или даже на всех γ_i) могут отсутствовать; в этом случае считаем, что соответствующие $\gamma_i = \varnothing$. На функцию V_0 налагаются условия

$$\int_{\Gamma_i} (V_0, n)\,ds = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \tag{2}$$

где n – вектор внешней нормали к Γ, и на тех γ_i, где заданы ρ_i, выполняются соотношения

$$(V_0, n)|_{\gamma_i} \neq 0. \tag{3}$$

В данной заметке выясняется вопрос о разрешимости задачи (1) с условиями (2), (3). Нестационарный случай подобной задачи рассмотрен в работе [1].

2. Обобщенное решение задачи (1). Введем необходимые обозначения. Через $C^l(\overline{\Omega})$ обозначим банахово пространство всех l раз непрерывно дифференцируемых (вектор-) функций на $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, $C^l_\alpha(\overline{\Omega})$ – совокупность всех тех элементов из $C^l(\overline{\Omega})$, производные l-го порядка которых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α $(0 < \alpha \leq 1)$. Аналогичным образом определяются пространства $C^l_\alpha(\Gamma)$ функций на Γ.

Через $W^l_p(\Omega)$ $(l \geq 0, p \geq 1)$ обозначим банахово пространство (вектор-) функций на Ω, обобщенные производные которых до l-го порядка суммируемы на Ω со степенью p, $L_p(\Omega) = W^0_p(\Omega)$; $\overset{\circ}{W}{}^l_p(\Omega)$ – подпространство в $W^l_p(\Omega)$, в котором плотно множество $C^l_0(\Omega)$ (вектор-) функций из $C^l(\overline{\Omega})$ с компактным носителем в Ω; $W^{-l}_q(\Omega)$ – сопряженное к $\overset{\circ}{W}{}^l_p(\Omega)$ относительно скалярного произведения в $L_2(\Omega)$ $(1/p + 1/q = 1)$; $H(\Omega)$ $(H^1(\Omega))$ – пополнение соленоидальных векторных полей из $C^1_0(\Omega)$ $(C_1(\overline{\Omega}))$ по норме $L_2(\Omega)$ (W^1_2). Нормы во всех этих пространствах вводятся естественным образом (см. подробности в [2],[3]).

Поскольку функция P однозначно (с точностью до аддитивной постоянной) определяется функциями ρ, V, то в дальнейшем под решением задачи (1) будем понимать пару (ρ, V). В задаче (1), в общем случае, предполагается $V_0 \in L_2(\Gamma)$, $\rho_i \in C(\gamma_i)$, $f \in L_2(\Omega)$.

Пусть пара (ρ, V) – решение задачи (1). Из условия $\operatorname{div} V = 0$ вытекает, что дифференциальная форма

$$\alpha = -V_2\, dx_1 + V_1\, dx_2$$

замкнута в Ω: $d\alpha = \operatorname{div} V\, dx_1 \wedge dx_2 = 0$. Отсюда и из условия (2), которое можно переписать в виде

$$\int_{\Gamma_i} \alpha = 0 \quad (i = \overline{1,n}),$$

получаем, что форма α точна: $\alpha = d\psi$. Таким образом, функция $V \in H^1(\Omega)$ $(V|_\Gamma = V_0)$, удовлетворяющая условию (2), представима в виде $V = \operatorname{rot} \psi = \left\{\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right\}$, $\psi \in W^2_2(\Omega)$. Заметим еще, что для любой $\omega \in C^1(\mathbb{R})$ функция $\rho \in \omega(\psi)$ удовлетворяет уравнению $(V, \nabla \rho) = 0$.

Подберем функцию $\omega \in C(\mathbb{R})$ так, чтобы удовлетворить граничному условию $\omega(\psi)|_{\gamma_i} = \rho_i$.

Условие $\operatorname{rot} \psi|_\Gamma = V_0$ эквивалентно системе равенств

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial n}\right|_\Gamma = -(V_0, \tau)\big|_\Gamma, \quad \left.\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right|_\Gamma = -(V_0, n)\big|_\Gamma, \tag{4}$$

где τ – вектор касательной к Γ, определяющий положительную ориентацию на Γ. Равенства (2) и (4) однозначно (с точностью до аддитивной постоянной) определяют функцию ψ на Γ_i:

$$\psi_i(x) = \psi\big|_{\Gamma_i}(x) = \int_{\Gamma_i(x_i,x)} (V_0, n)\, ds + C_i \quad (x \in \Gamma_i). \tag{5}$$

Здесь $\Gamma_i(x_i, x)$ – часть кривой Γ_i с началом в точке x_i и концом в точке $x \in \Gamma_i$, $C_i = \text{const}$.

Пусть x_i – начало γ_i, если $\gamma_i \neq \varnothing$ и x_i – произвольная фиксированная точка из Γ_i, если $\gamma_i = \varnothing$. Выберем C_i в (5) так, чтобы множества $\psi_i(\Gamma_i)$ не пересекались. Обозначим через ψ_{γ_i} – сужение ψ_i на γ_i, $B_i = \psi_i(\gamma_i)$. Из условия (3) вытекает существование $\psi_{\gamma_i}^{-1}$. Определим функцию ω на $B = \bigcup B_i$ равенством

$$\omega(\xi) = \rho_i(\psi_{\gamma_i}^{-1}(\xi)) \quad (\xi \in B_i). \tag{6}$$

Если $\Gamma \in C^1$, $V_0 \in L_2(\Gamma)$, $\rho_i \in C(\gamma_i)$, то, согласно (3), $\psi_{\gamma_i}^{-1} \in C(B_i)$ и поэтому $\omega \in C(B)$. Продолжим ω с B на все $\mathbb{R}$ до функции $\omega \in C(\mathbb{R})$, $\omega > 0$. Очевидно, так определенная функция ω, удовлетворяет условиям $\omega(\psi)|_{\gamma_i} = \rho_i$, если $\operatorname{rot}\psi|_\Gamma = V_0$.

Пусть $\Gamma \in C^2$, $V_0 \in C^1(\Gamma)$. Тогда $\psi_i \in C^2(\Gamma)$ и $(V_0, \tau) \in C^1(\Gamma)$. Обозначим через ψ_0 функцию из $C^2(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую равенствам

$$\psi_0\big|_{\Gamma_i} = \psi_i, \ \frac{\partial \psi_0}{\partial n}\Big|_\Gamma = -(V_0, \tau)\big|_\Gamma. \tag{7}$$

Тогда, согласно (4), $\operatorname{rot}\psi_0|_\Gamma = V_0$. Выбирая в качестве ω построенную выше функцию, задачу (1) сведем к задаче для определения функции ψ:

$$\begin{gathered}
\omega(\psi)\operatorname{rot}_k \psi \frac{\partial}{\partial x_k} \operatorname{rot}\psi + \operatorname{grad} P = \nu\Delta \operatorname{rot}\psi + \omega(\psi) f, \\
\psi\big|_\Gamma = \psi_0\big|_\Gamma, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_\Gamma = \frac{\partial\psi_0}{\partial n}\Big|_\Gamma.
\end{gathered} \tag{8}$$

Пусть $\psi_0 \in W_2^2(\Omega)$. Обобщенным решением задачи (8) назовем функцию $\psi \in W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{rot}\psi \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{rot}\theta\, dx \\
&\quad - \frac{1}{\nu}\int_\Omega \omega(\psi)\left[\operatorname{rot}_k\psi \operatorname{rot}\psi \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{rot}\theta + f \operatorname{rot}\theta\right] dx = 0 \quad (\theta \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega))
\end{aligned} \tag{9}$$

и условию $\psi-\psi_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$. Пару (ρ, V), где $V = \operatorname{rot}\psi$, $\rho = \omega(\psi)$, при этом назовем обобщенным решением задачи (1). Последнее определение корректно, так как множество вектор-функций $\omega = \operatorname{rot}\theta$, $\theta \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ плотно в $H(\Omega)$ и ортогональное дополнение к $H(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ состоит из потенциальных векторов $\operatorname{grad} P$, $P \in W_2^1(\Omega)$ [3, с. 42].

Если $\Gamma \in C^2$, то существует последовательность гладких срезающих функций $\xi(x,\delta) \in C^2(\overline{\Omega})$, $0 < \delta \le \delta_1$), равных 1 вблизи Γ и нулю в точках Ω, удаленных от Γ на расстояние, большем чем δ и такая, что

$$|\xi(x,\delta)| \le C, \quad \left|\frac{\partial}{\partial x_k}\xi(x,\delta)\right| \le \frac{C}{\delta} \tag{10}$$

с постоянной C не зависящей от $\delta \in (0, \delta_1]$. Положим $\psi_0^\delta(x) = \psi_0(x)\xi(x,\delta)$. Очевидно, $\psi_0^\delta \in C^2(\overline{\Omega})$, $\operatorname{rot}\psi_0^\delta|_\Gamma = V_0$, $\omega(\psi_0^\delta)|_{\gamma_i} = \rho_i$ $(0 < \delta \le \delta_1)$. В задаче (8), (9) сделаем замену $\psi = \psi_0^\delta + \varphi$, где $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^2$ – новая неизвестная функция. Тогда (9) приводится к тождеству

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{rot}(\psi_0^\delta+\varphi)\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{rot}\theta\,dx - \frac{1}{\nu}\int_\Omega \omega(\psi_0^\delta+\varphi)$$
$$\times\left(\operatorname{rot}_k(\psi_0^\delta+\varphi)\operatorname{rot}(\psi_0^\delta+\varphi)\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{rot}\theta + f\operatorname{rot}\theta\right)dx = 0 \tag{11}$$

$(\theta \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega))$ для определения функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$.

Ниже устанавливается, что если ω обладает определенной гладкостью, то доказательство существования обобщенного решения задачи (9) (соответственно, (11)) может быть проведено методами аналогичными тем, которые применяются в случае $\rho = \text{const}$ [3].

3. Сведение задачи (1) к операторному уравнению. Рассмотрим совокупность интегральных тождеств для функции ψ:

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{rot}\psi\frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{rot}\theta\,dx - \lambda\int_\Omega \omega(\psi)\left[\operatorname{rot}_k\psi\operatorname{rot}\psi\frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{rot}\theta\right.$$
$$\left.+ f\operatorname{rot}\theta\right]dx \qquad \left(\psi-\nu\lambda\psi_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^2, \theta \in \overset{\circ}{W}{}_2^2, 0 \le \lambda \le \frac{1}{\nu}\right) \tag{12}$$

и соответствующую совокупность интегральных тождеств для функции φ:

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{rot}\varphi\frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{rot}\theta\,dx = l_{\lambda,\varphi}(\theta) \quad \left(\theta \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega), 0 \le \lambda \le \frac{1}{\nu}\right), \tag{13}$$

где введено обозначение

$$l_{\alpha,\varphi}(\theta) = -\int_\Omega \lambda\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \operatorname{rot}\psi_0^\delta \frac{\partial}{\partial x_k} \operatorname{rot}\theta\,dx + \lambda \int_\Omega \omega(\lambda\nu\psi_0^\delta + \varphi)$$
$$\times \left[\operatorname{rot}_k(\lambda\nu\psi_0^\delta + \varphi) \operatorname{rot}(\lambda\nu\psi_0^\delta + \varphi) \frac{\partial}{\partial x_k} \operatorname{rot}\theta + f \operatorname{rot}\theta\right] dx. \quad (14)$$

Пусть

$$[\varphi,\theta]_2 = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k} \operatorname{rot}\varphi \frac{\partial}{\partial x_k} \operatorname{rot}\theta\,dx = \int_\Omega \Delta\varphi\Delta\theta\,dx,$$

$\|\varphi\|_2 = \sqrt{[\varphi,\varphi]_2}$ – скалярное произведение и норма в $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$. Из оценки

$$|l_{\lambda,\varphi}(\theta)| \le \left[\lambda\nu\|\psi_0^\delta\|_2 + \lambda\|\omega\|_C(\|\lambda\nu\psi_0^\delta + \varphi\|^2_{W_4^1} + \|f\|_{W_2^{-1}})\right] \|\theta\|_2$$

вытекает ограниченность функционала $l_{\lambda,\varphi}$ на $\overset{\circ}{W}{}_2^2$. Поэтому существует оператор $A:\ [0,\frac{1}{\nu}] \times \overset{\circ}{W}{}_2^2 \to \overset{\circ}{W}{}_2^2$, удовлетворяющий равенству

$$l_{\lambda,\varphi}(\theta) = [A(\lambda,\varphi),\theta]_2 \quad \left(\varphi,\theta \in \overset{\circ}{W}{}_2^2, 0 \le \lambda \le \frac{1}{\nu}\right). \quad (15)$$

Теперь тождество (13) эквивалентно совокупности операторных уравнений в $\overset{\circ}{W}{}_2^2$:

$$\varphi = A(\lambda,\varphi)\ (\lambda \in [0,\frac{1}{\nu}], \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)). \quad (16)$$

Лемма 1. *Если $\omega \in C_\alpha(\mathbb{R})$ $(\alpha > 0)$, то оператор*

$$A\colon \left[0,\frac{1}{\nu}\right] \times \overset{\circ}{W}{}_2^2 \to \overset{\circ}{W}{}_2^2$$

вполне непрерывен.

Доказательство. Пусть (λ_n,φ_n) – ограниченная последовательность в $[0,\frac{1}{\nu}] \times \overset{\circ}{W}{}_2^2$. В силу компактности вложения $\overset{\circ}{W}{}_2^2 \subset \overset{\circ}{W}{}_4^1$, можно считать, что (λ_n,φ_n) – фундаментальная в $[0,\frac{1}{\nu}] \times \overset{\circ}{W}{}_4^1$ и $\|\varphi_n - \varphi_m\|_{W_4^1} \le 1$, $|\lambda_n - \lambda_m| \le 1$. Согласно (14)

$$\mathcal{I} \equiv \left[A(\lambda,\varphi_n) - A(\lambda,\varphi_m),\theta\right]_2 = \lambda \int_\Omega [\omega(\lambda\nu\psi_0^\delta + \varphi_n) - \omega(\lambda\nu\psi_0^\delta + \varphi_m)]$$
$$\times \operatorname{rot}_k(\lambda\nu\psi_0^\delta + \varphi_n) \operatorname{rot}(\lambda\nu\psi_0^\delta + \varphi_n) \frac{\partial}{\partial x_k} \operatorname{rot}\theta\,dx + \lambda \int_\Omega \omega(\lambda\nu\psi_0^\delta + \varphi_m)$$
$$\times \operatorname{rot}_k(\varphi_n - \varphi_m) \operatorname{rot}(\lambda\nu + \varphi_n) \frac{\partial}{\partial x_k} \operatorname{rot}\theta\,dx + \lambda \int_\Omega \omega(\lambda\nu\psi_0^\delta + \varphi_m)$$
$$\times \operatorname{rot}_k(\lambda\nu\psi_0^\delta + \varphi_m) \operatorname{rot}(\varphi_n - \varphi_m) \frac{\partial}{\partial x_k} \operatorname{rot}\theta\,dx$$
$$+ \lambda \int_\Omega [\omega(\lambda\nu\psi_0^\delta + \varphi_n) - \omega(\lambda\nu\psi_0^\delta + \varphi_m)] f \operatorname{rot}\theta\,dx.$$

Применяя к интегралам справа неравенство Гёльдера, теоремы вложения для $W_p^l(\Omega)$ и пользуясь ограниченностью (λ, φ_n) в $[0, \frac{1}{\nu}] \times \overset{\circ}{W}{}_2^2$ и условием Гёльдера функции ω, получим оценку

$$|\mathcal{I}| \le \Big[\lambda \|\omega\|_{C_\alpha} \|\varphi_n - \varphi_m\|_{L_{4\alpha}}^\alpha \|\lambda\nu\psi_0^\delta + \varphi_n\|_{W_8^1}^2 + \lambda\|\omega\|_C \|\varphi_n - \varphi_m\|_{W_4^1} \\ \times (\|\lambda\nu\psi_0^\delta + \varphi_n\|_{W_4^1} + \|\lambda\nu\psi_0^\delta + \varphi_m\|_{W_4^1})\Big] \|\theta\|_2 + \lambda\|\omega\|_{C_\alpha}\|f\|_{L_2} \\ \times \|\varphi_n - \varphi_m\|_{L_{4\alpha}}^\alpha \|\theta\|_{W_4^1} \le C\|\varphi_n - \varphi_m\|_{W_4^1}^\alpha \|\theta\|_2 \quad (\theta \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega))$$

с постоянной C, не зависящей от n, m и $\lambda \in [0\frac{1}{\nu}]$. Отсюда равномерно по $\lambda \in [0, \frac{1}{\nu}]$

$$\|A(\lambda, \varphi_n) - A(\lambda, \varphi_m)\|_2 \le C\|\varphi_n - \varphi_m\|_{W_4^1}^\alpha \to 0 \quad (n, m \to \infty). \tag{17}$$

Аналогичным образом устанавливается оценка

$$|[A(\lambda_n, \varphi) - A(\lambda_m, \varphi), \theta]_2| \le |\lambda_n - \lambda_m| \Big[\nu\|\psi_0^\delta\|_2 + \|\omega\|_C \|\nu\lambda_n\psi_0^\delta + \varphi\|_{W_4^1}^2 \\ + |\lambda_m|\,\|\omega\|_C \|\psi_0^\delta\|_{W_4^1} \|\lambda_n\nu\psi_0^\delta + \varphi\|_{W_4^1} + \nu|\lambda_m|\,\|\omega\|_C \|\psi_0^\delta\|_{W_4^1} \|\nu\lambda_m\psi_0^\delta + \varphi\|_{W_4^1} \|\theta\|_2 \\ + |\lambda_n - \lambda_m|^\alpha \nu^\alpha |\lambda_m| \|\omega\|_{C_\alpha} \|\psi_0^\delta\|_{L_{4\alpha}}^\alpha \|\nu\lambda_n\psi_0^\delta + \varphi\|_{W_8^1}^2 \|\theta\|_2\Big] + \big[|\lambda_n - \lambda_m|\,\|\omega\|_C \\ + |\lambda_m|\nu^\alpha \|\omega\|_{C_\alpha} |\lambda_n - \lambda_m|^\alpha \|\psi_0^\delta\|_{L_{4\alpha}}^\alpha\big] \|f\|_{L_2} \|\theta\|_{W_4^1} \\ \le C_1|\lambda_n - \lambda_m|^\alpha \|\theta\|_2 \quad (\theta \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega))$$

с постоянной C_1, зависящей лишь от R, для всех $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^2$, $\|\varphi\|_2 \le \mathbb{R}$. Из этой оценки и (17) вытекает нужное соотношение

$$\|A(\lambda_n, \varphi_n) - A(\lambda_m, \varphi_m)\|_2 \to 0 \quad (n, m \to \infty).$$

Лемма доказана.

4. Теорема существования обобщенных решений. Докажем вначале следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $\omega \in C(\mathbb{R})$. *Тогда всевозможные решения уравнения* (16) *ограничены по* $\lambda \in [0, \frac{1}{\nu}]$.

Доказательство. Пусть φ – решение уравнения (16); тогда для φ справедливо тождество (13). Положим в последнем $\theta = \varphi$ и воспользуемся равенством

$$\int_\Omega \omega(\lambda\nu\psi_0^\delta + \varphi)\operatorname{rot}_k(\lambda\nu\psi_0^\delta + \varphi)\operatorname{rot}\varphi\frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{rot}\varphi\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \omega(\lambda\nu\psi_0^\delta + \varphi)\operatorname{rot}_k(\lambda\nu\psi_0^\delta + \varphi)\frac{\partial}{\partial x_k}|\operatorname{rot}\varphi|^2\,dx = 0, \tag{18}$$

которое проверяется непосредственно для $\omega \in C^1(\mathbb{R})$, а в случае $\omega \in C(\mathbb{R})$ получается предельным переходом. Тогда

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{rot}\varphi\right|^2 dx + \lambda\nu\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{rot}\psi_0^\delta\frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{rot}\varphi\,dx$$
$$-\lambda^2\nu\int_\Omega \omega(\lambda\nu\psi_0^\delta + \varphi)\operatorname{rot}_k(\lambda\nu\psi_0^\delta + \varphi)\times\operatorname{rot}\psi_0^\delta\frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{rot}\varphi\,dx$$
$$-\lambda\int_\Omega \omega(\lambda\nu\psi_0^\delta + \varphi)f\operatorname{rot}\varphi\,dx.$$

Отсюда вытекает оценка

$$\|\varphi\|_2^2 \le \nu\lambda\|\psi_0^\delta\|_2\|\varphi\|_2 + \nu\lambda^2\|\omega\|_C\Big[\lambda\nu\|\psi_0^\delta\|_{W_4^1}\|\varphi\|_2$$
$$+\int_\Omega |\operatorname{rot}_k\varphi|\,|\operatorname{rot}\psi_0^\delta|\left|\frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{rot}\varphi\right|dx\Big] + \lambda\|\omega\|_C\|f\|_{L_2}\|\varphi\|_{W_2^1}. \tag{19}$$

Покажем, что всевозможные решения $\psi = \psi_\lambda$ задачи (12) ограничены в совокупности по $\lambda \in [0, \frac{1}{\nu}]$.

Полагая противное, найдем последовательность $\lambda_n \in [0, \frac{1}{\nu}]$, $\lambda_n \to \lambda_0$ такую, что $\|\psi_{\lambda_n}\|_{W_2^2} \to \infty$ $(n \to \infty)$. Рассмотрим функции

$$\varphi_n(x,\delta) = \psi_{\lambda_n}(x) - \nu\lambda_n\psi_0^\delta(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega). \tag{20}$$

При каждом $\delta \in (0, \delta_1]$ имеем $\|\varphi_n\|_2 = N_n \to \infty$ и функции φ_n удовлетворяют тождеству (13) с $\lambda = \lambda_n$. Полагая в (19) $\varphi = \varphi_n$, $\lambda = \lambda_n$, поделим полученное неравенство на N_n^2 и результат запишем в терминах функции $\overline{\varphi_n} = \frac{1}{N}\varphi_n$:

$$1 \le \frac{\nu\lambda_n}{N_n}\|\psi_0^\delta\|_2 + \frac{\nu^2\lambda_n^3}{N_n}\|\omega\|_C\|\psi_0^\delta\|_{W_4^1} + \nu\lambda_n^2\|\omega\|_C$$
$$\times\int_\Omega |\operatorname{rot}_k\overline{\varphi_n}|\,|\operatorname{rot}\psi_0^\delta|\left|\frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{rot}\overline{\varphi_n}\right|dx + \frac{d\lambda_n}{N_n}\|\omega\|_C\|f\|_{L_2}, \tag{21}$$

где d – диаметр области Ω. Оценим входящий сюда интеграл, пользуясь неравенствами (10):

$$\int_\Omega |\operatorname{rot}_k \overline{\varphi_n}|\,|\operatorname{rot}\psi_0^\delta|\left|\frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{rot}\overline{\varphi_n}\right| dx$$
$$\leq \frac{c_1}{\delta}\left(\int_{\Omega_\delta}|\operatorname{rot}\overline{\varphi_n}|^2\,dx\right)^{1/2} + c_2\left(\int_{\Omega_\delta}|\operatorname{rot}\psi_0|^4\,dx\right)^{1/4}$$

Здесь Ω_δ – пограничная полоса в Ω ширины δ; c_1, c_2 – абсолютные постоянные. В силу равенства $\|\overline{\varphi_n}\|_2 = 1$ можно считать, что $\overline{\varphi_n} \to \overline{\varphi} \in \overset{\circ}{W}{}_2^2$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}_2^2$ и сильно в $\overset{\circ}{W}{}_2^1$. Подставляя последнюю оценку для интеграла в (21) и переходя затем к пределу при $n \to \infty$, находим

$$1 \leq \lambda_0^2\nu\|\omega\|_C\left[\frac{c_1}{\delta}\left(\int_{\Omega_\delta}|\operatorname{rot}\overline{\varphi}|^2\,dx\right)^{1/2} + c_2\left(\int_{\Omega_\delta}|\operatorname{rot}\psi_0|^4\,dx\right)^{1/4}\right]. \tag{22}$$

Как и в [3, с. 151] показывается, что функция $\overline{\varphi}$ на зависит от $\delta \in (0, \delta_1]$. Воспользуемся оценкой

$$\left(\int_{\Omega_\delta}|\operatorname{rot}\overline{\varphi}|^2\,dx\right)^{1/2} \leq c_3\delta\left(\int_{\Omega_\delta}|\frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{rot}\overline{\varphi}|^2\,dx\right)^{1/2}$$

справедливой для $\overline{\varphi} \in \overset{\circ}{W}{}_2^2$, если $\Gamma \in C^2$ и в неравенстве (22), с учетом этой оценки, перейдем к пределу при $\delta \to 0$; получим противоречие: $1 \leq 0$. Из ограниченности решений ψ_λ задачи (12) вытекает, в силу (20), ограниченность решений φ_λ задачи (13). Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma \in C^2$, $f \in L_2(\Omega)$, $V_0 \in C^1(\Gamma)$, $\rho_i \in C_\alpha(\gamma_i)$ $(\alpha > 0)$ *и выполнены условия* (2), (3).

Тогда существует обобщенное решение задачи (1), *причем* $V \in H^1(\Omega)$, $\rho \in C_\beta(\overline{\Omega})$ $(\beta < \alpha)$.

Доказательство. Поскольку $A(0,\varphi) = 0$, то из лемм 1, 2, и принципа Лере–Шаудера задача (11) имеет по крайней мере одно решение $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$. Возвращаясь к исходной задаче (1), получаем, что $V = \operatorname{rot}(\psi_0^\delta + \varphi) \in H^1(\Omega)$, $V|_\Gamma = V_0$.

Далее, функции ψ_i из (5) при $\Gamma \in C^2$, $V_0 \in C^1(\Gamma)$ принадлежат $C^2(\Gamma)$. Поэтому из условия $\rho_i \in C_\alpha(\gamma_i)$ следует, что функция $\omega(\xi)$, определенная формулой (6), принадлежит $C_\alpha(B)$. Продолжая ее на $\mathbb{R}$ до функции из $C_\alpha(\mathbb{R})$, из вложения $W_2^2(\Omega) \subset C_\beta(\overline{\Omega})$ $(\beta < 1)$), получаем $\omega(\psi) \in C_\beta(\overline{\Omega})$ $(\beta < \alpha, \psi \in W_2^2)$. Таким образом, $\rho = \omega(\psi_0^\delta + \varphi) \in C_\beta(\overline{\Omega})$. Кроме того, по построению ω имеем $\rho|_{\gamma_i} = \rho_i$.

Теорема доказана.

5. Гладкость обобщенных решений. Имеет место теорема о повышении гладкости.

Теорема 2. *Пусть* $\Gamma \in C^{k+3}$, $V_0 \in C^{k+2}(\Gamma)$, $f \in W_p^k(\Omega)$ $(p \geq 2)$, $\rho_i \in C_\alpha^k(\gamma_i)$ $(k,\ \alpha \geq 0,\ k+\alpha > 0)$ *и выполнены условия* (2), (3).

Тогда существует обобщенное решение задачи (1), *причем* $V \in H^1(\Omega) \cap W_p^{k+2}(\Omega)$, $\rho \in C_\alpha^k(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ – решение задачи (11). Тогда из (15) и (16)

$$(\Delta^2\varphi, \theta) = [\varphi, \theta]_2 = \left[A\left(\frac{1}{\nu}, \varphi\right), \theta\right]_2 = l_{\frac{1}{\nu}, \varphi}(\theta) \quad (\theta \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)), \tag{23}$$

где (g, θ) – значение линейного функционала g на элементе θ. Покажем, что при $\psi_0^\delta \in W_2^3(\Omega)$, $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ функционал $l_{\frac{1}{\nu},\varphi}(\theta)$ продолжается с $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ на $\overset{\circ}{W}{}_s^1(\Omega)$ $(s > 2)$ до линейного непрерывного функционала. Для этого, в силу плотности вложения $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}_s^1(\Omega)$ $(s > 2)$, достаточно установить оценку

$$\left|l_{\frac{1}{\nu},\varphi}(\theta)\right| \leq C_s \|\theta\|_{W_s^1} \ (\theta \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega), s > 2). \tag{24}$$

Пользуясь гладкостью ψ_0, φ и равенством

$$\int_\Omega \omega(\psi) \operatorname{rot}_k \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\, dx = 0 \quad (\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)),$$

которое доказывается аналогично (18), представим $l_{\frac{1}{\nu},\varphi}(\theta)$ в виде

$$\begin{aligned} l_{\frac{1}{\nu},\varphi}(\theta) = \int_\Omega \operatorname{rot} \Delta\psi_0^\delta \operatorname{rot}\theta\, dx - \frac{1}{\nu}\int_\Omega \omega(\psi_0^\delta + \varphi) \\ \times \left[\operatorname{rot}_k(\psi_0^\delta + \varphi)\frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{rot}(\psi_0^\delta + \varphi) - f\right] \operatorname{rot}\theta\, dx. \end{aligned} \tag{25}$$

Откуда

$$\begin{aligned} \left|l_{\frac{1}{\nu},\varphi}(\theta)\right| \leq \|\psi_0^\delta\|_{W_2^3}\|\theta\|_{W_2^1} + \frac{1}{\nu}\|\omega\|_C \Big[\|\psi_0^\delta + \varphi\|_{W_2^2} \\ \times \|\psi_0^\delta + \varphi\|_{W_{s'}^1}\|\theta\|_{W_s^1} + \|f\|_{L_2}\|\theta\|_{W_2^1}\Big] \quad \left(\tfrac{1}{s} + \tfrac{1}{s'} = 1\right). \end{aligned}$$

Так как $\psi_0^\delta + \varphi \in W_2^2$, то $\psi_0^\delta + \varphi \in W_{s'}^2$, при любом s' и, следовательно, согласно последней оценки, справедливо неравенство (24) при любом $s > 2$.

Из (24) вытекает представление $[A(\frac{1}{\nu}, \varphi)\theta]_2 = (F, \theta)$ $(\theta \in \overset{\circ}{W}{}_s^1))$ с некоторым $F \in W_r^{-1}$ $(1/s + 1/r = 1)$ и, согласно (23), φ является решением задачи Дирихле

$$\Delta^2\varphi = F, \quad \varphi\big|_\Gamma = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_\Gamma = 0. \tag{26}$$

Поскольку для $\Gamma \in C^{k+4}$ оператор $\mathfrak{U}$ задачи (26) устанавливает изоморфизм
$\overset{\circ}{W}{}_r^{k+4} \cap \overset{\circ}{W}{}_r^2$ на W_r^k [2, с. 505], то $\varphi \in W_r^3$ $(1 < r < 2)$.

Пусть $\psi_0^\delta \in W_p^3(\Omega)$, $f \in L_p(\Omega)$ $(p \geq 2)$. Пользуясь вложениями

$$W_r^{k+2} \subset C^k(r > 1), \quad W_r^{k+1} \subset W_p^k \left(p \leq 2r/(2-r)\right) \tag{27}$$

и тем, что $\varphi \in W_r^3$ $(1 < r < 2)$, вновь оценим $l_{\frac{1}{\nu},\varphi}$:

$$|l_{\frac{1}{\nu},\varphi}(\theta)| \leq \Big[\|\psi_0^\delta\|_{W_p^3} + \frac{1}{\nu}\|\omega\|_C \left(\|\psi_0^\delta + \varphi\|_{C^1}\|\psi_0^\delta + \varphi\|_{W_p^2} + \|f\|_{L_p}\right)\Big]\|\theta\|_{W_q^1}$$

$(1/p + 1/q = 1)$. Из этой оценки вытекает, что элемент F в задаче (26) принадлежит W_p^{-1} и, следовательно, по свойству оператора $\mathfrak{U}$, $\varphi \in W_p^3$.

Аналогичным образом устанавливается, что если $\omega \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in W_p^1$, $\psi_0^\delta \in W_p^4$, то $\varphi \int W_p^4$. Для чего достаточно показать, что $F \in L_p(\Omega)$. Последнее же следует из того, что в данном случае равенство (25) можно представить в виде $l_{\frac{1}{\nu},\varphi}(\theta) = (F, \theta)$, где

$$F = -\Delta^2\psi_0^\delta + \frac{1}{\nu}\operatorname{rot}\left\{\omega(\psi_0^\delta + \varphi)\left[\operatorname{rot}_k(\psi_0^\delta + \varphi)\frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{rot}(\psi_0^\delta + \varphi) - f\right]\right\}.$$

Отсюда, с учетом (27), получаем $F \in L_p(\Omega)$.

С повышением гладкости ω, f, ψ_0^δ, на соответствующее число единиц повышается гладкость решения φ, что устанавливается последовательно с использованием вложений (27) и свойства оператора $\mathfrak{U}$: если $f \in W_p^k$, $\omega \in C_\alpha^k$, $\psi_0^\delta \in W_p^{k+3}$ $(p \geq 2, k \geq 0)$, то $\varphi \in W_p^{k+3} \cap \overset{\circ}{W}{}_2^2$. Перепишем этот результат в терминах задачи (1).

Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда n, $\tau \in C^{k+2}(\Gamma)$ и поэтому функции ψ_i из (5) принадлежат $C^{k+3}(\Gamma_i)$. Отсюда следует существование функций $\xi(x, \delta) \in C^{k+3}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих (10). Поэтому $\psi_0^\delta \in C^{k+3}(\overline{\Omega})$.

Если еще $\rho_i \in C^k_\alpha(\gamma_i)$, то функция $\omega(\xi)$, определенная равенством (6), принадлежит $C^k_\alpha(B)$ и поэтому существует ее продолжение на $\mathbb{R}$, принадлежащее тому же классу. Для такой ω имеем $\omega(\psi^\delta_0 + \varphi) \in C^k_\alpha(\overline{\Omega})$ при $\varphi \in W^{k+3}_p(\Omega)$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $\Gamma \in C^3$, $V_0 \in C^2_\alpha(\Gamma)$, $f \in C_\alpha(\overline{\Omega})$, $\rho_i \in C_\alpha(\gamma_i)$ $(\alpha > 0)$. *Тогда обобщенное решение задачи* (1) *является классическим:*

$$V \in C^2_\alpha(\overline{\Omega}), \qquad \rho \in C_\alpha(\overline{\Omega}), \qquad P \in C^1_\alpha(\overline{\Omega}).$$

Доказательство. В условиях теоремы 3 обобщенное решение задачи 1, согласно теореме 2, обладает гладкостью: $\rho \in C_\alpha(\overline{\Omega})$, $V \in W^2_p$ $(1 < p$ – любое). Кроме того, функция V удовлетворяет линейной задаче

$$-\nu\Delta V + \operatorname{grad} P = F, \qquad \operatorname{div} V = 0, \qquad V|_\Gamma = V_0 \tag{28}$$

где $F = \rho\big(f - V_k \frac{\partial V}{\partial x_k}\big)$. Из вложения $W^2_p \subset C^1_\beta$ $(\beta = 1 - 2/p, p > 2)$ вытекает, что $F \in C_\alpha(\overline{\Omega})$. Известно [3, с.103], что при любых $F \in C_\alpha(\overline{\Omega})$, $V_0 \in C^2_\alpha(\overline{\Omega})$ (если $\Gamma \in C^2_\alpha$), задача (28) однозначно разрешима в $C^2_\alpha(\overline{\Omega})$. Следовательно, $V \in C^2_\alpha(\overline{\Omega})$. Теорема доказана.

В случае, если некоторые γ_i не связны, являются объединением конечного числа не пересекающихся кривых $\gamma_{ik} \subset \Gamma_i$ и множества $\psi_i(\gamma_{ik}) = B_{ik}$ при различных k не пересекаются, то исследование соответствующей задачи (1) может быть проведено по изложенной схеме. Функция ω при этом определяется, аналогично (6), равенством

$$\omega(\xi) = \rho_{ik}\big(\psi^{-1}_{\gamma_{ik}}(\xi)\big) \qquad (\xi \in B_{ik}),$$

где $\psi_{\gamma_{ik}}$ – сужение ψ_i на γ_{ik}, ρ_{ik} – заданные значения ρ на γ_{ik}. Заметим еще, что на тех γ_i, где $(V_0, n)\big|_{\gamma_i} = 0$ функции ψ_i из (5), а следовательно и ρ_i, постоянны.

Дальневосточный государственный университет

Поступило
04.06.92

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Кажихов А.В. Разрешимость начально-краевой задачи для уравнений движения неоднородной вязкой несжимаемой жидкости // ДАН СССР. 1974. Т. 216. №5. С. 1008–1010.

[2] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

[3] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Мир, 1970.