Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

К. М. Чудинов, О точности достаточных условий устойчивости дифференциальных уравнений с запаздыванием, *Изв. ИМИ УдГУ*, 2012, выпуск 1, 159–160

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.82
25 января 2025 г., 14:36:56

УДК 517.929

© ***К. М. Чудинов***

О ТОЧНОСТИ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Для линейных скалярных неавтономных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и неотрицательным коэффициентом исследуются условия устойчивости, имеющие вид оценки сверху интеграла от коэффициента по отрезку определенной длины. Показано, что точной верхней гранью множества значений интеграла, гарантирующих устойчивость при некоторой длине промежутка интегрирования, является число 2. Аналогичный результат получен для разностного уравнения.

Ключевые слова: уравнение с последействием, устойчивость, точные условия.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t - r(t)) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

для которого ниже везде полагаем $a(t) \geqslant 0$ и $r(t) \geqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$.

В случае $a(t) \equiv \alpha$, $r(t) \equiv \omega$ следующий факт давно является математическим фольклором: если $0 < \alpha\omega < \pi/2$, то уравнение экспоненциально устойчиво; если $0 \leqslant \alpha\omega \leqslant \pi/2$, то устойчиво по Ляпунову; если $\alpha\omega > \pi/2$, то неустойчиво. Этот результат обобщен [1] на случай $r(t) = \omega$, $a(t) \equiv a(t + \omega)$: в частности, необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости оказывается справедливость неравенств $0 < \int_0^\omega a(t)\,dt < \pi/2$.

Первый эффективный признак устойчивости уравнения с переменным запаздыванием был получен А.Д. Мышкисом [2]: уравнение (1) является асимптотически устойчивым, если $\inf_{t\geqslant 0} a(t) > 0$ и $\sup_{t\geqslant 0} a(t) \sup_{t\geqslant 0} r(t) < 3/2$. Это условие устойчивости, в отличие от приведенных выше, не является необходимым, но константа $3/2$ является *точной*: если увеличить ее на любое число $\varepsilon > 0$, утверждение об устойчивости становится, вообще говоря, неверным. Результат Мышкиса многократно переоткрывался, уточнялся и обобщался. Несколько основных достижений такого рода рассмотрены работе [3], авторы которой, как и некоторые другие исследователи в последние годы, рассматривают константы $\pi/2$ и $3/2$ как фундаментальные и поднимают вопросы о существовании настолько же фундаментальных констант для *необходимых* условий неустойчивости.

Не отрицая содержательности таких вопросов, заметим, что известные на сегодняшний день эффективные достаточные условия устойчивости уравнения (1), на наш взгляд, по-прежнему являют собой скорее набор случайных удач, чем единую картину.

Рассмотрим уравнение

$$x(n + 1) - x(n) + b(n)x(n - h(n)) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

являющееся дискретным аналогом уравнения (1). Здесь $b(n) \geqslant 0$, $h(n) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. К сегодняшнему дню получено несколько точных достаточных условий устойчивости уравнения (2) в виде оценок сверху суммы коэффициентов $b(n)$ на промежутке определенной длины (возможно, зависящей от n). В качестве верхних границ области устойчивости выступают как константы $\pi/2$ и $3/2$, так и другие числа. Обратим внимание на следующий результат [4]. Пусть $h(n) \equiv \rho$. Тогда уравнение (2) асимптотически устойчиво, если $\sum_{n=0}^\infty b(n) = \infty$ и $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{n-2\rho}^n b(k) < 2$.

Этот результат соотнесем со следующим [5] признаком устойчивости для периодического уравнения вида (1). Пусть $r(t) = \omega$ и $a(t) \equiv a(t+2\omega)$. Уравнение (1) асимптотически устойчиво, если $0 < \int_0^{2\omega} a(t)\,dt < 2$.

Нетрудно показать, что оба последних признака устойчивости являются точными. Например, в первом случае положим

$$b(n) = \begin{cases} \frac{2+\varepsilon}{\rho+1}, & n = k(2\rho + 1), \ldots, k(2\rho + 1) + \rho, \\ 0, & n = k(2\rho + 1) + \rho + 1, \ldots, (k + 1)(2\rho + 1) - 1. \end{cases}$$

Имеем: $\sum_{n=0}^{\infty} b(n) = \infty$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{n-2\rho}^{n} b(k) = 2+\varepsilon$, решения неограниченно растут.

Совпадение констант 2 не случайно. Результат настоящей работы состоит в обобщении последних двух теорем на общие случаи уравнений (1) и (2) с ограниченным запаздыванием.

Т е о р е м а 1. *Уравнение* (1) *устойчиво по Ляпунову, если* $\sup_{t\geqslant 0} \int_{t-2\omega}^{t} a(s)\,ds \leqslant 2$*; экспоненциально устойчиво, если* $\int_0^{\infty} a(t)\,dt = \infty$ *и* $\overline{\lim}_{t\to\infty} \int_{t-2\omega}^{t} a(s)\,ds < 2$.

Замечательно, что константа 2 точна в более сильном смысле, чем использовался выше: ее нельзя увеличить с сохранением устойчивости, даже увеличив длину запаздывания.

Т е о р е м а 2. *Для любых* $\Omega > 2\omega$ *и* $\varepsilon > 0$ *найдется неустойчивое уравнение* (1), *для которого* $\overline{\lim}_{t\to\infty} \int_{t-\Omega}^{t} a(s)\,ds < 2+\varepsilon$.

Аналогами теорем 1 и 2 являются следующие.

Т е о р е м а 3. *Уравнение* (2) *устойчиво по Ляпунову, если* $\sup_n \sum_{k=n-2\rho}^{n} a(k) \leqslant 2$*; экспоненциально устойчиво, если* $\sum_{k=0}^{\infty} a(n) = \infty$ *и* $\sup_n \sum_{k=n-2\rho}^{n} a(k) < 2$.

Т е о р е м а 4. *Для любых* $\Omega \geqslant 2\rho+1$ *и* $\varepsilon > 0$ *найдется неустойчивое уравнение* (2), *для которого* $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=n-\Omega}^{n} a(k) < 2+\varepsilon$.

Отметим некоторый недостаток приведенных теорем. Для этого приведем наиболее сильную из теорем о 3/2 для уравнения (1) [6]: неравенство $\overline{\lim} \int_{t-r(t)}^{t} a(s)\,ds < 3/2$ влечёт оценку функции Коши (по другой терминологии, фундаментального решения) уравнения (1) в виде неравенства $|C(t,s)| \leqslant N \exp\left\{-\alpha \int_s^t a(\tau)\,d\tau\right\}$, где $N, \alpha > 0$. Зависимость длины промежутка интегрирования от t, в частности, позволяет рассматривать уравнения с неограниченным запаздыванием. Длина промежутка в теореме 1 постоянна, хотя ее доказательство показывает, что это условие можно снять. Вопрос в том, как сделать это оптимальным образом.

Теоремы 1–4 естественным образом обобщаются на случай уравнения с несколькими запаздываниями.

Список литературы

1. Зверкин А.М. К теории линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами // ДАН СССР. 1959. Т. 128. № 5. С. 882–885.
2. Мышкис А.Д. О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Математический сборник. 1951. Т. 28. № 3. С. 641–658.
3. Berezansky L., Braverman E. On some constants for oscillation and stability of delay equations // Proc. Amer. Math. Soc. 2011. Vol. 139. № 11. P. 4017—4026.
4. Yu J.S., Cheng S.S. A stability criterion for a neutral difference equation with delay // Appl. Math. Lett. 1994. Vol. 7. № 6. P. 75-80.
5. Шиманов С.Н., Долгий Ю.Ф. О существовании зоны устойчивости для одного уравнения с запаздыванием // Устойчивость и нелинейные колебания: межвуз. сб. научн. тр. Уральск. гос. ун-та. Свердловск, 1988. С. 11–18.
6. Малыгина В.В. Некоторые признаки устойчивости уравнения с запаздывающим аргументом // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 10. С. 1716–1723.

Поступила в редакцию 15.02.2012

K. M. Chudinov

On sharpness of sufficient conditions of stability for differential equations with delay

For stability of nonautonomous linear scalar equations with retarded argument and nonnegative coefficient, we consider conditions that have the form of an upper estimate for the integral of the coefficient over a certain interval. It is demonstrated that 2 is the least upper bound for the set of values of the integral that guarantee stability for some lenth of the interval of integration. The analogous result is obtained for a difference equation.

Keywords: differential equation with several delays, stability, effective conditions, explicit conditions.

Mathematical Subject Classifications: 34K20, 39A30

Чудинов Кирилл Михайлович, к.ф.-м.н., доцент, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский пр., 29. E-mail: cyril@list.ru

Chudinov Kirill Mikhailovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Perm National Research Polytechnic University, Komsomolskii pr., 29, Perm, 614990, Russia