

# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Yu. V. Mironov, N. S. Razina, Solving the transient problem for equations of thermohydraulics in a heated channel,  
*TVT*, 1982, Volume 20, Issue 3, 496–501

<https://www.mathnet.ru/eng/tvt6369>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.81

April 21, 2025, 13:44:25



УДК 621.039.5:518.6

## МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОГИДРАВЛИКИ В ОБОГРЕВАЕМОМ КАНАЛЕ

*Мионов Ю.В., Разина Н.С.*

Анализируется постановка нестационарной краевой задачи для уравнений гидравлического приближения в обогреваемом канале. Предлагается эффективный алгоритм численного ее решения.

Одним из важных моментов исследования динамики переходных процессов в ядерных энергетических установках является решение нестационарных уравнений гидравлического приближения, определяющих течение жидкости (газа) в обогреваемом канале. При этом для сложных гидравлических систем и для многовариантных расчетов существенными становятся экономичность и эффективность используемого алгоритма, которые помимо чисто вычислительных аспектов зависят от физических основ математической модели, заложенной в расчеты.

Система уравнений неразрывности, движения, энергии и состояния для одномерного течения двухпараметрической среды в вертикальном цилиндрическом канале имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u^2) + \frac{\partial p}{\partial z} = -9,81\rho - \frac{4\tau_{тр}}{d}, \quad (2)$$

$$\rho \frac{di}{dt} - \frac{dp}{dt} = \frac{4}{d_r} (q + \tau_{тр} u), \quad (3)$$

$$\rho = \rho(p, i), \quad (4)$$

где  $t$  — время;  $z$  — пространственная координата;  $p, i, \rho$  — давление, энтальпия и плотность среды соответственно;  $u$  — скорость;  $\tau_{тр}$  — напряжения трения;  $q$  — тепловой поток;  $d_r$  — гидравлический диаметр канала.

Система (1)–(4), гиперболическая по времени, имеет, как известно, три характеристики, наклоны которых определяются скоростями  $u, u \pm c_s$ , где  $c_s$  — адиабатическая скорость звука. Однако в большинстве практически важных случаев переходных режимов энергетических аппаратов характерные масштабы времени намного больше времени распространения звуковых колебаний в системе, что позволяет считать скорость звука в рассматриваемой системе бесконечно большой. Математически это соответствует вырождению двух характеристик в горизонтальные прямые и достигается путем некоторой деформации исходной системы уравнений. Достаточными условиями для достижения этой цели являются учет в уравнении состояния (4) только зависимости плотности от энтальпии и пренебрежение в уравнении энергии (3) полной производной от давления, что эквивалентно соотношениям

$$(\partial\rho/\partial p)_i = 0, \quad (\partial S/\partial p)_i = 0, \quad (5)$$

где  $S$  — энтропия среды.

С учетом соотношений (5), вводя безразмерные переменные

$$\tau = tG_0/(\rho_0 L), \quad \xi = z/L, \quad g = \rho u/G_0, \quad \pi = p\rho_0/G_0^2, \\ h = i/i_0, \quad \rho' = \rho/\rho_0,$$

где  $G_0$ ,  $\rho_0$ ,  $i_0$  — массовая скорость и начальные значения плотности и энтальпии среды в стационарном режиме,  $L$  — длина канала, систему уравнений (1)–(4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \partial \rho / \partial \tau + \partial g / \partial \xi &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{g^2}{\rho'} \right) + \frac{\partial \pi}{\partial \xi} &= -\kappa \frac{|g|g}{\rho'} - \gamma \rho', \\ \partial h / \partial \tau + u' \partial h / \partial \xi &= q' / \rho', \quad \rho' = \rho'(h). \end{aligned} \quad (6)$$

Безразмерные параметры в (6) определены следующим образом:

$$\kappa = \frac{\lambda L}{2d_r}, \quad \gamma = 9,81 \frac{\rho_0^2 L}{G_0^2}, \quad q' = \frac{4qL}{(i_0 d_r G_0)}.$$

Опуская далее индекс (штрих) у безразмерных величин, отметим, что система (6) имеет единственную наклонную характеристику

$$d\xi/d\tau = u, \quad (7)$$

вдоль которой возмущения по энтальпии распространяются со скоростью потока, и баланс энергии принимает вид

$$u \partial i / \partial \xi = q / \rho. \quad (8)$$

В силу этого граничные условия по энтальпии на концах канала задаются только в те моменты, когда поток в концевых сечениях направлен внутрь канала. Естественным видом еще двух граничных условий является задание давления на концах канала

$$\pi(0, \tau) = \pi_{\text{вх}}(\tau), \quad \pi(1, \tau) = \pi_{\text{вых}}(\tau), \quad (9)$$

где  $\pi_{\text{вх}}$  и  $\pi_{\text{вых}}$  — заданные функции времени, причем без ограничения общности можно считать  $\pi_{\text{вых}} = 0$ .

Дальнейшее изложение посвящено разработке эффективного алгоритма численного интегрирования системы (6), который должен обеспечить для нелинейной системы уравнений термогидравлики решение краевой задачи (9), включая режимы с опрокидыванием циркуляции в канале. В основу развиваемого подхода положены идеи [1]. Решение нелинейных уравнений на каждом временном слое осуществляется последовательными приближениями, причем на каждой итерации решается линейная система, полученная квазилинеаризацией уравнения движения. Краевая задача для такой линеаризованной системы решается прогонкой после применения преобразования Рунккати, которое является удобным приемом для краевых задач гидравлики, характерной особенностью которых в большинстве случаев является задание условий по давлению на обоих концах канала и отсутствие граничных условий по расходу.

Разобьем длину канала точками  $\xi_j$  ( $j=0, 1, 2, \dots, N$ ) с шагом  $\Delta \xi$  и введем следующие обозначения для сеточных функций в узлах:

$$g(\xi_j, \tau) = g_j, \quad g(\xi_j, \tau - \Delta \tau) = \bar{g}_j \text{ и т. д.} \quad (10)$$

Для уравнения энергии используем его характеристическую форму (7), (8). Положение конца характеристики, проведенной из точки  $(\xi_j, \tau)$ , на нижнем по времени слое определяется величиной

$$\delta \xi_j = u_j \Delta \tau. \quad (11)$$

Тогда, комбинируя (7) и (8) для энтальпии, получаем

$$h_j = \bar{h}_j + \frac{q_j}{\rho_j} \Delta \tau, \quad (12)$$

где  $h_j^*$  вычисляется на нижнем слое в основании характеристики путем линейной интерполяции между соседними узлами, а  $q_j^*$  — посередине рассматриваемого отрезка характеристики.

Уравнения неразрывности и движения аппроксимируются симметричными разностями между двумя соседними узлами сетки по неявной схеме

$$(\rho_{j-1/2} - \bar{\rho}_{j-1/2}) / \Delta \tau + (g_j - g_{j-1}) / \Delta \xi = 0, \quad (13)$$

$$\frac{g_{j-1/2} - \bar{g}_{j-1/2}}{\Delta \tau} + \frac{u_j g_j - u_{j-1} g_{j-1}}{\Delta \xi} + \frac{\pi_j - \pi_{j-1}}{\Delta \xi} = -\kappa \frac{|g_{j-1/2}| g_{j-1/2}}{\rho_{j-1/2}} - \gamma \rho_{j-1/2}, \quad (14)$$

где переменные в средней точке берутся как среднеарифметические их значений в узлах  $g_{j-1/2} = 0,5(g_j + g_{j-1})$  и т. д. Граничные условия имеют следующий вид:

$$h_0 = h_{\text{вх}}(\tau) \text{ при } u_0 > 0, \quad (15)$$

$$h_N = h_{\text{вых}}(\tau) \text{ при } u_N < 0,$$

$$\pi_0 = \pi_{\text{вх}}(\tau), \quad \pi_N = 0.$$

Нелинейная система разностных уравнений (11)–(14) является неявной и симметричной по пространственной координате, что обеспечивает второй порядок аппроксимации относительно  $\Delta \xi$  и устойчивость по времени (по крайней мере, в рамках линейного анализа). Вычисление переменных на верхнем слое осуществляется по итерационной схеме (верхний индекс « $n$ » у переменных соответствует номеру итерации)

$$\delta \xi_j^n = u_j^{n-1} \Delta \tau,$$

$$h_j^n = \bar{h}_j^* + \frac{q_j^*}{\rho_j^{n-1}} \Delta \tau, \quad \rho_j^n = \rho(h_j^n), \quad (16)$$

$$g_j^n = g_{j-1}^n - \frac{\Delta \xi}{\Delta \tau} (\rho_{j-1/2}^n - \bar{\rho}_{j-1/2}^n), \quad (17)$$

а в уравнении движения квадратичные по расходу члены квазилинеаризуются таким образом:

$$(g_j^n)^2 \approx 2g_j^{n-1} g_j^n - (g_j^{n-1})^2,$$

$$|g_j^n| g_j^n \approx 2|g_j^{n-1}| g_j^n - |g_j^{n-1}| g_j^{n-1}.$$

Это дает для уравнения движения следующую аппроксимацию:

$$\begin{aligned} & \frac{g_{j-1/2}^n - \bar{g}_{j-1/2}^n}{\Delta \tau} + \frac{2}{\Delta \xi} \left( \frac{g_j^{n-1} g_j^n}{\rho_j^n} - \frac{g_{j-1}^{n-1} g_{j-1}^n}{\rho_{j-1}^n} \right) + \\ & + \frac{\pi_j^n - \pi_{j-1}^n}{\Delta \xi} = \frac{1}{\Delta \xi} \left( \frac{g_j^{n-1 2}}{\rho_j^n} - \frac{g_{j-1}^{n-1 2}}{\rho_{j-1}^n} \right) - \gamma \rho_{j-1/2}^n - \\ & - 2\kappa \frac{|g_{j-1/2}^{n-1}| g_{j-1/2}^n}{\rho_{j-1/2}^n} + \kappa \frac{|g_{j-1/2}^{n-1}| g_{j-1/2}^{n-1}}{\rho_{j-1/2}^n}. \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнения (17), (18) можно записать в виде

$$\pi_j^n = \pi_{j-1}^n - a_{1j} g_j^n + a_{2j} g_{j-1}^n + b_{1j}, \quad g_j^n = g_{j-1}^n - b_{2j}, \quad (19)$$

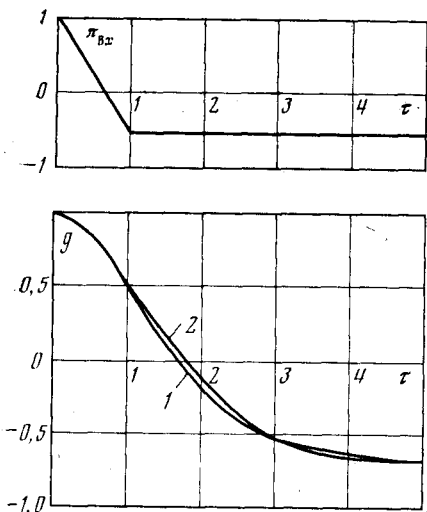


Рис. 1

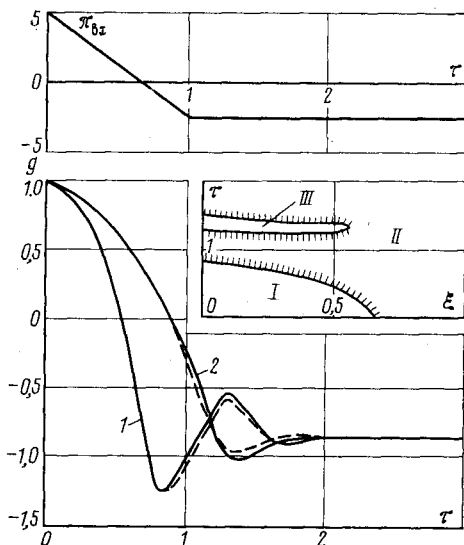


Рис. 2

Рис. 1. Режим с обращением расхода газа в канале: 1 – расход на входе; 2 – расход на выходе

Рис. 2. Режим с обращением расхода пароводяной смеси в канале: 1 – расход на входе; 2 – расход на выходе (сплошные линии –  $\Delta\tau=0,01$ ; пунктир –  $0,001$ ). I – вода; II – двухфазная смесь; III – пар

где формулы для коэффициентов  $a_{1j}$ ,  $a_{2j}$ ,  $b_{1j}$  и  $b_{2j}$  непосредственно вытекают из системы (17), (18).

Применяя к системе (19) преобразование Риккати

$$\pi_j^n = r_j g_j^n + s_j, \quad (20)$$

где  $r_j$  и  $s_j$  – новые неизвестные, которые на выходе удовлетворяют условиям

$$r_N = 0, \quad s_N = 0, \quad (21)$$

получаем для коэффициентов прогонки рекуррентные соотношения

$$r_{j-1} = r_j + a_{1j} - a_{2j}, \quad s_{j-1} = s_j - b_{1j} - b_{2j}(r_j + a_{1j}), \quad (22)$$

что позволяет просчитать их от  $j=N$  до  $j=0$ , где из начального условия по давлению определяем и начальное условие по расходу  $g_0^n = (\pi_{вх} - s_0)/r_0$ .

Обратным ходом с помощью уравнений (19) можно определить новые значения переменных в каждой точке сетки. Итерации на данном слое, включая пересчет энтальпий по (16), продолжаются до получения сходимости двух последовательных приближений с заданной точностью.

Результаты расчетов по предложенному алгоритму представлены на рис. 1–3. Рассматривался канал диаметром 10 мм и длиной 1 м. Коэффициент гидравлического трения считался постоянным, равным 0,02. На рис. 1 показаны результаты расчетов режима с опрокидыванием циркуляции, которое вызвано линейным снижением давления на входе, при подаче в канал гелия при давлении 16 МПа, массовой скорости в начальный момент  $1000 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$  и тепловом потоке  $200 \text{ кВт}/\text{м}^2$ . Инерция потока несколько задерживает обращение расхода, при этом изменение расхода по длине канала остается небольшим.

На рис. 2 показаны результаты расчетов такого же режима для пароводяного потока (гомогенная равновесная модель) при тех же значениях давления и массовой скорости. Относительное теплосодержание на входе составляло 0,27, тепловой поток –  $1000 \text{ кВт}/\text{м}^2$ . В этом случае расход на входе обращается несколько раньше возникновения отрицательного перепада. Это связано, во-первых с весом столба жидкости в канале, во-вторых, с меньшей инерцией двухфазной среды, так как плотность ее выше,

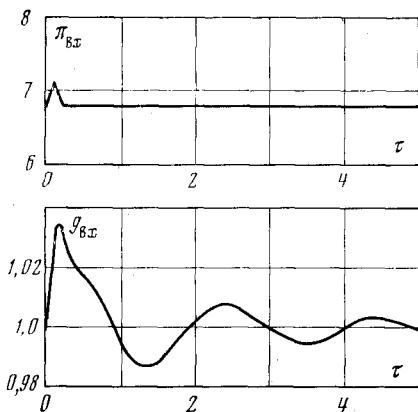


Рис. 3

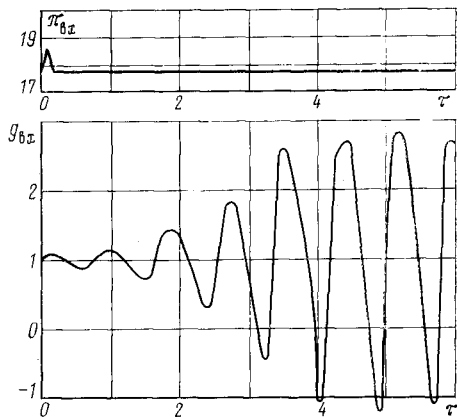


Рис. 4

Рис. 3. Реакция пароводяного потока на возмущение давления на входе в канал (стационарный режим устойчив)

Рис. 4. Реакция пароводяного потока на возмущение давления на входе в канал (стационарный режим неустойчив)

чем плотность газа в рассмотренном ранее примере. Для двухфазного потока наблюдается заметное отставание расхода на выходе от его значений на входе, а опрокидывание расходов сопровождается кратковременным осушением части канала. Уменьшение шага интегрирования по времени сказалось заметным образом на результатах счета только после момента опрокидывания расхода в выходном сечении, что связано с особенностями задания граничных условий по энтальпии. В этих расчетах принималось

$$h_{\text{вых}}(\tau) = h(1, 0),$$

что приводило к скачку значений энтальпии в последней точке в момент обращения в ней расхода. При численном интегрировании этот скачок фактически размазывался на шаг  $\Delta\tau$ , что при изменении  $\Delta\tau$  означало также изменение граничного условия. Строго говоря, этот разрыв полагалось бы отслеживать по двум слившимся характеристикам, исходящим из конечной точки в момент опрокидывания в ней расхода, что заметно усложнило бы алгоритм. Практически более целесообразный прием размазывания разрыва в граничном условии на конечный интервал времени полностью снимает эти эффекты.

На рис. 3, 4 показаны результаты расчета динамической реакции двухфазного потока на кратковременное возмущение давления на входе (в 10% от перепада давления в канале в стационарном режиме). Рассматривалась пароводяная смесь при давлении 10 МПа и тепловом потоке 1000 кВт/м<sup>2</sup>. При массовой скорости 1000 кг/(м<sup>2</sup>·с) возникают быстро затухающие колебания расхода (рис. 3). При снижении массовой скорости до 500 кг/(м<sup>2</sup>·с) (рис. 4) развивается колебательный процесс с возрастанием амплитуды колебаний расхода. По истечении некоторого времени устанавливается автоколебательный режим с амплитудой по расходу примерно в 200% от стационарного значения, что соответствует сильно неустойчивому режиму.

Все представленные расчеты проводились с шагом  $\Delta\tau=0,01$ , и сходимость приближений считалась достаточной, если разность двух последовательных значений была меньше  $10^{-4}$ . В режимах с опрокидыванием циркуляции и при небольших колебаниях расхода это достигалось за 1–2 итерации. Для неустойчивого режима, изображенного на рис. 4, требовалось от 7 до 11 итераций на каждом слое, при этом один слой (для  $N=20$ ) просчитывался на ЭВМ БЭСМ-6 за 0,005 с машинного времени, т. е. один период автоколебаний требовал примерно полминуты времени при числе слоев на нем около 100.

Эти результаты интересно сопоставить с возможностями других разностных схем, практически используемых в реакторостроении. В [2] приводятся сравнительные характеристики трех схем: — схемы, основанной на методе прямых, интегрирование вдоль которых осуществляется по методу Рунге — Кутты; для нее максимально допустимый шаг по времени оказался порядка  $10^{-5}$  с; — первоначальная схема авторов [2], в которой шаг по времени ограничивался условием устойчивости величиной  $10^{-3}$  с; — схема, предложенная в [2] и не имеющая, по-видимому, ограничений на шаг по устойчивости, однако, по рекомендациям авторов, допускающая шаг по времени только до 0,004 с.

В [3] применена неявная разностная схема с квазилинеаризацией членов, описывающих трение; шаг интегрирования в ней для медленных процессов не превышал 0,01 с.

Расчеты авторов данной работы, как уже указывалось, проводились с шагом  $\Delta t = 0,01$ , и уменьшение шага в десять раз практически не отразилось на результатах счета. Для наиболее тяжелого варианта, представленного на рис. 4, временной масштаб при обезразмеривании равнялся 2 с. Таким образом, интегрирование велось с шагом 0,02 с, и эта величина в большинстве случаев может быть еще заметно увеличена.

Таким образом, предложенная методика по своим показателям превосходит другие аналогичные схемы, что является следствием трех ее существенных особенностей: во-первых, записи уравнения энергии вдоль характеристики, во-вторых, симметрии конечно-разностной аппроксимации уравнений неразрывности и движения и, в-третьих, эффективного применения прогонки на основе квазилинеаризации уравнения движения.

Научно-исследовательский и конструкторский  
институт энерготехники  
Москва

Поступила в редакцию  
12.III.1981

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М.: Мир, 1974.
2. Капустин А. Д., Колчин В. А. Применение вариационно-разностного метода к построению разностной схемы расчета в газоохлаждаемом реакторе. — Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика и техника ядерных реакторов, 1980, вып. 3 (12), с. 48.
3. Векслер Л. М. Методика расчета нестационарных процессов в газоохлаждаемом ядерном реакторе. — Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика и техника ядерных реакторов, 1978, вып. 4 (4), с. 53.