

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИОННОЗВУКОВЫХ ВОЛН И ГЕЛИКОНОВ В ПЛАЗМЕ

А. С. Кингсен

(Москва)

Методами теории возмущений и статистического усреднения по фазам колебаний получены кинетические уравнения для волн, описывающие трехплазменные процессы слияния двух ионнозвуковых волн в геликон и рассеяние ионного звука на частицах плазмы с переизлучением в геликон.

Оценена скорость накопления свистов в турбулентной плазме за счет таких нелинейных процессов.

В ряде работ [1-3] по турбулентному нагреву плазмы приводятся данные, свидетельствующие о том, что плазма нагревается за счет раскачки ионнозвуковой неустойчивости. В работе [4] была сделана попытка обнаружения ионнозвуковых шумов.

Непосредственное наблюдение последних весьма затруднительно, поэтому в [4] проводились измерения свистов (геликонов), излучавшихся за счет нелинейных процессов с участием ионного звука.

Дисперсионные уравнения упомянутых ветвей колебаний имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_s(\mathbf{k}) &= \omega_{pi} [1 + (kr_{De})^{-2}]^{-1/2} \\ \Omega_h(\mathbf{q}) &= qq_2 c^2 \omega_{He} / \omega_{Pe}^2, \quad \omega_{He} \gg \Omega \gg \omega_{Hi}, \quad O_z \parallel \mathbf{H}_0 \end{aligned} \quad (0.1)$$

Здесь  $\omega$ ,  $\Omega$  — частоты,  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{q}$  — волновые векторы соответственно звука и геликонов; прочие обозначения общепринятые.

Из уравнений (0.1), в частности, следует, что при одинаковых по порядку величины частотах ионного звука и геликонов последние являются гораздо более длинноволновыми  $q \ll k$ , что и позволяет наблюдать их, в отличие от ионного звука, для которого  $k \approx r_{De}^{-1}$ . Нелинейная трансформация звука в свисты может идти через трехплазменные процессы (фиг. 1, а, б), а также через рассеяние ионного звука на частицах плазмы с переизлучением в геликон (фиг. 1, в). Если частота звука близка к ионной плазменной, то слияние двух ионнозвуковых плазмонов в геликон приведет к появлению в плазме узкого спектра свистов с частотой, близкой к  $2\omega_{pi}$ , как это показано на фиг. 2, а, где  $I(\Omega)$  — интенсивность свистов.

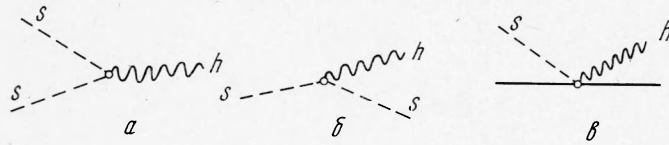
Процесс на фиг. 1, б — черенковское излучение геликонов ионнозвуковыми плазмонами — приведет к излучению очень длинноволновых геликонов, максимальная частота которых не превышает ширины  $\Delta\omega$  спектра ионнозвуковых шумов (фиг. 2, б). И, наконец, вследствие нелинейного рассеяния волн на частицах будут излучаться геликоны с  $\Omega \leq \omega_s$  (в результате такого рассеяния частицы плазмы должны нагреваться, и, следовательно, волны могут только «краснеть»). Таким образом, процесс, приведенный на фиг. 1, в, дает спектр геликонов, изображенный на фиг. 2, в.

Теория нелинейного взаимодействия волн в плазме, находящейся во внешнем магнитном поле, была развита в ряде работ различных авторов [5-7]. Однако для конкретных расчетов приведенные в этих работах общие формулы неудобны. Представляется целесообразным получить кинетические уравнения для волн, описывающие нелинейную трансформацию ионного звука в геликоны, используя с самого начала конкретные дисперсионные свойства обоих типов колебаний. Методы расчета, которые будут использованы, с исчерпывающей полнотой изложены в книге [8].

**1. Трехплазменные процессы с излучением геликонов.** Законы сохранения энергии и импульса допускают как слияние двух ионнозвуковых плазмонов в геликон, так и черенковское излучение геликонов ионнозвуковыми квантами. С экспериментальной точки зрения особый интерес представляет первый из этих процессов, так как при узком спектре ионнозвуковых волн ( $\omega \approx \omega_{pi}$ ) он дает, в свою очередь, ярко выраженную узкую линию в спектре. К тому же процесс черенковского излучения при-

водит к раскачке очень длинноволновых геликонов, что затрудняет их наблюдение.

Пусть в плазме имеется высокий уровень ионнозвуковых шумов с частотой, близкой к ионной плазменной. Поскольку для геликонов близкой частоты  $\Omega(q) \sim \omega(k)$  должно быть  $q \ll k$ , процесс слияния возможен лишь для плазмонов с противоположно направленными волновыми векторами.



Фиг. 1

Будем предполагать, что такие плазмоны в спектре имеются. В качестве спектральной характеристики шумов будем пользоваться числом волн

$$N_k = W_k / \omega_k$$

где  $W_k$  — спектральная плотность энергии колебаний. Тогда кинетическое уравнение для волн, соответствующее процессу на фиг. 1, а, имеет вид

$$\frac{\partial N_q^h}{\partial t} = \sum_k \omega(k, q) (N_k^s N_{q-k}^s - N_q^h N_k^s - N_q^h N_{q-k}^s) \quad (1.1)$$

Если уровень свистов мал  $W_q \ll W_h$ , интенсивность их растет по линейному закону

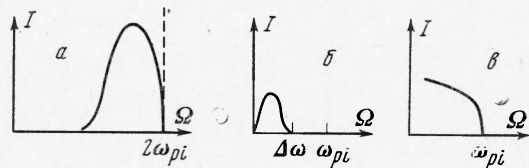
$$H_q^2 \approx 8\pi \sum_k w(k, q) N_k^s N_{q-k}^s \Omega t \quad (1.2)$$

Именно этот случай реализуется в экспериментах [4]. Для вычисления величины  $w(k, q)$  воспользуемся принципом соответствия [8], а именно вычислим  $w(k, q)$  как коэффициент при первом члене в (2), считая уровень свистов достаточно низким. Тогда

$$\frac{\partial N_q^h}{\partial t} = \frac{1}{\Omega} \left\langle \int dq' j_{q\Omega}^{(2)} E_{q'\Omega'}^{(2)} \right\rangle \quad (1.3)$$

$$j_q^{(2)} = \int dk J_{kq} \varphi_k \varphi_{q-k}, \quad k \equiv (k, \omega) \quad (1.4)$$

$$E_q^{(2)} = \int dk E_{kq} \varphi_k \varphi_{q-k}, \quad q \equiv (q, \Omega)$$



Фиг. 2

$\varphi_k$  — потенциал ионнозвуковых колебаний, по фазам которых проводится усреднение в (1.3). Все прочие комбинации нелинейных токов и полей либо не войдут в первый член уравнения (1.1), либо обратятся в нуль при статистическом усреднении по фазам.

Исходная система уравнений

$$\frac{dv^\alpha}{dt} = \left( \frac{e}{m} \right)_\alpha E + [v^\alpha \omega_{H\alpha}] - \frac{\nabla p^\alpha}{n^\alpha m_\alpha} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial n^\alpha}{\partial t} + \text{div}(n^\alpha v^\alpha) = 0$$

$$p^\alpha = \text{const} (n^\alpha)^\gamma, \quad \alpha = i, e, \quad \omega_{H\alpha} = \frac{e_\alpha H_0}{m_\alpha c}$$

Решая уравнение (1.5), можно пренебречь ионным давлением в ионно-звуковых колебаниях, а для электронов положить  $\gamma = 1$ . Что же касается геликонов, то для них тепловые поправки вообще несущественны. Далее, в указанной области частот ионный звук можно считать немагнитным, т. е. пренебречь в коротковолновых членах поправками, связанными с магнитным полем.

В первом приближении по амплитуде полей получаем

$$\begin{aligned} v_{k\omega}^{(1)e} &= (kr_{De})^{-2} \frac{e}{M\omega} \mathbf{k}\Phi_k, & r_{De}^2 &= \frac{T_e}{4\pi n e^2} \\ v_{k\omega}^{(1)i} &= \frac{e}{M\omega} \mathbf{k}\Phi_k & (1.6) \\ n_{k\omega}^{(1)e} &= n_0 \frac{e}{M} \frac{k^2}{\omega^2} \Phi_k (kr_{De})^{-2} \\ n_{k\omega}^{(1)i} &= n_0 \frac{e}{M} \frac{k^2}{\omega^2} \Phi_k, & M &\equiv m_i \end{aligned}$$

В следующем приближении по амплитуде полей система (1.5) дает

$$v_q^{(2)i} = -\frac{1}{2} \left(\frac{e}{M}\right)^2 \int dk \frac{k^2 \mathbf{q}}{\Omega\omega(\Omega-\omega)} (\Phi_k \Phi_{q-k} - \langle \Phi_k \Phi_{q-k} \rangle) \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} v_q^{(2)e} &= \frac{1}{2} (kr_{De})^{-4} \left(\frac{e}{M}\right)^2 \int dk \frac{k^2}{\omega(\Omega-\omega)} \times \\ &\times \left\{ \frac{(\mathbf{q}\omega_{He}) \omega_{He}}{\Omega\omega_{He}^2} - i \frac{[\omega_{He}\mathbf{q}]}{\omega_{He}^2} \right\} (\Phi_k \Phi_{q-k} - \langle \Phi_k \Phi_{q-k} \rangle) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Оставим в (1.7), (1.8) слагаемые только с такими комбинациями полей, которые войдут в первый член уравнения (1.1).

Из (1.6) — (1.8) можем получить нужный нелинейный ток

$$\mathbf{j}_q^{(2)} = \sum_{\alpha=i,e} e_\alpha \left( n_0 v_q^{(2)\alpha} + \int dk n_k^{(1)\alpha} v_{q-k}^{(1)\alpha} \right)$$

С точностью до членов порядка  $\omega / \omega_{He}$ ;  $(kr_{De})^{-4}$  имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_q^{(2)} &= \mathbf{j}_q^{(2)i} = \frac{n_0 e}{2} \left(\frac{e}{M}\right)^2 \int dk \frac{k^2}{\omega(\Omega-\omega)} (\Phi_k \Phi_{q-k} - \langle \Phi_k \Phi_{q-k} \rangle) \times \\ &\times \left\{ \left[ \frac{1}{\Omega-\omega} - \frac{1}{\omega} \right] \mathbf{k} + \left[ \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\Omega} \right] \mathbf{q} - 2 \frac{\mathbf{k}\mathbf{q}}{k^2} \frac{\mathbf{k}}{\Omega-\omega} \right\} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Далее, нелинейные токи и поля связаны между собой соотношением

$$\left( q^2 \delta_{ij} - q_j q_i - \frac{\Omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij} \right) E_{qj}^{(2)} = \frac{4\pi i \Omega}{c^2} j_{qi}^{(2)} \quad (1.10)$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \varepsilon_0 & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \end{vmatrix} O_z \parallel \mathbf{H}_0$$

$$\varepsilon_0 = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\Omega^2 - \omega_{H\alpha}^2}, \quad g = - \sum_\alpha \frac{\omega_{H\alpha} \omega_{p\alpha}^2}{\Omega(\Omega^2 - \omega_{H\alpha}^2)}, \quad \varepsilon_1 = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\Omega^2}$$

В результате несложных алгебраических преобразований из (1.10) можно получить

$$\mathbf{E}_{\mathbf{q}}^{(2)} = \Lambda(\mathbf{q}, \Omega) \mathbf{j}_{\mathbf{q}}^{(2)} \quad (1.11)$$

Здесь тензор  $\Lambda_{ij}$  с точностью до членов  $\sim \Omega / \omega_{He}$  имеет вид

$$\Lambda_{ij} = i \frac{4\pi\Omega^3}{q^2 q_z^2 c^2} (\Omega_{\mathbf{q}}^2 - \Omega^2)^{-1} Q_{ij} \approx 2\pi^2 \frac{\Omega_{\mathbf{q}}^2}{q^2 q_z^2 c^2} \delta(\Omega - \Omega_{\mathbf{q}}) Q_{ij} \quad (1.12)$$

Компоненты тензора  $Q_{ij}$ , где  $i, j = 1, 2, 3$ , определяются следующими выражениями:

$$Q_{11} = q_x^2 + q_z^2, \quad Q_{12} = q_x q_y + i q q_z, \quad Q_{21} = q_x q_y - i q q_z, \quad Q_{22} = q_y^2 + q_z^2 \\ Q_{3i} = Q_{i3} = 0$$

Подставляя (1.12) в (1.3), (1.4) и проводя статистическое усреднение по фазам волн, получаем

$$\frac{\partial N_{\mathbf{q}}^h}{\partial t} = \frac{1}{\Omega} \int dk \mathbf{J}_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \Lambda \mathbf{J}_{-\mathbf{k}, -\mathbf{q}} |\Phi|_{\mathbf{k}}^2 |\Phi|_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^2$$

И, наконец, переходя от фурье-компонент в пространстве  $(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{q}, \Omega)$  к фурье-компонентам по  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{q}$ , после несложных преобразований получаем уравнение типа (2), где матричный элемент имеет вид

$$w(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_{pi}^6 \Omega}{\omega(\Omega - \omega)} \frac{\delta(\Omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}})}{n_0 M c^2} q^{-2} q_z^{-2} \mathbf{A} \Lambda_0 \mathbf{A} \quad (1.13)$$

$$\mathbf{A} = \left( \frac{1}{\Omega - \omega} - \frac{1}{\omega} \right) \mathbf{k} + \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\Omega} \right) \mathbf{q} - 2 \frac{\mathbf{k}\mathbf{q}}{k^2} \frac{\mathbf{k}}{\Omega - \omega}, \quad \Lambda_{0ij} = \text{Re } Q_{ij}$$

Выражение (1.13) приобретает очень простой вид для случая узких ионнозвуковых спектров, когда  $\Omega \approx 2\omega \approx 2\omega_{pi}$ . В этом случае

$$w(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{\pi \omega_{pi}^3}{q^2 q_z^2} \frac{\delta(\Omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}})}{n_0 M c^2} \times \\ \times \left[ \frac{1}{4} q^2 q_{\perp}^2 - 2 \frac{\mathbf{k}\mathbf{q}}{k^2} q^2 (\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{q}_{\perp}) + 4 \left( \frac{\mathbf{k}\mathbf{q}}{k^2} \right)^2 (q_z^2 k_{\perp}^2 + (\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{q}_{\perp})^2) \right] \quad (1.14) \\ q_{\perp} = q - \frac{(\mathbf{q}\mathbf{H}_0) \mathbf{H}_0}{H_0^2}, \quad \mathbf{k}_{\perp} = \mathbf{k} - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{H}_0) \mathbf{H}_0}{H_0^2}$$

В условиях эксперимента [4], т. е. при малом начальном уровне свистов, нарастание их интенсивности происходит, согласно (1.2), по закону

$$H_{\sim}^2 \sim \frac{(W^s)^2}{n_0 M c^2} \omega_{pi} t, \quad W^s = \int d\mathbf{k} W_{\mathbf{k}} \quad (1.15)$$

Этот результат совпадает с оценкой, сделанной в работе [4], и хорошо согласуется с экспериментальными данными. При этом спектр излучения соответствует фиг. 2, а.

**2. Рассеяние ионного звука на частицах с переизлучением в геликоны.** Процесс рассеяния ионного звука на частицах с переизлучением в свисты (диаграмма на фиг. 1, в) может быть описан следующим кинетическим уравнением:

$$\frac{\partial N_{\mathbf{q}}^h}{\partial t} = N_{\mathbf{q}}^h \sum w(\mathbf{k}, \mathbf{q}) N_{\mathbf{k}}^s \equiv 2\gamma_H(\mathbf{q}) N_{\mathbf{q}}^h \quad (2.1)$$

Легко видеть, что в отличие от уравнения (1.1) уравнение типа (2.1) имеет только экспоненциальные решения, т. е. если перекачка ионного звука в геликоны действительно может эффективно идти через рассеяние на частицах, то экспериментально должен наблюдаться экспоненциально быстрый рост уровня свистов. Для процесса, приведенного на фиг. 1,  $e$ , существенна структура функции распределения частиц, поэтому вместо системы (1.5) необходимо решать по теории возмущений систему уравнений А. А. Власова. Для того чтобы сократить чрезмерно громоздкие вычисления, решим модельную задачу: нелинейные взаимодействия волн двух одномерных спектров, т. е. положим  $\mathbf{q} \parallel \mathbf{k} \parallel \mathbf{H}_0$ . Это позволит к тому же сразу исключить из рассмотрения трехплазменные процессы, вероятность которых, как легко видеть из (1.14), обращается в этом случае в нуль. В дальнейшем будет указано, насколько может измениться результат при переходе от одномерных спектров к трехмерным. В качестве исходной системы уравнений возьмем уравнения Максвелла и кинетические уравнения

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f^\alpha + \left(\frac{e}{m}\right)_\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}]\right) \frac{\partial f^\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad \alpha = i, e \quad (2.2)$$

Для вычисления вероятности  $w(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ , входящей в уравнение (2.1), необходимо получить нелинейный ток

$$\mathbf{j}_i^{(3)} = \sum_{\alpha=i, e} n e_\alpha \int f_q^{(3)*} \mathbf{v} d\mathbf{v}$$

пропорциональный комбинации полей типа  $\Phi_k \Phi_{k'} E_q$ .

В первом приближении решение уравнения (2.2)

$$f_k^{\alpha(1)} = - \left(\frac{e}{m}\right)_\alpha \frac{\mathbf{k} \partial f^\alpha / \partial \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v} + i\varepsilon} \Phi_k, \quad \varepsilon > 0 \quad (2.3)$$

$$f_q^{i(1)} = -i \left(\frac{e}{M}\right) \frac{E_q \partial f^i / \partial \mathbf{v}}{\Omega - \mathbf{q} \mathbf{v}}$$

$$f_q^{e(1)} = \frac{e}{m \omega_{H_e}} \exp \frac{i(\Omega - \mathbf{q} \mathbf{v}) \Phi}{\omega_{H_e}} \left\{ \int_0^\infty \exp \frac{-i(\Omega - \mathbf{q} \mathbf{v}) \Phi'}{\omega_{H_e}} \frac{\partial f^e}{\partial \mathbf{v}} d\Phi' + C \right\} E_q$$

$$C = \left( \exp \frac{-2\pi i(\Omega - \mathbf{q} \mathbf{v})}{\omega_{H_e}} - 1 \right)^{-1} \int_0^{2\pi} \exp \frac{-i(\Omega - \mathbf{q} \mathbf{v}) \Phi'}{\omega_{H_e}} \frac{\partial f^e}{\partial \mathbf{v}} d\Phi'$$

С помощью несложных преобразований (см., например, [9]) выражение для длинноволнового электронного возмущения можно представить в виде ряда, главный член которого с учетом малости отношения  $\Omega / \omega_{H_e}$  принимает вид

$$f_q^{e(1)} = \frac{2}{\omega_{H_e} v_{T_e}^2} \frac{e}{m} f^e \frac{H_0}{H_0} \mathbf{v} E_q, \quad v_{T_e}^2 = \frac{2T_e}{m} \quad (2.4)$$

В неоднородном спектре появляется поправка того же порядка величины. Здесь и далее предполагаем невозмущенные функции распределения  $f^\alpha$  максвелловскими — это позволит представить результаты в конечном виде.

Выпишем уравнение третьего приближения по амплитуде полей для длинноволновых возмущений

$$\begin{aligned} & -i(\Omega - \mathbf{q} \mathbf{v}) f_i^{\alpha(3)} - \omega_{H_e} \partial f_i^{\alpha(3)} / \partial \Phi = \\ & = - \left(\frac{e}{m}\right)_\alpha \int dk' \left( \mathbf{E}_{k'} + \frac{\mathbf{v}}{\omega'} \times \mathbf{k}' \times \mathbf{E}_{k'} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f_{q-k'}^{\alpha(2)} - \\ & - \left(\frac{e}{m}\right)_\alpha \int dk' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f_{k'}^{\alpha(1)} \left( \mathbf{E}_{q-k'}^{(2)} + \frac{\mathbf{v}}{\Omega - \omega'} \times (\mathbf{q} - \mathbf{k}') \times \mathbf{E}_{q-k'}^{(2)} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Векторы  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{q} - \mathbf{k}'$  в правой части (2.5) одновременно принадлежат длинноволновой (геликоны) или коротковолновой (ионный звук) области спектра. При вычислении члена, пропорционального комбинации полей  $\varphi_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}'}E_{\mathbf{q}'}$ , в правой части (2.5) следует оставить суммирование только по коротковолновой области — все прочие члены, содержащие такую комбинацию полей, обратятся в нуль при усреднении по фазам. В результате уравнение (2.5) существенно упрощается

$$-i(\Omega - \mathbf{q}\mathbf{v})f_q^{(3)} - \omega_{H\alpha}\partial f_q^{(3)}/\partial\varphi = i\left(\frac{e}{m}\right)_\alpha \frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} \int dk [\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}}f_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^{(2)} + (\mathbf{q} - \mathbf{k})f_{\mathbf{k}}^{(1)}\varphi_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^{(2)}] \quad (2.6)$$

Таким образом, во втором приближении необходимо вычислить только длинноволновые возмущения  $f_{\mathbf{k}}^{(2)}$ .

Результат вычислений имеет вид

$$f_{\mathbf{k}}^{(2)} = i\left(\frac{e}{m}\right)_\alpha^2 \int dq \varphi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\varepsilon} \times \left[ \left(1 + \frac{\mathbf{q}\mathbf{v}}{\Omega}\right) E_{\mathbf{q}} - \frac{(\mathbf{E}_{\mathbf{q}}\mathbf{v})}{\Omega} \mathbf{q} \right] \frac{\partial f^{\alpha}/\partial\mathbf{v}}{\omega - \Omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\varepsilon} - \left(\frac{e}{m}\right)_\alpha \int dq \varphi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \frac{\mathbf{k}\partial f^{\alpha(1)}/\partial\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\varepsilon} \quad (2.7)$$

В выражении (2.7) опущены члены, не содержащие нужных комбинаций полей.

Можно показать, что нелинейный потенциал  $\varphi_{\mathbf{k}}^{(2)}$  в одномерной модели обращается в нуль в соответствии с результатами предыдущего пункта, полученными в гидродинамическом приближении.

Получим сначала кинетические уравнения для волн, описывающие рассеяние на ионах. Во втором приближении

$$f_{\mathbf{k}}^{i(2)} = \int dq \mathbf{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} E_{\mathbf{q}} \varphi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} = i\left(\frac{e}{M}\right)^2 \left[ \frac{\partial/\partial\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\varepsilon} \frac{\mathbf{k}\partial f^i/\partial\mathbf{v}}{\omega - \Omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\varepsilon} + \frac{\mathbf{k}\partial/\partial\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\varepsilon} \frac{\partial f^i/\partial\mathbf{v}}{\Omega - \mathbf{q}\mathbf{v}} \right] \quad (2.9)$$

Из (2.6), (2.8), (2.9) легко получить

$$f_q^{i(3)} = -\frac{e}{M} \int dk dq' \frac{\mathbf{k}\partial/\partial\mathbf{v}}{\Omega - \mathbf{q}\mathbf{v}} \mathbf{V}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}, \mathbf{q}'} E_{\mathbf{q}'} \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{q}-\mathbf{k}-\mathbf{q}'}$$

В дальнейшем при усреднении по фазам ионнозвуковых колебаний интегрирование по  $dq'$  снимается за счет  $\delta$ -функции  $\delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}')\delta(\Omega - \Omega')$ . Будем предполагать эту операцию выполненной. Для нелинейного тока  $\mathbf{j}^{(3)}$  получаем следующее выражение:

$$\mathbf{j}_q^{(3)i} = \int nef_q^{(3)i} \mathbf{v} d\mathbf{v} = \frac{4\pi ne}{v_{T_i}^4} \left(\frac{e}{M}\right)^3 \int dk |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 \int d\mathbf{v} \mathbf{v} \frac{\mathbf{k}\partial/\partial\mathbf{v}}{\Omega - \mathbf{q}\mathbf{v}} \frac{(\mathbf{E}_{\mathbf{q}}\mathbf{v}) f^i}{\omega - \Omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - i\varepsilon} \times \left\{ \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - i\varepsilon} + \frac{1}{2} \frac{kqv_{T_i}^2}{(\Omega - \mathbf{q}\mathbf{v})^2} - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\Omega - \mathbf{q}\mathbf{v}} \right\}, \quad v_{T_i}^2 = \frac{2T_i}{M} \quad (2.10)$$

Подставим выражение (2.6) в уравнение

$$\partial W / \partial t = \mathbf{j}^{(3)}\mathbf{E}$$

и проведем усреднение по фазам длинноволновых колебаний. Переходя к фурье-компонентам по  $\mathbf{k}, \mathbf{q}$ , получаем

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int d\mathbf{k} |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 \Phi_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$$

где

$$\Phi_{kq} = -i \frac{\omega_{pi}^2}{v_{Ti}^4} \left(\frac{e}{M}\right)^2 \int d\mathbf{v} \frac{kq}{(\Omega - \mathbf{q}\mathbf{v})^2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{(\mathbf{E}_q \mathbf{v})(\mathbf{E}_q^+ \mathbf{v})(k\mathbf{v}) f^i}{(\omega - \Omega - k\mathbf{v} - i\varepsilon)(\omega - k\mathbf{v} - i\varepsilon)} + \frac{kqv_{Ti}^2}{2} \frac{(\mathbf{E}_q \mathbf{v})(\mathbf{E}_q^+ \mathbf{v}) f^i}{(\omega - \Omega - k\mathbf{v} - i\varepsilon)(\Omega - \mathbf{q}\mathbf{v})^2} - \right. \quad (2.11)$$

$$\left. - \frac{(k\mathbf{v})(\mathbf{E}_q \mathbf{v})(\mathbf{E}_q^+ \mathbf{v}) f^i}{(\omega - \Omega - k\mathbf{v} - i\varepsilon)(\Omega - \mathbf{q}\mathbf{v})} \right\} \quad (2.12)$$

Для эволюции спектра существенна только действительная часть  $\Phi_{kq}$  и, следовательно, мнимая часть входящих туда интегралов. Однако мнимый вклад от обхода полюсов типа  $(\omega - k\mathbf{v})^{-1}$ ,  $(\Omega - \mathbf{q}\mathbf{V})^{-1}$  экспоненциально мал. Это позволяет упростить выражение для  $\Phi_{kq}$

$$\text{Re } \Phi_{kq} = -\frac{\omega_{pi}^2}{\pi v_{Ti}^4} \left(\frac{e}{M}\right)^2 \frac{kq}{\Omega^2} \left( \frac{\omega - \Omega}{\omega} - \frac{\omega - \Omega}{\Omega} + \frac{kqv_{Ti}^2}{2\Omega^2} \right) \times$$

$$\times \text{Im} \int d\mathbf{v} \frac{(\mathbf{E}_q \mathbf{v})(\mathbf{E}_q^+ \mathbf{v}) f^i}{\omega - \Omega - k\mathbf{v} - i\varepsilon}$$

Интеграл, входящий в эту формулу, сводится к функциям Крампна и особенно простой вид приобретает при малой разности частот

$$\frac{\omega - \Omega}{kv_{Ti}} \ll 1$$

В результате получаем уравнение типа (2.1)

$$\frac{\partial N_q}{\partial t} = 2\gamma_H^{(i)}(\mathbf{q}) N_q$$

$$\gamma_H^{(i)}(\mathbf{q}) = \frac{2}{3} \frac{V\pi}{\omega_{pi}} \int \frac{d\mathbf{k} N_k \omega_k}{nMc^2} \frac{k}{q} \left(\frac{\omega_{pi}}{kv_{Ti}}\right)^3 \frac{(\omega - \Omega)^2}{\omega \Omega} \quad (2.13)$$

Аналогично выполняются вычисления в случае, когда рассматривается рассеяние на электронах. Не будем приводить их ввиду еще большей громоздкости, а приведем сразу результат: оценку для нелинейного инкремента  $\gamma_H^{(e)}(q)$ , описывающего рассеяние с переизлучением на электронах

$$\gamma_H^{(e)}(q) \approx 2 \sqrt{\pi} \omega_{pe} \int \frac{d\mathbf{k} N_k \omega_k}{nMc^2} \left(\frac{\omega_{pe}}{kv_{Te}}\right)^3 \left(\frac{\Omega}{\omega_{He}}\right)^2 \frac{k}{q} \quad (2.14)$$

Таким образом

$$\gamma_H^{(e)} \sim \gamma_H^{(i)} \sqrt{\frac{M}{m}} \left(\frac{\Omega}{\omega_{He}}\right)^2 \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^3 \quad (2.15)$$

т. е. в типичных экспериментальных условиях (в частности, и в эксперименте [4]) рассеяние на ионах вносит более существенный вклад в эволюцию спектра.

Все проведенные в данном пункте вычисления были выполнены в рамках одномерной модели  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{q} \parallel \mathbf{H}_0$ . В трехмерных спектрах  $\gamma_H^{(i)}$  может измениться на величину того же порядка.

Что же касается величины  $\gamma_H^{(e)}$ , то при решении уравнения (2.6) в не одномерном спектре результат может быть больше в  $\omega_{He} / \Omega$  раз. Отношение  $\gamma^{(e)} / \gamma^{(i)}$  и в этом случае остается малым.

В работе [4] интегральная плотность ионнозвуковых шумов, измеренная по интенсивности излучения геликонов за счет трехплазменных процессов, оказалась порядка  $10^{-2}$  эрг/см<sup>3</sup>. При параметрах плазмы  $n \sim 10^{13}$  см<sup>-3</sup>,  $T_e \sim 100$  эв из (2.13) можно вычислить

$$\gamma_H^{(i)} \leq \omega_{pi} \cdot 10^{-5}$$

При времени регистрации  $\tau \sim 0.1$  мксек получаем  $\gamma_{\text{H}}^{(i)} \tau < 10^{-2}$ , т. е. геликоны, излученные за счет рассеяния ионного звука на частицах, не могут быть зарегистрированы. Действительно, экспоненциальный рост плотности энергии геликонов в экспериментах [4] не наблюдался. В то же время при  $\Omega \sim 2\omega_{pi}$  был зарегистрирован отчетливый пик интенсивности длинноволновых шумов, причем плотность энергии по порядку величины соответствовала выражению (1.15).

Автор благодарит Л. И. Рудакова за руководство работой.

Поступила 13 I 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бабыкин М. В., Гаврин П. П., Завойский Е. К., Рудаков Л. И., Скорюпин В. А. Турбулентный нагрев плазмы током прямого разряда. Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, vol. 2, Vienna, 1966.
2. Бабыкин М. В., Гаврин П. П., Завойский Е. К., Недосеев С. Л., Рудаков Л. И., Скорюпин В. А. Турбулентный нагрев плазмы током в пробкотроне. ЖЭТФ, 1967, т. 52, вып. 3.
3. Завойский Е. К., Рудаков Л. И. Турбулентный нагрев плазмы. Атомная энергия, 1967, т. 23, № 5.
4. Калинин Ю. Г., Лин Д. Н., Рудаков Л. И., Рютов В. Д., Скорюпин В. А. Наблюдение шумов плазмы при турбулентном нагреве. Докл. АН СССР, 1969, т. 189, № 2.
5. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. Слабо турбулентная плазма в магнитном поле. ЖЭТФ, 1962, т. 43, № 6.
6. Галеев А. А., Карпман В. И. Турбулентная теория слабонервновесной разреженной плазмы и структура ударных волн. ЖЭТФ, 1963, т. 44, вып. 2.
7. Цытович В. Н., Шварцбург А. Б. К теории нелинейного взаимодействия волн в магнитоактивной анизотропной плазме. ЖЭТФ, 1965, т. 49, вып. 3.
8. Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме. М., «Наука», 1967.
9. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Ситенко А. Г., Степанов К. Н. Коллективные колебания в плазме. М., Атомиздат, 1964.