ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1996, том 350, № 3, с. 312–314

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ОПЕРАТОРНОЗНАЧНЫМ СИМВОЛОМ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

© 1996 г. Академик В. П. Маслов, О. Ю. Шведов

Поступило 05.05.96 г.

Во многих моделях квантовой теории поля [1–3] существуют солитоны – статические решения классических уравнений поля с конечной энергией. Согласно [1], эти решения играют важную роль при построении квазиклассической асимптотики соответствующей спектральной серии оператора Гамильтона, которая была найдена в [1].

В этой работе мы рассмотрим применение теории комплексного ростка [4, 5] к квантовой теории поля. В частности, для моделей [1] мы получим не только асимптотический спектр гамильтониана, но и асимптотические собственные функции. Мы рассмотрим также более сложные модели, для которых метод работ [1, 2] неприменим. В этом случае мы получим спектр и собственные функции гамильтониана с помощью бесконечномерного аналога [6] метода комплексного ростка для уравнений с операторнозначным символом [7]. Отметим, что рассуждения этой работы носят эвристический характер.

Рассмотрим уравнение вида

$$H\Psi = E\Psi, \tag{1}$$

где $\Psi = \Psi(x_1, \ldots, x_k; \varphi(\cdot))$ – функционал, зависящий от k вещественных переменных $x_1, \ldots, x_k$ и функции $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^l$. Оператор H в уравнении (1) имеет вид

$$H = \int dx\left[-\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(x)} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\varepsilon}U(\sqrt{\varepsilon}\varphi(x))\right] + \frac{\alpha}{\varepsilon}\left[\sum_{i=1}^{k}\left(-\frac{1}{2m_i}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \right.\right. \tag{2}$$

$$\left.\left. + W[\sqrt{\varepsilon}\varphi(x_i)]\right) + \sum_{1\le i<j\le k} V(x_i - x_j)\right].$$

В этой формуле $\varepsilon > 0$, $U: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $V: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $W: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Уравнение (1) отвечает следующей физической задаче. Имеется система, состоящая из квантованного скалярного поля и k частиц, которые взаимодействуют с этим полем. Функция U имеет смысл потенциала самодействия скалярного поля, величины $m_i\varepsilon/\alpha$ являются массами частиц, взаимодействие частиц с полем описывается слагаемым $\frac{\alpha}{\varepsilon}W$. Функция $\frac{\alpha}{\varepsilon}V$ играет роль потенциала взаимодействия между частицами.

Оказывается, что при $\varepsilon \to 0$ к уравнению (1) можно применять квазиклассические методы. Действительно, после замены

$$\Phi = \sqrt{\varepsilon}\varphi$$

уравнение (1) принимает вид

$$\hat{\mathcal{H}}\left(-i\varepsilon\frac{\delta}{\delta\Phi}, \Phi\right)\Psi = E\Psi, \tag{3}$$

где $\hat{\mathcal{H}}(\Pi, \Phi)$ – некоторый оператор в пространстве $L^2(\mathbb{R}^k)$. Следует различать два случая.

1. $\alpha = O(\varepsilon)$. В этом случае при $\varepsilon \to 0$ оператор $\hat{\mathcal{H}}(\Pi, \Phi)$ пропорционален единичному, а приближенный спектр задачи (1) может быть найден по методу [1, 2].

2. $\alpha = O(1)$. В этом случае метод работ [1, 2] неприменим. Однако уравнение (1) может быть исследовано с помощью метода комплексного ростка для задач с операторнозначным символом.

Рассмотрим сначала применение теории комплексного ростка [4] к первому случаю:

$$\varepsilon \to 0, \ \alpha = \varepsilon\beta, \ \beta = \text{const}.$$

Аналогом классического гамильтониана является функционал

$$\mathcal{H}_0(\Pi, \Phi) = \int dx\left[\frac{1}{2}\Pi^2(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 + U(\Phi(x))\right], \tag{4}$$

где $\Pi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – бесконечный набор импульсов, $\Phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – бесконечный набор координат. Пусть

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

точка покоя гамильтониана (4), удовлетворяющая уравнению

$$\Phi_c''(x) = U'(\Phi_c(x)). \tag{6}$$

Для того чтобы величина $\mathcal{H}_0(0, \Phi_c)$ была конечной, потребуем, чтобы $\Phi_c(-\infty) = \Phi_c^{(1)}$, $\Phi_c(+\infty) = \Phi_c^{(2)}$, причем при $\Phi \to \Phi_c^{(1,2)}$

$$U(\Phi) \sim \frac{\mu_{1,2}^2}{2}(\Phi - \Phi_c^{(1,2)})^2, \ \mu_{1,2} > 0.$$

Отметим, что точка покоя (5) является вырожденной, поскольку точки $\Pi(x) = 0$, $\Phi(x) = \Phi_c(x-a)$ также являются точками покоя гамильтониана (4).

Рассмотрим одномерное изотропное многообразие $a \mapsto (\Pi_a, \Phi_a)$, $a \in \mathbb{R}$, в бесконечномерном фазовом пространстве

$$\Pi_a(x) = 0, \ \Phi_a(x) = \Phi_c(x-a). \tag{7}$$

Это многообразие инвариантно относительно канонического преобразования, отвечающего гамильтониану (4). Рассмотрим следующий функционал, соответствующий многообразию (7):

$$\Psi_0(x_1, \ldots, x_k; \varphi(\cdot)) = \\ = \chi_0(x_1 - a, \ldots, x_k - a)\mathcal{F}_0\left[\varphi(\cdot) - \frac{\Phi_a(\cdot)}{\sqrt{\varepsilon}}\right], \tag{8}$$

где $a = \min\left\|\varphi - \frac{\Phi_a}{\sqrt{\varepsilon}}\right\|_{L^2(\mathbb{R})}$, а $\mathcal{F}_0$ быстро убывает при стремлении аргумента к бесконечности.

Отметим, что функционал (8) инвариантен относительно замены $x \to x - a$, $\varphi(x) \to \varphi_a(x) = \varphi(x-a)$, а значит, является собственным вектором оператора импульса

$$P = \sum_{i=1}^{k}\left(-i\frac{\partial}{\partial x_i}\right) - i\int dx\, \varphi'(x)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}.$$

Как нетрудно проверить непосредственной подстановкой в уравнение

$$i\frac{d}{dt}(e^{-iHt}\Psi_0) = He^{-iHt}\Psi_0,$$

асимптотика функционала $e^{-iHt}\Psi_0$ имеет вид

$$(e^{-iHt}\Psi_0)(x_1, \ldots, x_k; \varphi(\cdot)) = e^{-\frac{i}{\varepsilon}\mathcal{H}_0(0, \Phi_c)t} \times \\ \times \chi_t(x_1 - a, \ldots, x_k - a)\mathcal{F}_t\left[\varphi(\cdot) - \frac{\Phi_a(\cdot)}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + O(\sqrt{\varepsilon}),$$

где функция χ_t и функционал $\mathcal{F}_t$ удовлетворяют уравнениям

$$i\frac{\partial}{\partial t}\chi_t(x_1, \ldots, x_k) = \beta A_{\Phi_c}\chi_t(x_1, \ldots, x_k), \tag{9}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}_t[\phi(\cdot)] = H_2\mathcal{F}_t[\phi(\cdot)]. \tag{10}$$

В этих уравнениях

$$A_\Phi = \sum_{i=1}^{k}\left(-\frac{1}{2m_i}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + W(\Phi(x_i))\right) + \sum_{1 \le i < j \le k} V(x_i - x_j), \\ H_2 = \int dx\left[-\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\delta\phi(x)\delta\phi(x)} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\phi(x)V''(\Phi_c(x))\phi(x)\right]. \tag{11}$$

Пусть все собственные значения ω_n^2 задачи

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V''(\Phi_c(x))\right]f_n = \omega_n^2 f_n \tag{12}$$

неотрицательны, и только одно из них равно нулю:

$$\omega_0 = 0, \ f_0 = \Phi_c'.$$

В этом случае уравнение (10) имеет решение вида

$$\mathcal{F}_t[\phi(\cdot)] = e^{-i\varepsilon^{(\nu)}t}A_1^{+\nu_1}A_2^{+\nu_2}\ldots\mathcal{F}^{(0)}[\phi(\cdot)], \tag{13}$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots)$, ν_i – целые неотрицательные числа,

$$\varepsilon^{(\nu)} = \varepsilon^{(0)} + \sum_{k \ge 1}\omega_k\nu_k,$$

$$\varepsilon^{(0)} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\sqrt{-\frac{d^2}{dx^2} + V''(\Phi_c(x))},$$

$$A_k^+ = \omega_k\int f_k^*(x)\phi(x)dx - \int f_k(x)\frac{\delta}{\delta\phi(x)}dx,$$

$$\mathcal{F}^{(0)}[\phi(\cdot)] = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\phi, \sqrt{-\frac{d^2}{dx^2} + V''(\Phi_c(x))}\phi\right)\right].$$

Отметим, что величина $\varepsilon^{(0)}$ содержит расходимость, которая может быть устранена [1] методом перенормировки [8].

Обозначим через $\chi^{(n)}(x_1, \ldots, x_k)$ собственные функции оператора A_{Φ_c}, отвечающие собственным значениям $E^{(n)}$.

При

$$\Psi_0(x_1, \ldots, x_k; \varphi(\cdot)) = \chi^{(n)}(x_1 - a, \ldots, x_k - a) \times \\ \times (A_1^{+\nu_1}A_2^{+\nu_2}\ldots\mathcal{F}^{(0)})\left[\varphi(\cdot) - \frac{\Phi_a(\cdot)}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$$

выполнено соотношение

$$e^{-iHt}\Psi = e^{-iEt}\Psi + O(\varepsilon^{1/2}), \tag{14}$$

если

$$E = \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{H}_0(0, \Phi_c) + \varepsilon^{(0)} + \beta E^{(n)} + \sum_{i \ge 1}\omega_i\nu_i. \tag{15}$$

Таким образом, мы нашли приближенный спектр и приближенные собственные функции оператора (2) при $\alpha = \varepsilon\beta$, $\varepsilon \to 0$. Отметим, что спектр (15) может быть также найден по методу [1–3].

Рассмотрим теперь построение асимптотики спектра при

$$\alpha = \text{const}, \ \varepsilon \to 0.$$

В этом случае аналогом функции Гамильтона является [7] собственное значение λ оператора $\mathcal{H}_0(\Pi, \Phi) + \alpha A_\Phi$, т.е.

$$\lambda(\Pi, \Phi) = \mathcal{H}_0(\Pi, \Phi) + \alpha\mu(\Phi),$$
$$(A_\Phi - \mu(\Phi))\chi(x_1, \ldots, x_k) = 0. \tag{16}$$

Точка покоя гамильтониана λ удовлетворяет уравнению

$$\Phi''_{c,\alpha}(x) = U'(\Phi_{c,\alpha}(x)) + \alpha\frac{\delta\mu}{\delta\Phi(x)}[\Phi_{c,\alpha}(\cdot)]. \tag{17}$$

Как и в предыдущем случае, рассмотрим функционал Ψ_0 вида (8), где $\chi_0 = \chi$. Оказывается, что для функционала $e^{-iHt}\Psi_0$ также справедливо соотношение (9), если

$$\chi_t = \chi e^{-\frac{i}{\varepsilon}\mu(\Phi_{c,\alpha})t},$$

а $\mathcal{F}_t$ удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}_t[\phi(\cdot)] =$$
$$= \left(H_2 + \alpha\int dx\,dy\phi(x)\frac{\delta^2\mu}{\delta\Phi(x)\delta\Phi(y)}\phi(y)\right)\mathcal{F}_t[\phi(\cdot)]. \tag{18}$$

Если собственные значения ω_n^2 задачи

$$B_\alpha f_n = \omega_{n,\alpha} f_n,$$
$$(B_\alpha f)(x) = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V''(\Phi_{c,\alpha}(x))\right)f(x) +$$
$$+ \alpha\int dy\frac{\delta^2\mu}{\delta\Phi(x)\delta\Phi(y)}f(y) \tag{19}$$

неотрицательны, и только одно из них, ω_0, равно нулю, то уравнение (18) имеет решения вида (13) при

$$\varepsilon^{(\nu)} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\sqrt{B_\alpha} + \sum_{i\geq 1}\omega_{i,\alpha}\nu_i; \ \mathcal{F}^{(0)}[\phi(\cdot)] = e^{-\frac{1}{2}(\phi, \sqrt{B_\alpha}\phi)}.$$

Поэтому при

$$\Psi_0(x_1, \ldots, x_k; \varphi(\cdot)) = \chi(x_1 - a, \ldots, x_k - a)\times$$
$$\times(A_1^{+\nu_1}A_2^{+\nu_2}\ldots\mathcal{F}^{(0)})\left[\varphi(\cdot) - \frac{\Phi_{a,\alpha}(\cdot)}{\sqrt{\varepsilon}}\right] \tag{20}$$

выполнено соотношение (14), причем

$$E = \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{H}_0(0, \Phi_{c,\alpha}) + \frac{\alpha}{\varepsilon}\mu(\Phi_{c,\alpha}) +$$
$$+ \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\sqrt{B_\alpha} + \sum_{i\geq 1}\omega_{i,\alpha}\nu_i. \tag{21}$$

Таким образом, при $\alpha = O(1)$ приближенный спектр оператора (2) имеет вид (21). Функционал $\mu(\Phi)$ является собственным значением зависящего от Φ оператора A_Φ (11). Функция Φ_c при $\alpha = O(1)$ является решением уравнения (17), отличающегося от классического уравнения поля (6). Величины $\omega_{i,\alpha}$ являются собственными значениями интегрального оператора B_α.

Отметим, что при $\alpha \to 0$ выполнены соотношения

$$\Phi_{c,\alpha} = \Phi_c + O(\alpha),$$
$$\mathcal{H}_0(0, \Phi_{c,\alpha}) = \mathcal{H}_0(0, \Phi_c) + O(\alpha^2),$$
$$\mathrm{Tr}\sqrt{B_\alpha} \to \mathrm{Tr}\sqrt{B}, \ \omega_{i,\alpha} \to \omega_i.$$

При $\alpha/\varepsilon = \beta = \text{const}$ формула (21) переходит в следующую:

$$\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{H}_0(0, \Phi_c) + \beta\mu(\Phi_c) +$$
$$+ \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\sqrt{B} + \sum_{i\geq 1}\omega_i\nu_i + O(\varepsilon).$$

Эта формула совпадает при некотором n с формулой (15).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dashen R.F., Hasslacher B., Neveu A.* // Phys. Rev. D. 1974. V. D10. P. 4130.
2. *Rajaraman R.* // Phys. Rept. 1975. V. 21. P. 227.
3. *Faddeev L.D., Korepin V.E.* // Phys. Rept. 1978. V. 42. P. 1.
4. *Маслов В.П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977. 384 с.
5. *Маслов В.П.* Операторные методы. М.: Наука, 1973. 544 с.
6. *Маслов В.П., Шведов О.Ю.* // ДАН. 1996. Т. 349. № 4. С. 455–459.
7. *Маслов В.П.* Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965. 549 с.
8. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1973. 416 с.