Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Я. Ш. Ильясов, О глобальных положительных решениях параболических уравнений с неопределенным знаком нелинейности,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 4, 518–526

https://www.mathnet.ru/de11262

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.84
23 апреля 2025 г., 02:22:08

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 4, с. 518–526

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

О ГЛОБАЛЬНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ЗНАКОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ

© 2005 г. Я. Ш. Ильясов

1. Введение. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ с гладкой границей $\partial\Omega$. В настоящей работе рассматриваются параболические уравнения

$$u_t - \Delta u = \lambda u + f(x)|u|^{\gamma-2}u \quad \text{на} \quad (0,T)\times\Omega, \quad u=0 \quad \text{на} \quad (0,T)\times\partial\Omega \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1.2}$$

где $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, λ – вещественный параметр,

$$2 < \gamma \leq 2^* < \infty, \quad 2^* = \begin{cases} 2N/(N-2), & \text{если} \quad 2 < N, \\ +\infty, & \text{если} \quad 2 \geq N, \end{cases} \tag{1.3}$$

$f \in L^\infty(\Omega)$, при этом предполагается, что нелинейность $f(x)|u|^{\gamma-2}u$ имеет неопределенный знак (см. [1]), т.е. функция f может менять знак: $f(x) > 0$ при $x \in \Omega^+ \subset \Omega$, $f(x) < 0$ при $x \in \Omega^- \subset \Omega$ и $f(x) = 0$ при $x \in \Omega^0 \subset \Omega$.

Исследование условий, при которых существуют глобальные решения параболических уравнений, возможности существования так называемого явления blow-up, важны во многих задачах физики, химической кинетики, биологии и др. В настоящее время здесь имеются значительные достижения (см. обзоры [2–4]). Однако существуют еще довольно большие классы нелинейных параболических уравнений, важные в прикладных исследованиях, для которых ответы на данные вопросы остаются открытыми. К такому классу относятся параболические уравнения вида (1.1), (1.2) с неопределенным знаком нелинейности. Такие уравнения характеризуются более сложной геометрией соответствующих функционалов энергий, нетривиальной структурой многообразия ветвей решений. Уже в исследовании соответствующих стационарных уравнений возникают значительные сложности [1, 5, 6].

Известно, что при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ задача (1.1), (1.2) имеет единственное (локальное) положительное решение $u(t,x)$, определенное на максимальном интервале $[0, T_{\max})$ таком, что $u \in L^\infty((0,T)\times\Omega)$ при всех $T < T_{\max}$ [7]. При этом выполняется следующая альтернатива: либо $T_{\max} = +\infty$, так что существует глобальное решение, либо $T_{\max} < \infty$ и решение взрывается за конечный интервал времени: $\|u(t)\|_{L^\infty} \to \infty$ при $t \to T_{\max}$. Однако ответ на вопрос, при каких условиях локальные решения задачи (1.1), (1.2) являются глобальными, а при каких взрывающимися, в целом остается открытым.

Рассматривая задачу (1.1), (1.2) как однопараметрическое семейство по параметру λ, данную проблему можно сформулировать следующим образом. Будем называть $\Lambda_1 \in \mathbb{R}$ *критическим значением*, если для некоторого $\varepsilon > 0$ на одном из интервалов $(\Lambda_1 - \varepsilon, \Lambda_1)$, $(\Lambda_1, \Lambda_1 + \varepsilon)$ при всех λ из этого интервала не существует глобальных решений задачи (1.1), тогда как на другом глобальные решения задачи (1.1) существуют. Основной задачей, которая ставится в данной работе, является решение проблемы *о существовании критических значений семейства задач* (1.1), т.е. нахождение ответа на вопрос, обладает ли критическими значениями семейство параболических задач (1.1).

В случае уравнений (1.1) со знакоопределенной нелинейностью, когда $f > 0$ или $f < 0$ всюду на Ω, критические значения можно найти непосредственно. Это множество полностью описывается (*линейными характеристическими значениями* [6, 8]) точечным спектром

$\{\lambda_i\}$ оператора $(-\Delta)$, заданного на $W_0^1(\Omega)$. В частности, для положительных решений задачи (1.1), (1.2) критическим значением является первое собственное значение λ_1, определяемое вариационным принципом Куранта–Вейля и Пуанкаре:

$$\lambda_1 = \inf\left\{ \int |\nabla u|^2 \, dx \Big/ \int |u|^2 \, dx \,\middle|\, u \in C_0^\infty(\Omega) \right\}. \tag{1.4}$$

Так что если $f > 0$, то любое положительное решение взрывается при любом $\lambda > \lambda_1$, тогда как при $\lambda < \lambda_1$ существуют глобальные положительные решения. Если $f < 0$, то картина обратная: при всех $\lambda > \lambda_1$ существуют глобальные положительные решения, а при $\lambda < \lambda_1$ не существуют.

Ситуация совершенно иная, когда нелинейность в уравнении (1.1) имеет неопределенный знак. Характерным отличительным свойством таких уравнений является то, что структура бифуркационных ветвей соответствующих (1.1) стационарных эллиптических краевых задач не является простой [1]. Множество их бифуркационных (характеристических) значений содержит не только спектр соответствующих линейных задач, но и включает в себя так называемые нелинейные характеристические значения [6, 8].

Основным результатом настоящей работы является доказательство существования критического значения Λ^* краевой задачи (1.1) для положительных решений. Наш подход основан на новом вариационном принципе, который позволяет не только доказать существование Λ^*, но и определить его значение как решение некоторой минимаксной вариационной задачи. В частных случаях задачи (1.1) со знакоопределенной нелинейностью оно совпадает с известными принципами Куранта–Вейля и Пуанкаре (1.4). При этом следует отметить, что решение этой вариационной задачи дает возможность найти соответствующую функцию Ляпунова для (1.1).

В п. 2 вводятся основные определения и излагаются основные результаты работы; в п. 3 доказываются вспомогательные результаты и в п. 4 доказываются основные результаты работы.

2. Основные результаты. В дальнейшем $W = W_0^1(\Omega)$ – обычное соболевское пространство: пополнение пространства финитных функций $C_0^\infty := C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|u\| = (\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx)^{1/2}$. Будем также использовать обозначения $C_0^{1,+} = \{\phi \in C_0^1 \setminus \{0\} |\ \phi \geq 0\}$, $W_0^+ = \{w \in W_0^1(\Omega) \setminus \{0\} |\ w \geq 0\}$. Введем отображение $\mathrm{d}_\Omega(x) := \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$, $x \in \Omega$. Будем рассматривать следующие конусы функций в W:

$$S = \{w \in C^1(\overline{\Omega}) |\ w(x) > C(w)\mathrm{d}_\Omega(x) \ \text{ в } \ \Omega,\ w = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega\}, \tag{2.1}$$

$$\Phi = \{\phi \in C_0^1(\Omega) |\ \phi(x) \geq 0 \ \text{ при } \ x \in \Omega\}. \tag{2.2}$$

Здесь $0 < C(w) < +\infty$ – некоторая константа, вообще говоря, зависящая от w.

Пусть D – некоторая подобласть в Ω с гладкой границей. Далее всюду $\lambda_1(D)$ и $\phi_1(D)$ – первое собственное значение и соответствующая собственная функция краевой задачи

$$-\Delta\phi_1(D) = \lambda_1\phi_1(D) \quad \text{на} \quad D, \tag{2.3}$$

$$\phi_1(D) = 0 \quad \text{на} \quad \partial D. \tag{2.4}$$

Хорошо известно [9, 10], что $\lambda_1(D)$ простое и изолированное, при этом $\phi_1(D) \in S(D)$. Далее в случае $D = \Omega$ будем использовать сокращенные обозначения $\lambda_1 := \lambda_1(\Omega)$ и $\phi_1 := \phi_1(\Omega)$.

Слабым локальным решением задачи (1.1) будем называть функцию $u \in L^\infty((0,T) \times \Omega)$, $T < +\infty$, удовлетворяющую следующим условиям:

a) $u(t)$ – слабо непрерывное отображение из $[0,T)$ в $W_0^1(\Omega)$;

b) существует слабо непрерывное отображение из $[0,T)$ в $L_2 := L_2(\Omega)$, обозначаемое через u_t, такое, что

$$(u(t_1), \phi) - (u(t_2), \phi) = \int_{t_1}^{t_2} (u_t, \phi) \, dt \tag{2.5}$$

для любых $0 \le t_1 < t_2 \le T$ и при всех $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$;

c) при любых $\phi : [0,T) \to W_0^{1,2}(\Omega)$, удовлетворяющих условиям a), b), выполняется тождество

$$(u_t(t), \phi(t)) - \int_\Omega (\nabla u(t), \nabla\phi(t))\,dx = \lambda \int_\Omega u(t)\phi(t)\,dx + \int_\Omega f(x)|u(t)|^{\gamma-2}u(t)\phi(t)\,dx. \tag{2.6}$$

Если дополнительно выполняется условие

d) $u(t) \in S$ при почти всех $t \in (0,T)$, то $u(t)$ будем называть S-решением.

Слабыми *стационарными решениями* $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$ задачи (1.1) будем называть решения задачи

$$-\Delta w = \lambda w + f(x)|w|^{\gamma-2}w \quad \text{на} \quad \Omega, \tag{2.7}$$

$$w = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{2.8}$$

где равенство понимается также в смысле (2.6), т.е. как равенство

$$-\int_\Omega (\nabla w, \nabla\phi)\,dx = \lambda \int_\Omega w\phi\,dx + \int_\Omega f(x)|w|^{\gamma-2}w\phi\,dx$$

для любых $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Стандартным образом, используя известные результаты о регулярности решений параболических (эллиптических) уравнений и принципы максимума [7, 11] (см. также [9, 10]) выводится, что любое слабое решение $u(t)$ (слабое стационарное решение w) задачи (1.1), (1.2) ((2.7), (2.8)) принадлежит $C(0,T; C^1(\Omega))$ ($C^1(\Omega)$).

При этом в эллиптическом случае если стационарное решение неотрицательно $w \ge 0$, то по строгому принципу максимума [10, 12] вытекает, что $w(x) > C(w)\mathrm{d}_\Omega(x)$ при $x \in \Omega$ для некоторого $C(w) \in (0,\infty)$. Таким образом, любое неотрицательное стационарное решение задачи (1.1) является S-решением: $w \in S$.

В дальнейшем существование как таковых нестационарных S-решений задачи (1.1), (1.2) для нас будет важно при $\lambda > \lambda_1$. В этом случае можно заключить, что если $u(0) = u_0 \in S$, то слабое решение $u(t)$ является S-решением, т.е. $u(t) \in S$ при $t \in [0,T)$. Действительно, тогда $u_0 \ge \varepsilon\phi_1$ при некотором малом $\varepsilon > 0$. Отсюда, поскольку $\varepsilon\phi_1 \in S$ при $\lambda > \lambda_1$ является субрешением задачи (1.1), (1.2), то по принципу максимума [13, 14] вытекает, что $u(t) \ge \varepsilon\phi_1$ при $t \in [0,T)$ и, следовательно, $u(t) \in S$.

Введем обозначения

$$H_\lambda(v) = \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \lambda \int_\Omega |v|^2\,dx, \quad F(v) = \int_\Omega f(x)|v|^\gamma\,dx, \quad v \in W.$$

Следующий вариационный функционал играет решающую роль в данной работе

$$L(u,\phi) := \int_\Omega \left(\nabla u, \nabla\left(\frac{\phi^\gamma}{u^{\gamma-1}}\right)\right)dx \Big/ \int_\Omega \left(\frac{\phi^\gamma}{u^{\gamma-2}}\right)dx, \quad (u,\phi) \in S \times \Phi.$$

Замечание 2.1. Функционал $L(u,\phi)$ корректно определен на $S \times \Phi$. Это вытекает из того, что $u(x) > C(u)\mathrm{d}_\Omega(x)$ на Ω при $u \in S$. Поэтому при $\phi \in \Phi$ имеем $(\phi/u)^{\gamma-1} \in C^1(\Omega)$ и, следовательно, $(\phi/u)^{\gamma-1}\phi \in C_0^1(\Omega)$, $(\phi/u)^{\gamma-1}\phi \ge 0$.

Дополнительно к собственному значению λ_1 вводим следующие два основных характеристических значения

$$\Lambda^d = \sup_{u \in S} \inf_{\phi \in \Phi} \{L(u,\phi) |\ F(\phi) > 0\}, \tag{2.9}$$

$$\Lambda^u = \inf_{\phi \in \Phi} \sup_{u \in S} \{L(u,\phi) |\ F(\phi) > 0\}, \tag{2.10}$$

где мы полагаем

$$\Lambda^d = \Lambda^u = +\infty, \quad \text{если} \quad \{\phi \in \Phi |\ F(\phi) > 0\} = \emptyset.$$

Легко видеть, что $\Lambda^d \le \Lambda^u$, при этом (см. ниже) $\lambda_1 \le \Lambda^d$. Если $-\infty < \Lambda^d = \Lambda^u < +\infty$, то будем говорить, что выполняется минимаксное условие, и будем обозначать $\Lambda^* := \Lambda^d = \Lambda^u$, а если при этом существует точка $(\hat{u}, \hat{\phi}) \in S \times \Phi$, на которой достигается это минимаксное условие, то будем называть ее седловой точкой.

Приведем наш первый основной результат.

Теорема 2.1. *Пусть* $2 < \gamma \le 2^*$ *и* $f \in L^\infty(\Omega)$.

I. *Пусть* $\lambda_1 < \Lambda^d \le +\infty$. *Тогда при всех* $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda^d)$ *существуют глобальные положительные решения задачи (1.1). Более того,*

1) при всех $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda^d)$ *существует стационарное положительное решение задачи (1.1);*

2) при всех $\lambda \in (\Lambda^d, +\infty)$ *не существует стационарных положительных решений задачи (1.1).*

II. *Пусть* $\Lambda^u < +\infty$. *Тогда при всех* $\lambda \in (\Lambda^u, +\infty)$ *не существует глобальных положительных* S*-решений задачи (1.1).*

Таким образом, существование и не существование глобальных решений задачи (1.1) определяются условиями $\lambda_1 < \Lambda^d$ и $\Lambda^u < +\infty$. При этом если выполняется минимаксное условие $\Lambda^* := \Lambda^d = \Lambda^u$, то в рамках данного подхода проблема существования глобальных решений задачи (1.1) имеет законченное решение, а Λ^* является бифуркационным значением ветвей глобальных решений семейства задач (1.1).

В следующей основной теореме устанавливаются случаи, когда эти условия выполняются.

Теорема 2.2. *Пусть* $2 < \gamma \le 2^*$, $f \in L^\infty(\Omega)$.

I. *Пусть* $\Omega^+ \cup \Omega^0 = \emptyset$. *Тогда* $\Lambda^d = \Lambda^u = +\infty$ *и при этом если* $\lambda \in (\lambda_1, +\infty)$, *то существует глобальное положительное решение задачи (1.1), а если* $\lambda < \lambda_1$, *то не существует стационарных положительных решений задачи (1.1).*

II. *Пусть* $F(\phi_1) > 0$. *Тогда выполняется минимаксное условие. Более того,* $\lambda_1 = \Lambda^d = \Lambda^u$ *и при этом если* $\lambda > \lambda_1$, *то не существует глобальных положительных решений задачи (1.1). Если дополнительно выполняется условие* $\gamma < 2^*$, *то при всех* $\lambda < \lambda_1$ *существует глобальное положительное решение задачи (1.1).*

III. *Пусть* $F(\phi_1) < 0$ *и* $\Omega^+ \ne \emptyset$. *Тогда* $\lambda_1 < \Lambda^d$ *и при этом*

a) при всех $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda^d]$ *существует глобальное положительное решение задачи (1.1). Более того, в случае докритического показателя нелинейности* $\gamma < 2^*$ *глобальное положительное решение задачи (1.1) существует также и при всех* $\lambda \le \lambda_1$;

b) если $\lambda \in (\Lambda^u, +\infty)$, *то не существует глобальных положительных решений задачи (1.1).*

Здесь и далее $D = \emptyset$ и $D \ne \emptyset$ при $D \subset \Omega$ означает, что D имеет нулевую и ненулевую лебегову меру соответственно.

Замечание 2.2. В теореме 2.2 не рассматриваются особые случаи $F(\phi_1) = 0$ и $F(\phi_1) < 0$ при условии, что $\Omega^0 \ne \emptyset$.

Замечание 2.3. В утверждении III теоремы 2.2 нами оставлен непроанализированный зазор (Λ^d, Λ^u). При некоторых дополнительных условиях можно доказать, что здесь выполняется минимаксное условие $\Lambda^* := \Lambda^d = \Lambda^u$. Однако доказательство этого утверждения не простое, и здесь не приводится.

Доказательство теоремы 2.1 основано на прямом анализе вариационных задач (2.9) и (2.10). Доказательство существования решений вне критических точек Λ^d, Λ^u проводится с использованием метода супер-субрешений [15], при этом для нахождения суперрешений существенно используется структура самих вариационных задач (2.9) и (2.10). При критическом же значении Λ^d решение находится путем построения решения непосредственно вариационной задачи (2.9). Несуществование глобальных решений доказывается методом функции Ляпунова (в окрестности бесконечной точки). При этом существование самих функций Ляпунова устанавливается также с использованием прямого анализа структуры вариационных задач (2.9) и (2.10).

3. Анализ вариационных задач (2.9) и (2.10). Здесь докажем некоторые ключевые вспомогательные утверждения о вариационных задачах (2.9) и (2.10). Для этого приведем следующую основную лемму, доказанную в работе [8].

Лемма 3.1. *Пусть* $2 < \gamma \le 2^*$, $\lambda > 0$, $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$, $\phi \ge 0$ *и* $u \in S$. *Тогда*

$$H'_\lambda(u)((\phi/u)^{\gamma-1}\phi) - H'_\lambda(\phi)((\phi/u)^{\gamma-1}u) \le 0, \tag{3.1}$$

где равенство выполняется тогда и только тогда, когда u *и* ϕ *коллинеарные, т.е.* $u = s\phi$ *в* Ω *для некоторого* $s > 0$.

Из этой леммы вытекает

Предложение 3.1. *Пусть* $2 < \gamma \le 2^*$ *и* $\Omega^{0,+} := \Omega^+ \cup \Omega^0 = \{x \in \Omega |\ f(x) \ge 0\} \ne \emptyset$. *Тогда* $\Lambda^u \le \lambda_1(\Omega^{0,+})$.

Доказательство. Действительно, пусть $\phi_{0,+} := \phi_1(\Omega^{0,+}) \in \Phi$ – собственная функция задачи (2.3), (2.4) на $\Omega^{0,+}$. Тогда из неравенства (3.1) вытекает, что при каждом $u \in S$ справедлива оценка

$$L(u, \phi_{0,+}) = \int\limits_\Omega \left(\nabla u, \nabla\left(\frac{\phi_{0,+}^\gamma}{u^{\gamma-1}}\right)\right) dx \Big/ \int\limits_\Omega \left(\frac{\phi_{0,+}^\gamma}{u^{\gamma-2}}\right) dx \le$$

$$\le \int\limits_\Omega \left(\nabla \phi_{0,+}, \nabla\left(\frac{\phi_{0,+}^{\gamma-1}}{u^{\gamma-2}}\right)\right) dx \Big/ \int\limits_\Omega \left(\frac{\phi_{0,+}^\gamma}{u^{\gamma-2}}\right) dx = \lambda_1(\Omega^{0,+}). \tag{3.2}$$

Отсюда, поскольку $F(\phi_{0,+}) \ge 0$, получаем, что

$$\Lambda^u = \inf_{\phi\in\Phi} \sup_{u\in S}\{L(u,\phi)|\ F(\phi) > 0\} \le \sup_{u\in S}\{L(u, \phi_{0,+})\} = \lambda_1(\Omega^{0,+}).$$

Рассмотрим следующую вариационную задачу:

$$\overline{\lambda}_1 := \sup_{u\in S}\{\inf_{\psi\in C_0^\infty}\{L(u,\psi)|\ \psi \ge 0\}\}. \tag{3.3}$$

Предложение 3.2. *Пусть* $\lambda_1 := \lambda_1(\Omega)$ *– первое собственное значение задачи (2.3), (2.4) на* Ω. *Тогда* $\lambda_1 = \overline{\lambda}_1$.

Доказательство. Пусть $\phi_1 \in S$ – собственная функция, соответствующая собственному значению λ_1. Тогда, поскольку очевидно, что $\lambda_1 \equiv L(\phi_1, \psi)$ при всех $\psi \in C_0^\infty$, справедливо неравенство $\lambda_1 \le \overline{\lambda}_1$. С другой стороны, из леммы 3.1 аналогично (3.2) следует, что $\overline{\lambda}_1 \le \lambda_1$. Таким образом, $\lambda_1 = \overline{\lambda}_1$.

Из этого предложения вытекает, что $\lambda_1 \le \Lambda^d$. Действительно, в силу (2.9), (3.3) имеем $\overline{\lambda}_1 \le \Lambda^d$. Отсюда и из предложения 3.2 получаем, что $\lambda_1 = \overline{\lambda}_1 \le \Lambda^d$. В работе [8] доказана следующая

Лемма 3.2. *Пусть* $2 < \gamma \le 2^*$. *Строгое неравенство* $\lambda_1 < \Lambda^d$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $F(\phi_1) < 0$.

Докажем следующую лемму.

Лемма 3.3. *Пусть* $2 < \gamma \le 2^*$ *и* $F(\phi_1) > 0$, *тогда* $\lambda_1 = \Lambda^u$.

Доказательство. Пусть $F(\phi_1) > 0$, тогда ϕ_1 является допустимой функцией задачи (2.10). Отсюда, так как в силу (3.1) имеем $L(u, \phi_1) \le \lambda_1$ при всех $u \in S$, следует неравенство $\Lambda^u \le \lambda_1$. Учитывая теперь, что $\lambda_1 \le \Lambda^d \le \Lambda^u$, получаем требуемое.

Рассмотрим функционал

$$\tilde{L}(u,\psi) := \int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla\psi)\, dx \Big/ \int\limits_\Omega u\psi\, dx, \quad (u,\psi) \in S \times C_0^\infty.$$

Тогда вариационную задачу (2.9) можно заменить эквивалентной ей задачей

$$\Lambda^d = \sup_{u\in S}\{\inf_{\psi\in\Phi}\{\tilde{L}(u,\psi)|\ F'(u)(\psi)\geq 0,\ \psi\geq 0\}\}, \tag{3.4}$$

где полагаем

$$\Lambda^d = +\infty, \quad \text{если} \quad \Omega^{0,+} = \emptyset.$$

Эквивалентность вытекает из следующего рассуждения. Пусть зафиксировано $u \in S$. Тогда замена $\psi = \Psi_u(\phi) := (\phi^\gamma/u^\gamma)u$ является взаимно-однозначным отображением из Φ в Φ. Поэтому $\inf\limits_{\phi\in\Phi}\{L(u,\phi)|\ \ F(\phi)\geq 0\} = \inf\limits_{\psi\in\Phi}\{\tilde{L}(u,\psi)|\ \ F'(u)(\psi)\geq 0\}$.

Замечание 3.1. Привлекая другие рассуждения, можно доказать также, что вариационная задача (2.10) в свою очередь эквивалентна двойственной к (3.4) задаче

$$\Lambda^u = \inf_{\psi\in C_0^\infty}\{\sup_{u\in S}\{\tilde{L}(u,\psi)|\ F'(u)(\psi)\geq 0,\ \psi\geq 0\}\}. \tag{3.5}$$

4. Доказательство теорем 2.1, 2.2. В этом пункте докажем основные теоремы 2.1, 2.2 и выведем некоторые следствия.

Доказательство теоремы 2.1. Докажем сначала утверждение I2), т.е. что при всех $\lambda \in (\Lambda^d, +\infty)$ не существует положительных решений задачи (2.7), (2.8). Пусть $\lambda > \Lambda^d$. Из определения Λ^d (3.4) вытекает, что если $\lambda > \Lambda^d$, то для каждого $u \in S$ найдется $\phi(u) \geq 0$, $\phi(u) \in C_0^\infty(\Omega)$, такое, что одновременно выполняются неравенства $F'(u)(\phi(u)) \geq 0$ и $H'_\lambda(u)(\phi(u)) < 0$. Но если $u \in W^+$ удовлетворяет равенству (2.7), то эти неравенства не могут выполняться. Следовательно, получили требуемое.

Докажем теперь первую часть утверждения I теоремы 2.2. Как легко видеть, для этого достаточно доказать утверждение a), т.е. существование решения стационарной задачи (2.7), (2.8) (см. также ниже лемму 4.3). Доказательство этого утверждения разобьем на две части. Сначала докажем существование решения задачи (2.7), (2.8) для открытого интервала (λ_1, Λ^d).

Лемма 4.1. *Пусть $\lambda_1 < \Lambda^d < +\infty$, тогда при каждом $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda^d)$ существует положительное решение $w_\lambda \in S$ стационарной задачи (2.7), (2.8).*

Доказательство существования решений задачи (2.7), (2.8) будет получено методом супер-субрешений [15]. Для этого, во-первых, заметим, что при всех $\lambda_1 < \lambda$, если взять первую собственную функцию ϕ_1 задачи (2.3), (2.4) на Ω, при некотором достаточно малом $s > 0$ функция $s\phi_1$ будет субрешением задачи (2.7), (2.8), т.е. при всех $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi \geq 0$, будет выполняться неравенство $H'_\lambda(s\phi_1)(\psi) \geq F'(s\phi_1)(\psi)$. Следовательно, остается доказать существование суперрешения. Пусть $\lambda_1 < \lambda < \Lambda^d$, тогда в силу (3.4) найдется такое $b_\lambda \in S$, что будет выполняться следующая импликация: при любом $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi \geq 0$,

$$\text{если} \quad F'(b_\lambda)(\psi) \geq 0, \quad \text{то} \quad H'_\lambda(b_\lambda)(\psi) > 0. \tag{4.1}$$

Докажем утверждение о существовании верхнего решения задачи (2.7), (2.8).

Предложение 4.1. *Существует такое $r > 0$, что для всех $\phi \geq 0$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, справедливо неравенство $H'_\lambda(rb_\lambda)(\phi) \geq F'(rb_\lambda)(\phi)$.*

Доказательство. Предположим обратное, т.е. что для любого $r > 0$ существует такое $\phi \geq 0$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, что будет выполняться неравенство $H'_\lambda(rb_\lambda)(\phi) < F'(rb_\lambda)(\phi)$. Легко видеть, что это возможно только в том случае, если существуют такие $\phi, \psi \geq 0$, $\phi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$, что выполняются одновременно следующие неравенства: $H'_\lambda(b_\lambda)(\phi) < F'(b_\lambda)(\phi) < 0$ и $0 < H'_\lambda(b_\lambda)(\psi) < F'(b_\lambda)(\psi)$. Тогда найдется такое $\alpha \in (0,1)$, что будет справедливо равенство $F'(b_\lambda)(\alpha\psi + (1-\alpha)\phi) = 0$. Отсюда получаем $H'_\lambda(b_\lambda)(\alpha\psi + (1-\alpha)\phi)) < F'(b_\lambda)(\alpha\psi + (1-\alpha)\phi) = 0$, что противоречит импликации (4.1) при $\lambda_1 < \lambda < \Lambda^d$.

Это утверждение означает, что функция rb_λ является суперрешением задачи (2.7), (2.8). Таким образом, по методу супер-субрешений [15] при любом $\lambda_1 < \lambda < \Lambda^d$ существует положительное решение w_λ задачи (2.7), (2.8). При этом в силу метода супер-субрешений [15] имеем $s\phi_1 \leq w_\lambda \leq rb_\lambda$. Отсюда заключаем, что $w_\lambda \in S$. Лемма доказана.

Докажем теперь существование решения задачи (2.7), (2.8) при $\lambda = \Lambda^d$. Для этого нам понадобится

Лемма 4.2. *Пусть $\lambda_1 < \Lambda^d < +\infty$, тогда при $\lambda = \Lambda^d$ существует ненулевое слабое решение $w^* \in S$ стационарной задачи (2.7), (2.8). При этом $\Lambda^d = \tilde{L}(w^*, \phi)$ для каждого $\phi \in \Phi$, такого, что $F(\phi) \geq 0$.*

Доказательство. По лемме 4.1 при $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda^d)$ существует решение $w_\lambda \in S$ задачи (2.7), (2.8). Рассмотрим $w_\lambda = t_\lambda v_\lambda$ такое, что $v_\lambda = w_\lambda / \|w_\lambda\|_W$, $t_\lambda = \|w_\lambda\|_W$. Тогда $\{v_\lambda \in S : \|v_\lambda\|_W = 1\}$ – ограниченное подмножество в рефлексивном пространстве W. Отсюда следует существование подпоследовательности $v_j := v_{\lambda_j}$ и функции $v^* \in W^+$ таких, что v_j сходится к v^* при $\lambda_j \to \Lambda^d$ слабо в W и сильно в $L_q = L_q(\Omega)$ при $2 \leq q < 2^*$. Без ограничения общности можно считать, что также $t_j = t_{\lambda_j} \to \hat{t}$ при $j \to \infty$, где $0 \leq \hat{t} \leq +\infty$.

Покажем, что $v^* \neq 0$. Для этого рассмотрим следующие два возможных случая.

1) Пусть $F(v_j) \geq 0$ при всех достаточно больших j. Тогда v_j принадлежит множеству допустимых функций в задаче на минимум минимаксной задачи (3.4). Поэтому

$$\int\limits_\Omega |\nabla v_j|^2\,dx \Big/ \int\limits_\Omega |v_j|^2\,dx = \lambda_j \to \Lambda^d \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{4.2}$$

Однако, если предположить, что $v^* = 0$, то знаменатель дроби в равенстве (4.2) стремится к нулю при $j \to \infty$, в то время как по построению числитель этой дроби при всех j равен единице: $\int_\Omega |\nabla v_j|^2\,dx = \|v_j\|_W = 1$. Получили противоречие.

2) Пусть $F(v_j) < 0$ при всех достаточно больших j. Тогда в силу (2.7), (2.8) имеем

$$\|v_j\|_W^2 - \lambda_j \int\limits_\Omega |v_j|^2\,dx = t_j^{\gamma-2} \int\limits_\Omega f(x)|v_j|^\gamma\,dx. \tag{4.3}$$

Если $v^* = 0$ и, таким образом, $v_j \to 0$, то $\int_\Omega |v_j|^2\,dx \to 0$ при $j \to \infty$. Отсюда, поскольку $\|v_j\|_W = 1$, следует, что левая часть равенства (4.3) при достаточно больших j является положительной, близкой к единице. Но по предположению правая часть этого равенства при всех $j = 1, 2, \ldots$ отрицательна. Получили снова противоречие. Значит, $v^* \neq 0$.

Покажем теперь, что $0 < \hat{t} < \infty$. Для этого отметим сначала, что в силу (2.7), (2.8) имеем следующее слабое равенство в W:

$$-\Delta v_j - \lambda_j v_j = t_j^{\gamma-2} f(x)|v_j|^{\gamma-2} v_j. \tag{4.4}$$

Отсюда, если предположить, что $t_j \to \infty$, вытекает, что $F'(v^*)(\psi) = 0$ при всех $\psi \in C_0^\infty$. Такое возможно лишь в том случае, если $\operatorname{supp}(v^*) \subset \Omega^0$. Тогда из равенства (4.4) следует, что в $W_2^1(\operatorname{supp}(v^*))$ выполняется слабое равенство $-\Delta v^* = \Lambda^d v^*$, где $v^* \geq 0$. Теперь несложно показать, что функция v^* является первым собственным значением оператора $-\Delta$ на $\operatorname{supp}(v^*)$ с граничными значениями Дирихле. Таким образом, $\Lambda^d = \lambda_1(\operatorname{supp}(v^*))$. Однако по предложению 3.1 имеем $\Lambda^d \leq \lambda_1(\Omega^{0,+})$. С другой стороны, так как $\Omega^+ \neq \emptyset$, то $\operatorname{supp}(v^*) \subseteq \Omega^0$ является собственным подмножеством $\Omega^{0,+}$ и поэтому $\lambda_1(\Omega^{0,+}) < \lambda_1(\operatorname{supp}(v^*))$. Получили противоречие. Следовательно, $\hat{t}$ ограничено сверху. Аналогично доказывается, что $\hat{t} > 0$.

Таким образом, мы доказали, что $w^* = \hat{t}v^* \in W \setminus \{0\}$. Отсюда предельным переходом выводится, что w^* является слабым решением задачи (2.7), (2.8) и при этом $w^* \geq 0$. Используя метод развертывания (bootstrap argument) (см. [9]) показываем, что $w^* \in L^\infty(\Omega)$. Отсюда, применяя стандартные результаты [9, 10] о регулярности решений эллиптических уравнений, выводим, что $w^* \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ при некотором $\alpha \in (0, 1)$. Далее по принципу максимума [10, 12] доказываем, что $w^*(x) > C(w^*)\mathrm{d}_\Omega(x)$ при $x \in \Omega$ для некоторого $C(w^*) \in (0, \infty)$. Таким образом, $w^* \in S$. Предельным переходом убеждаемся также в том, что $\Lambda^d = \tilde{L}(w^*, \phi)$ для каждого $\phi \in \Phi$, такого, для которого $F(\phi) \geq 0$. Лемма 4.2 доказана.

Докажем утверждение II теоремы 2.1. Пусть $\Lambda^u < +\infty$ и $\lambda > \Lambda^u$. Тогда в силу (2.10) найдется такое $\phi_0 \in \Phi$, что

$$F(\phi_0) > 0 \quad \text{и} \quad H'_\lambda(u)(\phi_0^\gamma/u^{\gamma-1}) < 0 \quad \text{при всех} \quad u \in S. \tag{4.5}$$

Рассмотрим функционал $V(u) := \int_\Omega (\phi_0^\gamma/u^{\gamma-2})\, dx, \ \ u \in S$.

Пусть $u(t)$ – слабое S-решение параболической задачи (1.1), (1.2) при $t \in [0,T)$, где $0 < T \le +\infty$. Поскольку $u(t)$ – слабо дифференцируемая функция при $t \in (0,T)$, то в силу (2.5), (2.6) и включения $u(t) \in S$ при почти всех $t \in (0,T)$ имеем

$$\frac{d}{dt}V(u(t)) = -(\gamma-2)\left(u_t, \frac{\phi_0^\gamma}{u^{\gamma-1}}\right) =$$

$$= -(\gamma-2)\left[-\int\limits_\Omega \left(\nabla u, \nabla\frac{\phi_0^\gamma}{u^{\gamma-1}}\right) dx + \lambda \int\limits_\Omega u\left(\frac{\phi_0^\gamma}{u^{\gamma-1}}\right) dx + \int\limits_\Omega f(x)|u|^{\gamma-2}u\frac{\phi_0^\gamma}{u^{\gamma-1}}\, dx\right].$$

Отсюда и из (4.5) вытекает неравенство $dV(u(t))/dt < -(\gamma-2)F(\phi_0)$ при п.в. $t \in (0,T)$. Поскольку правая часть не зависит от t и $F(\phi_0) > 0$, то функция $V(u(t))$ должна за конечное время $T < \infty$ обращаться в нуль. Следовательно, решение $u(t)$ взрывается за конечное время, т.е. $\|u(t)\|_{L_\infty} \to \infty$ при $t \to T$. Теорема 2.1 доказана.

При доказательстве утверждения I1) теоремы 2.1 мы доказали только существование стационарных глобальных решений задачи (1.1). Используя лемму 4.2, можем усилить это утверждение и доказать существование также и нестационарных глобальных решений задачи (1.1), (1.2).

Лемма 4.3. *Пусть $\lambda_1 < \Lambda^d < +\infty$ и w^* – стационарное решение задачи (1.1), (1.2) при $\lambda = \Lambda^d$ и пусть $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda^d]$ и начальное условие $u_0 \in S$ удовлетворяет неравенству $u_0 \le w^*$, $x \in \Omega$. Тогда существует глобальное положительное решение $u_\lambda(t,x)$ задачи (1.1), (1.2) такое, что $0 < u_\lambda(t,x) \le w^*$ при всех $t \in [0,+\infty)$ и $x \in \Omega$.*

Доказательство. Легко видеть, что стационарное решение w^* при $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda^d]$ является суперрешением задачи (1.1), (1.2). С другой стороны, поскольку $u_0 \in S$, то $u_0(x) > C(u_0)\mathrm{d}_\Omega(x)$ при $x \in \Omega$ и, следовательно, $u_0(x) > s\phi_1(x)$, $x \in \Omega$, при всех достаточно малых $s > 0$. Замечая теперь, что при достаточно малом $s > 0$ функция $s\phi_1$ является субрешением задачи (1.1), (1.2), устанавливаем по методу супер-субрешений [15] существование решения $u_\lambda(t,x)$ такого, что при некотором $s_0 > 0$ выполняется $s\phi_1 \le u_\lambda(t,x) \le w^*$ при всех $t \in [0,+\infty)$ и $x \in \Omega$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.2.

I. Пусть $\Omega^+ \cup \Omega^0 = \emptyset$. Тогда, во-первых, по определению $\Lambda^d = \Lambda^u = +\infty$. Во-вторых, стационарная задача (2.7), (2.8) будет знакоопределенной и коэрцитивной. В этом случае, хорошо известно (см., например, [6]), что при всех $\lambda_1 < \lambda < +\infty$ существует положительное решение $w_\lambda(x) \in S$ задачи (2.7), (2.8) и, следовательно, стационарное глобальное решение задачи (1.1). Более того, используя рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве леммы 4.3, можно доказать существование также и нестационарных глобальных решений задачи (1.1), (1.2) при данных значениях $\lambda_1 < \lambda < +\infty$.

II. Предположим, что $F(\phi_1) \ge 0$. Тогда, согласно леммам 3.2 и 3.3, имеем $\lambda_1 = \Lambda^d = \Lambda^u$. Отсюда по теореме 2.1, п. II получаем, что при $\lambda > \lambda_1$ не существует глобальных положительных решений задачи (1.1).

В случае $\gamma < 2^*$ доказательство существования глобального положительного решения задачи (1.1) при всех $\lambda < \lambda_1$ вытекает из известного факта [6], что в случае докритических показателей $\gamma < 2^*$ при $\lambda < \lambda_1$ существует положительное решение задачи (2.7), (2.8).

III. Предположим, что $F(\phi_1) < 0$ и при этом $\Omega^+ \ne \emptyset$. Тогда, согласно лемме 3.2, имеем $\lambda_1 < \Lambda^d$, и, следовательно, по теореме 2.1, п. I при всех $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda^d)$ существует глобальное положительное решение задачи (1.1). По предложению 3.1 имеем $\Lambda^u < +\infty$. Отсюда при $\lambda \in (\Lambda^u, +\infty)$ по теореме 2.1, п. II получаем доказательство несуществования глобальных положительных решений задачи (1.1). Теорема доказана.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00069) и ИНТАС (проект 03-51-5007).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alama S., Tarantello G.* // Funct. Anal. 1996. V. 141. № 1. P. 159–215.
2. *Митидиери Э., Похожаев С.И.* // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 2001. Т. 324.
3. *Galaktionov V.A., Vazquez J.L.* The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations. Bath, 2000 (Preprint / Univ. Bath: Math. 00/04).
4. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режим с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М., 1987.
5. *Berestycki H., Capuzzo-Dolcetta I., Nirenberg L.* // DEA. 1995. V. 2. № 4. P. 553–572.
6. *Ильясов Я.Ш.* // Изв. РАН. Сер. мат. 2002. Т. 66. № 6. С. 19–48.
7. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
8. *Il'yasov Y.* // C.R. Acad. Sci. Sér. 1. 2001. V. 333. P. 533–538.
9. *Gilbarg D., Trudinger N.S.* Elliptic partial differential equations of second order. Berlin, 1983.
10. *Tolksdorf P.* // J. Differ. Equat. 1984. V. 51. № 1. P. 126–150.
11. *Escobedo M., Herrero M.A.* // Annali di Mathematica Pura ed Applicata. 1993. V. 165. P. 315–336.
12. *Trudinger N.S.* // Comm. Pure Appl. Math. 1967. V. 20. P. 721–747.
13. *Proter M., Weinberger H.* Maximum principels in differential equations. New York, 1967.
14. *Payne L.E., Sattinger D.H.* // Israel J. Math. 1975. V. 22. № 3–4. P. 273–303.
15. *Sattinger D.H.* // Indiana Univ. Math. J. 1972. V. 21. № 11. P. 979–1000.
16. *Fujita H.* // Proc. Internat. Conf. on Functional Anal. and Related Topics (Tokyo, 1970). Tokyo, 1970. P. 252–259.

Башкирский государственный университет,
г. Уфа

Поступила в редакцию
21.06.2004 г.