A. Ye. Mikhailov, On oscillation function for Gaussian random processes, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1992, Volume 194, 119–123

А.Е.Михайлов

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИИ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ. П

В предыдущей статье (см. [I]) для гауссовских процессов со значениями в сепарабельном банаховом пространстве X удовлетворяющих условию $(*)$ автором было введено понятие осцилляции гауссовского процесса $\mathscr{C}$ в точке $c \in \mathscr{C} - \Delta_c^{\mathscr{C}}(\omega)$ и доказано, что существует звездное относительно нуля симметричное компактное множество $K_c^{\mathscr{C}} \subset X$: $\Delta_c^{\mathscr{C}}(\omega) = K_c^{\mathscr{C}}$ п.н.

В данной статье приведены достаточные условия для выполнения $(*)$, а также некоторые примеры.

0. Обозначения и определения.

В данной статье сохраняются обозначения, принятые в [I]. Все гауссовские случайные элементы и случайные величины предполагаются центрированными.

Для любого $c \in \mathscr{C}$ и любого $x^* \in X^*$ обозначим:
$\sigma_c^2(x^*) \stackrel{df}{=} E(x^*, c)^2$;

$$\tilde{\sigma}_c \stackrel{df}{=} \sup_{x^* \in X^* \| x^* \| = 1} \sigma_c(x^*) .$$

Будем говорить, что гауссовский процесс удовлетворяет условию (A); если существует счетное множество $S \subseteq \mathscr{C}$ и существуют множества $\Omega_0 \subseteq \Omega$, $P\Omega_0 = 1$ такие, что для любого $c \in \mathscr{C}$ существует последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S : c_n(\omega) \xrightarrow[n \to \infty]{} c(\omega)$ для любого $\omega \in \Omega_0$.

Будем говорить, что $\mathscr{C}$ удовлетворяет условию (B); если существует метрика d на $\mathscr{C}$ и гауссовский случайный элемент e со значениями в X такие, что $(\mathscr{C}, d)$ изометрично некоторому подмножеству сепарабельного гильбертова пространства, и, если $\zeta(c)$, $c \in \mathscr{C}$ семейство гауссовских случайных величин таких, что $d(c_n, c_2) = (E(\zeta(c_1) - \zeta(c_2))^2)^{1/2}$, то $\sup_{c \in \mathscr{C}} \zeta(c) < \infty$ п.н.; и $\forall c_1, c_2 \in \mathscr{C}, \forall x^* \in X^*$

$$\sigma_{\frac{c_1 - c_2}{d(c_1, c_2)}}(x^*) \leq \sigma_e(x^*) ; \quad \sigma_{c_1}(x^*) \leq \sigma_e(x^*)$$

I. Пусть $N(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (x_n^*, x)$ (где $x_n^* \in X^*$) – некоторая полунорма на X. Имеет место следующая

ЛЕММА. Пусть $\mathscr{C}$ удовлетворяет условиям (A), (B). Тогда

$$E \sup_{c \in \mathscr{C}} N(c) \leq \sqrt{2} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \sigma_e(x_n^*) E \sup_{c \in \mathscr{C}} \zeta(c) + EN(e) \right) .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим на множестве $\mathscr{C} \times \mathbb{N}$ гауссовский процесс $\eta(c,n)$

$$\eta(c,n) = \zeta(c)\cdot \sup_{n\in\mathbb{N}} \sigma_e(x_n^*) + (x_n^*, e)$$

(где e не зависит от $\{\zeta(c) \mid c\in\mathscr{C}\}$).

Тогда $\|(x_n^*,c_1)-(x_m^*,c_2)\|_{L^2(\Omega,P)} \le \|(x_n^*,c_1)-(x_n^*,c_2)\|_{L^2(\Omega,P)} +$

$$+\|(x_n^*-x_m^*,c_2)\|_{L^2(\Omega,P)} \le d(c_1,c_2)\,\sigma_e(x_n^*) + \sigma_e(x_n^*-x_m^*) \le$$

$$\le \sqrt{2}\sqrt{d^2(c_1,c_2)\sup_{n\in\mathbb{N}}\sigma_e^2(x_n^*) + \sigma_e^2(x_n^*-x_m^*)} = \sqrt{2}\,\|\eta(c_1,n)-\eta(c_2,m)\|_{L^2(\Omega,P)} .$$

Следовательно (см. [2], [4]) имеем:

$$E\sup_{c\in\mathscr{C}} N(c) \le \sqrt{2}\, E\sup_{c\in\mathscr{C},\, n\in\mathbb{N}} \eta(c,n) = \sqrt{2}\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}}\sigma_e(x^*)\, E\sup_{c\in\mathscr{C}}\zeta(c) + EN(e)\Big) \quad ■$$

СЛЕДСТВИЕ. Если $\mathscr{C}$ удовлетворяет условиям (A), (B), то

$$E\sup_{c\in\mathscr{C}} N(c) \le \sqrt{2}\Big(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\, E\sup_{c\in\mathscr{C}}\zeta(c) + 1\Big) EN(e) .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение легко получить из леммы, так, как

$$\sigma_e(x_n^*) = \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\, E\left|(x_n^*,e)\right| \le \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\, EN(e) .$$

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathscr{C}$ удовлетворяет условиям (A), (B). Тогда $\mathscr{C}$ удовлетворяет (*) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам нужно доказать, что $\{c(\omega) \mid c\in\mathscr{C}\}$ относительно компактно в X для п.в. ω. Рассмотрим в X последовательность конечномерных подпространств $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$: $F_n \subset F_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = X$.

Для относительной компактности множества $B\subset X$ достаточно выполнения следующих условий: $\sup_{x\in B}\|x\| < \infty$ и $\sup_{x\in B} N_{F_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

где $N_{F_n}(x) = \inf_{y\in F_n} \|x-y\|$.

Из следствия получаем: $E\sup_{c\in\mathscr{C}}\|c\| \le \sqrt{2}\Big(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\, E\sup_{c\in\mathscr{C}}\zeta(c)+1\Big) E\|e\| < +\infty$

$$E\sup_{c\in\mathscr{C}} N_{F_n}(c) \le \sqrt{2}\Big(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\, E\sup_{c\in\mathscr{C}}\zeta(c)+1\Big) EN_{F_n}(e) .$$

Так как $\forall x\in X,\ N_{F_n}(x)\downarrow 0,\ n\to\infty$, имеем $E\sup\limits_{c\in\mathscr{C}} N_{F_n}(c)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Следовательно для п.в. ω $\sup\limits_{c\in\mathscr{C}}\|c(\omega)\|<\infty$ и $\sup\limits_{c\in\mathscr{C}} N_{F_n}(c(\omega))\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Таким образом для п.в. ω множество $\{c(\omega)\mid c\in\mathscr{C}\}$ относительно компактно в X. ∎

СЛЕДСТВИЕ. Если гауссовский процесс $\mathscr{C}$ удовлетворяет условию (B), то он имеет модификацию, удовлетворяющую условию (*).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим процесс $\zeta(c),\ c\in\mathscr{C}$ из условия (B).

Так как $\sup\limits_{c\in\mathscr{C}}\zeta(c)<\infty$ п.н. существует сепарабельная метрика ρ на $\mathscr{C}$ и $\bar\zeta(c)$ – модификация процесса $\zeta(c)$, непрерывная в метрике ρ ($\bar\zeta(c)$ называется естественной модификацией процесса $\zeta(c)$, см. [3]). Тогда легко видеть, что $\forall x^*\in X^*$ гауссовский процесс $\xi_{x^*}(c)=(x^*,c)$ также будет иметь модификацию, непрерывную в метрике ρ. Пусть $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность, разделяющая точки пространства X. $\bar\xi_{x_n^*}(c)$ – модификация $\xi_{x_n^*}(c)$, непрерывная в метрике ρ. S – счетное всюду плотное в метрике ρ множество.

Из теоремы следует, что существует множество $\Omega_0\subseteq\Omega$, $P\Omega_0=1$ и $\forall\omega\in\Omega_0$, выполнено: I) $\{c(\omega)\mid c\in S\}$ – относительно компактно в X и 2) $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall s\in S$ $\bar\xi_{x^*}(\omega)=$ $=(x_n^*,c(\omega))$.

Построим теперь модификацию процесса $\mathscr{C}$, удовлетворяющую условию (*). Для любого $c\in\mathscr{C}$ существует последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq S,\ \ \rho(c_n,c)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тогда из (I) и 2) следует, что $\forall\omega\in\Omega_0$ последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел. Обозначим $\bar c(\omega)=\lim\limits_{n\to\infty} c_n(\omega)$. Следовательно $\tilde{\mathscr{C}}=\{\bar c\mid c\in\mathscr{C}\}$ будет модификацией процесса $\mathscr{C}$, удовлетворяющей (*). ∎

2. Пусть множество $T\subset\ell_2,\ T\in GB,\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность н.о.р. гауссовских случайных элементов со значениями в X.

Рассмотрим гауссовские процессы $\mathscr{C}_T=\{c(h)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}h_n a_n\mid h=$ $=\{h_n\}_{n=1}^{\infty}\in T\}$, $\xi(h)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}h_n\zeta_n$,

где $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортогауссовская последовательность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. $\mathscr{C}_T$ удовлетворяет условию (B) и $K_{c(h)}^{\mathscr{C}_T}=$ $=\frac{1}{2}\alpha(h)B_{H(\gamma)}$, где $\alpha(h)$ осцилляция по Ито-Нисио процесса $\xi(h)$ в точке h, γ распределение случайного элемента a_1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Рассмотрим гауссовский процесс $\mathscr{E}=\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\cup\{0\}$ такой, что существует гауссовский случайный элемент e и существует функция $\beta(n)$, $\beta(n)\underset{n\to\infty}{\to}0$: $\forall x^*\in X^*$ $\frac{\sigma_{e_n}}{\tilde\sigma_{e_n}}(x^*)\le\sigma_e(x^*)$,

$$E(E[(x^*,e_n)|\Sigma_m])^2\le\beta^2(n-m)\,\sigma_{e_n}^2(x^*),$$

где Σ_m, σ -алгебра, порожденная $e_1,\dots,e_m$.
Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность независимых случайных элементов таких, что f_n и e_n одинаково распределены.

Тогда имеет место:

1) $\mathscr{E}$ удовлетворяет $(*)$ тогда и только тогда, когда $\tilde\sigma_{e_n}=O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)$

2) $K_0^{\mathscr{E}}=K_0^{\tilde{\mathscr{E}}}$, $\tilde{\mathscr{E}}=\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\cup\{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем

1) Если $\tilde\sigma_{e_n}=O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)$, то для $\mathscr{E}$ будет выполнено (B) с метрикой $d(e_n,e_m)=\sqrt{\tilde\sigma_{e_n}^2+\tilde\sigma_m^2}$. Обратно, пусть $\mathscr{E}_{i,N}=\{e_{i+kN}\}_{k=0}^{\infty}\cup\{0\}$, выберем N так, чтобы $\forall j\in\mathbb{N}$, $\beta(jN)\le\frac{1}{2}$ и выберем последовательность $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$, $\|x_n^*\|=1$, $\sigma_{e_n}(x_n^*)\ge\frac{\tilde\sigma_{e_n}}{2}$

получаем $\|(x^*_{i+kN},e_{i+kN})-(x^*_{i+\ell N},e_{i+\ell N})\|^2_{L^2(\Omega,P)}\ge\sigma^2_{e_{i+\ell N}}(x^*_{i+\ell N})+$
$+\sigma^2_{e_{i+kN}}(x^*_{i+kN})-2\beta((\ell-k)N)\sigma_{e_{i+kN}}(x^*_{i+kN})\sigma_{e_{i+\ell N}}(x^*_{i+\ell N})\ge\frac{1}{4}(\tilde\sigma^2_{e_{i+kN}}+\tilde\sigma^2_{e_{i+\ell N}})$.

Из $(*)$ следует $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(x_n^*,e_n)<\infty$ п.н. и таким образом гауссовская последовательность $\{\sigma_{i+kN}\zeta_{i+kN}\}_{K=1}^{\infty}$, где ζ_n – ортогауссовские, будет ограниченной п.н. и значит $\tilde\sigma_{i+kN}=O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln k}}\right)$ и поэтому $\tilde\sigma_n=O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)$.

2) Можно построить на одном вероятностном пространстве последовательности $\{f_{i,k,N}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{e'_{i,kN}\}_{k=1}^{\infty}$: $f_{i,k,N}$ независимые случайные элементы, $\{e'_{i,k,N}\}_{k=1}^{\infty}$ распределена также, как $\{e_{i+kN}\}_{k=1}^{\infty}$, $f_{i,k,N}$ и $e'_{i,k,N}$ имеют одинаковое распределение и $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\|f_{i,k,N}-e'_{i,k,N}\|\le2\lambda\beta(N)$, $\lambda=$
$=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\tilde\sigma_{e_n}\sqrt{2\ln n}$.

Тогда расстояние по Хаусдорфу между $K_0^{\mathscr{C}}$ и $K_0^{\tilde{\mathscr{C}}}$ не превосходит $2\lambda\beta(N)$. Так как $\beta(N)\xrightarrow[N\to\infty]{}0$ получаем $K_0^{\mathscr{C}}=K_0^{\tilde{\mathscr{C}}}$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ стационарная регулярная гауссовская последовательность: $a_n\downarrow 0$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – медленно меняющаяся числоая последовательность. Рассмотрим гауссовский процесс со значениями в $\mathbb{R}^m-\mathscr{C}=\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\cup\{0\}$, $e_n=(a_n\xi_n,\ldots,a_{n+m-1}\xi_{n+m-1})$. Тогда $K_0^{\mathscr{C}}=\delta B_{H(\gamma)}$ (γ – распределение гауссовского вектора $(\xi_1,\ldots,\xi_m)$, $\delta=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n\xi_n$ п.н.).

Литература

1. Михайлов А.Е. Об осцилляции гауссовских процесоов. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1989, 177, с.92-97.
2. Судаков В.Н. Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений. – Тр.Мат.Ин-та АН СССР, 1976, т.141.
3. Цирельсон Б.С. Естественная модификация случайного процесса её приложения к случайным функциональным рядам и гауссовским мерам. – Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1976, 55, с.35-63.
4. Fernique X. Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. - Lect.Notes Math., 1975, v.480, p.1-96.
5. Ito K., Nisio M. On the oscillation functions of Gaussian processes. - Math.Scand., 1968, v.22, N 1, p.209-223.