B. È. Kunyavskii, M. A. Tsfasman, On the Néron–Severi torus of a rational surface, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1982, Volume 37, Issue 4, 163–164

ТОР НЕРОНА — СЕВЕРИ РАЦИОНАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Б. Э. Кунявский, М. А. Цфасман

Пусть X — полная геометрически неприводимая рациональная поверхность над полем алгебраических чисел k. Согласно [1], X бирационально эквивалентна над k поверхности дель-Пеццо или расслоению на коники; $d = (K_X^2)$ называется степенью поверхности; для расслоения на коники $d \leqslant 8$, для поверхности дель-Пеццо $1 \leqslant d \leqslant 9$ [1], [2]. Группа Галуа $\bar{k}/k$ действует на $\mathrm{Pic}\,(X \otimes \bar{k})$ — модуле без кручения ранга $10 - d$. Тором Нерона — Севери назовем алгебраический k-тор S с модулем характеров $\hat{S} = \mathrm{Pic}\,(X \otimes \bar{k})$. Положим

$$Ш(S) = \mathrm{Ker}\,(H^1(k,\ S) \to \otimes\, H^1(k_v,\ S)).$$

Пусть L/k — минимальное нормальное расширение, над которым определены все исключительные кривые поверхности дель-Пеццо (все компоненты вырожденных слоев расслоения на коники соответственно). Назовем L полем разложения поверхности X. Группа $G = \mathrm{Gal}\,(L/k)$ является подгруппой в группе Вейля $W(R_{9-d})$, где R_{9-d} — система корней из списка $E_8,\ E_7,\ E_6,\ D_5,\ A_4,\ A_2 \times A_1$ в случае поверхности дель-Пеццо [2] и $G \subseteq W(D_r)$ в случае расслоения на коники ($r = 8 - d$ — число вырожденных слоев, каждый из которых есть пара рациональных кривых, трансверсально пересекающихся в одной точке).

Изучение тора S представляет интерес, в частности, ввиду наличия гомоморфизма Φ: $A_0(X) \to H^1(k,\ S)$, являющегося вложением, если X — расслоение на коники; через $A_0(X)$ обозначается группа классов нуль-циклов степени нуль, рассматриваемых с точностью до рациональной эквивалентности [3], [4].

Нас интересуют бирациональные и арифметические инварианты тора S и поверхности X (см. также [4], [5], [6]).

Предложение 1. *Тор Нерона — Севери S рациональной поверхности степени $d \geqslant 5$ рационален; для любого $d \leqslant 4$ существуют рациональные поверхности степени d с нерациональными торами Нерона — Севери.*

Рассмотрим более подробно поверхности дель-Пеццо степени 4, имеющие k-точки. Заметим, что $W(D_5) = (\mathbb{Z}/2)^4 \cdot S_5 \subset (\mathbb{Z}/2)^5 \cdot S_5$. Если обозначить i-ю образующую $(\mathbb{Z}/2)^5$ через c_i, то элементы $W(D_5)$ выделяются тем, что разложение элемента содержит четное число c_i; при этом элемент $c_i c_j$ интерпретируется как одновременная перестановка компонент i-го и j-го вырожденных слоев.

В случае, если на X имеется пучок коник, что соответствует типам II — IX и XII — XV в классификации Манина [2], то мы рассматриваем X как расслоение на коники степени 4. Если пучка коник не имеется, то, раздувая k-точку общего положения и проектируя получившуюся кубическую поверхность из вклеенной прямой, получаем расслоение на коники Y степени 3. Если поверхность X не является относительно минимальной, или поверхность Y имеет индекс (число прямых, одновременно стягиваемых над основным полем) два и более, то тор S стабильно рационален (рационален в случае бикквадратичного поля разложения). Далее мы рассматриваем только относительно минимальные модели пучка коник, считая, что их степень $d \leqslant 4$. Соответствующие группы разложения мы называем минимальными.

Поскольку для торов с циклическим полем разложения $Ш(S) = 0$, первым нетривиальным случаем является $G \simeq (\mathbb{Z}/2)^2$; бирациональная классификация таких торов имеется [7]. Опишем торы с бикквадратичным полем разложения, которые могут возникать из поверхностей дель-Пеццо степени 4. Если поле разложения фиксировано, то тор Нерона — Севери однозначно, с точностью до изоморфизма, определяется действием группы Галуа на прямых, т. е. подгруппой $G \subseteq W(D_5)$, с точностью до сопряженности.

Теорема 1. *В группе $W(D_5)$ существует семь классов сопряженности минимальных подгрупп вида $(\mathbb{Z}/2)^2$:* 1. $\langle c_1c_2,\ c_3c_4\rangle$; 2. $\langle c_1c_2,\ c_2c_3c_4c_5\rangle$; 3. $\langle c_1c_2c_3c_4,\ (12)(34)\rangle$; 4. $\langle c_1c_2c_3c_4,\ (12)\rangle$; 5. $\langle c_1c_2c_3c_5,\ (12)c_3c_5\rangle$; 6. $\langle c_1c_2,\ (12)c_3c_4\rangle$; 7. $\langle (12)(34),\ (12)c_1c_2c_3c_4\rangle$.

Рациональность тора Нерона — Севери определяется классом сопряженности подгруппы $G \subseteq W(D_5)$ и не зависит от поля разложения.

Теорема 2. *Классам* 1—5 *соответствуют рациональные торы, классам* 6 *и* 7 — *нерациональные.*

Замечание. В обозначениях [2] им соответствуют типы IX, X, VI, VII, XI, IX, VIII разбиения множества исключительных кривых на орбиты. В частности, типу IX могут соответствовать как рациональные, так и нерациональные торы.

Все возможности, перечисленные в теореме 1, реализуются.

Теорема 3. *Пусть* $L = k(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ — *биквадратичное расширение поля* k. *Тогда для любого типа из теоремы* 1 *существует рациональная поверхность* X *над* k *с полем разложения* L *и тором данного типа.*

Приведем пример такой реализации: 1. $y^2 - xz^2 = b(x-a)(x-b)$; 2. $y^2 - xz^2 = -b(x-a)(x-c^2a)(x-d^2a)$; 3. $y^2 - bz^2 = (x^2-a)(x^2-ac^2)$; 4. $y^2 - bz^2 = (x^2-a)\times(x-c)(x-d)$; 5. $y^2 - b(2x+a+1)z^2 = -a(x^2-a)(2x+a)$; 6. $y^2 - b(2x+a+1)z^2 = a(x^2-a)$; 7. $y^2 - abz^2 = (x^2-a)(x^2-b)$.

Для расслоений на коники $ШA_0(X) \subseteq Ш(S)$, где $ШA_0(X) = \mathrm{Ker}\,(A_0(X) \to \bigoplus A_0(X_v))$. Гипотетически [4] $ШA_0(X) = Ш(S)$. Для поверхностей типа 7 имеет место следующий факт.

Предложение 2. *Пусть поверхность* X *над полем* k *задана аффинным уравнением* $y^2 - abz^2 = (x^2-a)(x^2-b)$, *где* a *и* b *таковы, что* $[k(\sqrt{a}, \sqrt{b}): k] = 4$. *Тогда либо* $ШA_0(X) = Ш(S) = 0$, *либо* $A_0(X) = ШA_0(X) \subseteq Ш(S) = \mathbb{Z}/2$.

Второй случай имеет место тогда и только тогда, когда группы разложения всех нормирований поля k в расширении $k(\sqrt{a}, \sqrt{b})/k$ — циклические.

Используя идеи [5], можно привести следующий пример.

Предложение 3. *Пусть* X — *поверхность над* $\mathbb{Q}$ *с уравнением* $y^2 - 221z^2 = (x^2-13)(x^2-17)$. *Тогда* $A_0(X) = ШA_0(X) = Ш(S) = \mathbb{Z}/2$.

Теорема 2 и оба замечания доказаны Б. Э. Кунявским; предложения 1, 2, 3 и теоремы 1 и 3 — М. А. Цфасманом.

Авторы искренне благодарны В. Е. Воскресенскому, Ю. И. Манину, С. Г. Влэдуцу, Ж.-Л. Кольё-Телену и Ж.-Ж. Сансюку.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Исковских. Минимальные модели рациональных поверхностей над произвольными полями.— Изв. АН, сер. матем., 1979, 43:1, с. 19—43.

[2] Ю. И. Манин. Кубические формы.— М.: Наука, 1972.

[3] S. Bloch. On the Chow groups of certain rational surfaces.— Ann. Sci. Ec. Norm. Supér., 1981, 14:1, p. 41—59.

[4] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc.On the Chow groups of certain rational surfaces: a sequel to a paper of S. Bloch.— Duke Math. J., 1981, 48:2, 421—447.

[5] J.-J. Sansuc. Post Duke: quelques calculs autour de $Ш(A_0(X))$; avec l'appendice par J.-L. Colliot-Thélène.— Preprint, Éc. Norm. Supér., 1981, 22/11.

[6] М. А. Цфасман. Арифметика расслоений на коники.— УМН, 1982, 37:2, с. 239—240.

[7] Б. Э. Кунявский. О торах с биквадратичным полем разложения.— Изв. АН, сер. матем., 1979, 42:3, с. 580—587.

Московский государственный университет

Поступило в Правление общества 25 февраля 1982 г.