V. N. Pavlenko, D. K. Potapov, One class of quasilinear elliptic type equations with discontinuous nonlinearities, *Izv. RAN. Ser. Mat.*, 2022, Volume 86, Issue 6, 143–160

DOI: 10.4213/im9175

УДК 517.956.25

В. Н. Павленко, Д. К. Потапов

Об одном классе квазилинейных уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ исследуется класс квазилинейных граничных задач эллиптического типа с параметром и разрывной нелинейностью. Рассматриваемый класс задач включает задачу Х. Дж. Купера о нагреве проводника в однородном электрическом поле. Топологическим методом устанавливается существование континуума обобщенных положительных решений из соболевского пространства $W_p^2(\Omega)$ $(p > n)$, соединяющего $(0,0)$ с ∞, в пространстве $\mathbb{R} \times C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0,(p-n)/p)$. Приводится достаточное условие полуправильности обобщенных решений изучаемой задачи. По сравнению с работами Х. Дж. Купера и К.-Ч. Чанга ослаблены ограничения на разрывную нелинейность.

Библиография: 26 наименований.

Ключевые слова: квазилинейное уравнение эллиптического типа, параметр, разрывная нелинейность, континуум положительных решений, полуправильное решение, топологический метод.

DOI: https://doi.org/10.4213/im9175

§ 1. Введение, постановка задачи и формулировка основных результатов

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ класса $C^{1,1}$ (см. [1]) рассматривается краевая задача с однородным граничным условием Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с неотрицательным параметром λ и разрывной нелинейностью $g(x,u)$ следующего вида:

$$Lu(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u(x))u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,u(x),\nabla u(x))u_{x_i} + a(x,u(x))u = \lambda g(x,u(x)), \qquad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$u(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega. \tag{1.2}$$

Предполагается, что для коэффициентов дифференциального оператора L выполнены следующие условия:

(i1) $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$ на $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, и существует невозрастающая положительная на $\mathbb{R}_+$ функция $\chi(t)$ такая, что для любых $(x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ справедливо

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Челябинской области в рамках научного проекта № 20-41-740003.

неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant \chi(|t|)\cdot|\xi|^2 \quad \forall\,\xi \in \mathbb{R}^n;$$

(i2) функции $a_{ij}(x,t)$ и $a(x,t)$ непрерывно дифференцируемые на $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$, а $b_i(x,t,\eta)$ непрерывно дифференцируемые на $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, причем $a(x,t)\geqslant 0$ на $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$.

Нелинейность $g(x,t)$ удовлетворяет условиям:

(g1) $g(x,t)$ борелева $(\mathrm{mod}\,0)$ на $\Omega\times\mathbb{R}$ [2], т. е. она отлична от некоторой борелевой на $\Omega\times\mathbb{R}$ функции лишь на множестве $\omega\subset\Omega\times\mathbb{R}$, проекция которого на Ω имеет меру нуль;

(g2) существуют неубывающая на $\mathbb{R}_+$ положительная функция $\psi(t)$ и функция $d(x)$ из пространства $L_p(\Omega)$ $(p>n)$ такие, что для почти всех $x\in\Omega$ верно

$$|g(x,t)| \leqslant d(x) + \psi(|t|) \quad \forall\, t\in\mathbb{R};$$

(g3) для некоторой положительной на Ω функции $\beta(x)$ справедливо неравенство $g(x,t)\geqslant\beta(x)$ на $\Omega\times\mathbb{R}$.

Заметим, что из условия (g1) следует суперпозиционная измеримость $g(x,t)$ на $\Omega\times\mathbb{R}$ [2], т. е. для любой измеримой на Ω функции $u(x)$ композиция $g(x,u(x))$ измерима на Ω. Если суперпозиционно измеримая на $\Omega\times\mathbb{R}$ функция $g(x,u)$ монотонная по u на $\mathbb{R}$, то она борелева $(\mathrm{mod}\,0)$ [2]. Каратеодориева на $\Omega\times\mathbb{R}$ функция $g(x,u)$ (измеримая по x для любого $u\in\mathbb{R}$ и непрерывная по u для почти всех $x\in\Omega$) также борелева $(\mathrm{mod}\,0)$ [2], хотя она может не быть борелевой на $\Omega\times\mathbb{R}$.

В дальнейшем понадобится также условие:

(g4) существует множество $\omega\subset\Omega$ нулевой меры Лебега такое, что множество

$$D = \bigcup_{x\in\Omega\setminus\omega}\{u\in\mathbb{R}\colon g_-(x,u)\neq g_+(x,u)\}$$

имеет меру нуль, и $a(x,t)\equiv 0$ на $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$.

Здесь и далее $g_-(x,u)=\liminf_{\eta\to u} g(x,\eta)$, $g_+(x,u)=\limsup_{\eta\to u} g(x,\eta)$ для функции $g\colon\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, у которой сечение $g(x,\cdot\,)$ – локально ограниченная функция для почти всех $x\in\Omega$.

Исследуется структура множества решений задачи (1.1), (1.2). При этом под решением задачи (1.1), (1.2) понимаем упорядоченную пару (λ,u), где $\lambda\geqslant 0$, а $u\in W_p^2(\Omega)$, $p>n$, в определенном смысле удовлетворяет уравнению (1.1) и имеет нулевой след на границе $\partial\Omega$. Множество решений задачи (1.1), (1.2) рассматривается в прямом произведении $\mathbb{R}$ и S, где S – функциональное банахово пространство, непрерывно вложенное в $W_p^1(\Omega)$, и в которое компактно вложено пространство $W_q^2(\Omega)$ $(p\geqslant q>n,\ q\geqslant 2)$. В данной работе $S=C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0<\alpha<(p-n)/p$.

Определение 1. *Обобщенным решением* задачи (1.1), (1.2) называется пара (λ,u) такая, что для почти всех $x\in\Omega$ функция $u(x)$ удовлетворяет включению $Lu(x)\in\lambda[g_-(x,u(x)),\,g_+(x,u(x))]$ и граничному условию (1.2).

Мотивировкой изучения структуры множества обобщенных решений класса задач типа (1.1), (1.2) явилось вхождение в этот класс известной задачи Х. Дж. Купера о нагреве проводника, помещенного в однородное электрическое поле интенсивности $\sqrt{\lambda}$ (см. [3]).

В задаче Купера дифференциальный оператор в левой части уравнения (1.1) имеет вид

$$-\sum_{i=1}^{n}(k(x,u(x))u_{x_i})_{x_i} = -\sum_{i=1}^{n} k(x,u(x))u_{x_i x_i} - \sum_{i=1}^{n}\big(k_{x_i}(x,u(x)) + k_u(x,u(x))u_{x_i}\big)u_{x_i}.$$

Здесь $u(x)$ – температура проводника в точке $x \in \Omega$, $k(x,u(x))$ – коэффициент теплопроводности. Роль нелинейности $g(x,u)$ в задаче Купера играет удельная электропроводность, которая при определенных температурах может меняться скачкообразно, например, при рекристаллизации.

В данной статье топологическим методом доказывается существование в множестве обобщенных решений U задачи (1.1), (1.2) связной, замкнутой и неограниченной компоненты в банаховом пространстве $\mathbb{R}\times S$, содержащей $(0,0)$. Проекция этой компоненты на $\mathbb{R}$ – связное множество, поэтому это либо полуинтервал, возможно, $[0,\infty)$, либо отрезок с левым концом нуль. Для задачи Купера это означает, что если квадрат интенсивности электрического поля, в которое помещен проводник, принадлежит этой проекции, то существует стационарное распределение температуры. Заметим, что при сделанных предположениях, в силу принципа максимума, для всякого обобщенного решения (λ,u) с $\lambda>0$ задачи (1.1), (1.2) функция $u(x)$ положительная почти всюду на Ω.

Связную, замкнутую и неограниченную компоненту множества обобщенных решений U в пространстве $\mathbb{R}\times S$, содержащую $(0,0)$, называют *континуумом обобщенных положительных решений, соединяющим* $(0,0)$ *и* ∞, в пространстве $\mathbb{R}\times S$.

Рассмотрим еще два определения решения задачи (1.1), (1.2) – сильное и полуправильное.

Определение 2. *Сильным решением* задачи (1.1), (1.2) называется пара (λ,u), где функция $u(x) \in W_p^2(\Omega)\cap \mathring{W}_p^1(\Omega)$ $(p>n)$ удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду на Ω.

Определение 3. *Полуправильным решением* задачи (1.1), (1.2) называется такое сильное решение (λ,u) этой задачи, что множество $x\in\Omega$, для которых $u(x)$ – точка разрыва функции $g(x,\cdot)$, имеет меру нуль.

Если для почти всех $x\in\Omega$ справедливо включение

$$g(x,t)\in[g_-(x,t),\, g_+(x,t)] \quad \forall\, t\in\mathbb{R}, \tag{1.3}$$

то сильное решение является и обобщенным. Полуправильное решение задачи (1.1), (1.2) будет и обобщенным решением этой задачи.

Понятие полуправильного решения было введено М. А. Красносельским и А. В. Покровским в [4].

Укажем на последние работы авторов [5]–[16], где рассматривалась проблема существования обобщенных, сильных и полуправильных решений задачи (1.1), (1.2) с дифференциальным оператором L, линейно зависящим от u. Исследуемый в данной статье квазилинейный случай требует иных подходов к изучению задачи (1.1), (1.2).

В [17] Х. Дж. Купер рассматривал задачу (1.1), (1.2) с дифференциальным оператором в дивергентной форме и $a(x,u) \leqslant 0$ на $\Omega \times \mathbb{R}$. От нелинейности $g(x,u)$ Купер требовал выполнения следующих условий:

(a1) $g(x,u) = g_0(x,u)+\psi_1(x,u)-\psi_2(x,u)$, где $g_0(x,u)$ каратеодориева на $\Omega\times\mathbb{R}$ функция, функции $\psi_j(x,u)$ $(j=1,2)$ непрерывны по x на Ω при каждом $u \in \mathbb{R}$ и неубывающие по u на $\mathbb{R}$ для всех $x \in \Omega$;

(a2) для функции $g_0(x,u)$ из условия (a1) верна оценка

$$|g_0(x,u)| \leqslant d(x) + \psi(|u|) \quad \forall\,(x,u) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

где $d(x) \in L_p(\Omega)$ $(p > n)$, $\psi(t)$ – неубывающая функция на $\mathbb{R}_+$;

(a3) для некоторой положительной на Ω функции $\beta(x)$ справедливо неравенство

$$g(x,t) \geqslant \beta(x) \quad \forall\,(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Из условия (a1) следует, что множество точек разрыва $g(x,u)$ по фазовой переменной u не более чем счетно, т. е. не более чем счетно множество

$$D = \{t \in \mathbb{R}\colon \text{существует } x \in \Omega \text{ такое, что } g_-(x,t) \neq g_+(x,t)\}$$

(см. [17]). Если в условии (a1) отказаться от непрерывности $\psi_j(x,t)$ по x, заменив ее на измеримость по x на Ω, то множество D может быть несчетным.

Пример 1. Определим функцию $f\colon [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$f(x,t) = \begin{cases} 2, & \text{если } x < t, \\ 1, & \text{если } x \geqslant t. \end{cases}$$

Тогда f – измеримая по x и неубывающая по t. Множество D точек разрыва $f(x,t)$ по фазовой переменной t равно $[0,1]$, и оно несчетно. Поскольку для любого $x \in [0,1]$ функция $f(x,\cdot)$ непрерывна слева на $\mathbb{R}$, то она суперпозиционно измеримая [18]. Отсюда из монотонности по t следует, что она борелева $(\mathrm{mod}\,0)$ на $[0,1] \times \mathbb{R}$ (см. [2]). Заметим, что функция $f(x,t)$, измеримая по x и неубывающая по t, может не быть суперпозиционно измеримой.

Пример 2. Пусть функция $f(x,t)$ задана на $[0,1] \times \mathbb{R}$ следующим образом:

$$f(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0,1],\ t < 1, \\ 2, & \text{если } x \in [0,1],\ t > 1, \\ 1, & \text{если } x \in A,\ t = 1, \\ 2, & \text{если } x \in [0,1] \setminus A,\ t = 1, \end{cases}$$

где A – неизмеримое подмножество $[0,1]$. Тогда $f(x,t)$ не является суперпозиционно измеримой на $[0,1]\times\mathbb{R}$, так как композиция $f(x,t(x))$, где $t(x)\equiv 1$ на $[0,1]$, неизмеримая на $[0,1]$ функция (она равна 1 при $x\in A$ и 2 при $x\in[0,1]\setminus A$).

Отметим, что в примере 2 функции $f_-(x,t)$ и $f_+(x,t)$ суперпозиционно измеримы, поскольку при любом $x\in[0,1]$ функция $f_-(x,\cdot)$ $(f_+(x,\cdot))$ непрерывна слева (справа) на $\mathbb{R}$ и для любого $u\in\mathbb{R}$ функция $f_-(x,u)$ $(f_+(x,u))$ измерима по x на Ω [18].

В [17] доказана теорема существования континуума положительных решений задачи (1.1), (1.2) в пространстве $\mathbb{R}\times S$, соединяющего $(0,0)$ и ∞. Для доказательства Купер использовал специальную аппроксимацию разрывной нелинейности $g(x,u)$ непрерывными нелинейностями на $\Omega\times\mathbb{R}$. Для аппроксимирующих задач установлено существование континуума положительных решений, соединяющего $(0,0)$ и ∞, с помощью теоремы Красносельского [19, теорема 5.5]. Затем предельным переходом получено существование континуума положительных решений для исходной задачи.

В работе [20] К.-Ч. Чанг к задаче (1.1), (1.2) с оператором L в дивергентной форме применил топологический метод. Относительно правой части уравнения (1.1) у него те же предположения (a1)–(a3), что и у Купера. В отличие от Купера у Чанга $a(x,u)\geqslant 0$ на $\Omega\times\mathbb{R}$. Заметим, что для Купера условие $a(x,u)\leqslant 0$ на $\Omega\times\mathbb{R}$ существенно, и он дополнительно требует от дифференциального оператора L коэрцитивности (см. [17, условие L-2]).

В [20] Чанг формулирует теорему о существовании континуума положительных решений задачи (1.1), (1.2), соединяющего $(0,0)$ и ∞, в $\mathbb{R}\times W_p^1(\Omega)$, $p>n$, для более общего вида чем в уравнении (1.1) квазилинейного оператора L эллиптического типа в дивергентной форме. Существование континуума обобщенных положительных решений задачи (1.1), (1.2), соединяющего $(0,0)$ с ∞, в пространстве $W_p^1(\Omega)$, утверждает Чанг, следует из [20, теорема 2.12]. Однако проверка выполнения условий этой теоремы в работе отсутствует.

Приведем формулировки основных результатов данной работы.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *область* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *класса* $C^{1,1}$;

2) *коэффициенты дифференциального оператора* L *удовлетворяют условиям* (i1), (i2);

3) *для нелинейности* $g(x,t)$ *выполнены условия* (g1)–(g3) *и для почти всех* $x\in\Omega$ *справедливо включение* (1.3).

Тогда задача (1.1), (1.2) *имеет континуум обобщенных положительных решений, соединяющий* $(0,0)$ *и* ∞, *в пространстве* $\mathbb{R}\times C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0<\alpha<(p-n)/p$, $p>n$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и дополнительно выполнено условие* (g4). *Тогда все обобщенные решения задачи* (1.1), (1.2) *являются полуправильными*.

Доказательство теоремы 1 сводится к операторной постановке задачи (1.1), (1.2), а затем проверке выполнения условий теоремы 2.12 из [20]. Указано достаточное условие полуправильности обобщенных решений задачи (1.1), (1.2) (теорема 2). По сравнению с работами [17] и [20] ослаблены ограничения на нелинейность $g(x,u)$ (условие (a1) заменено на более общее условие (g1)). В частности, множество точек разрыва $g(x,u)$ по фазовой переменной u может быть несчетным (см. пример 1).

§ 2. Операторная постановка задачи (1.1), (1.2), вспомогательные результаты

Фиксируем $p > n$ и $\alpha \in (0,(p-n)/p)$. В этом случае соболевское пространство $W_p^2(\Omega)$ компактно вложено в пространство Гёльдера $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ (см. [21]) с нормой

$$\|u\| = \sup_{\Omega}|u(x)| + \sup\Bigl\{\sup_{\Omega}|u_{x_j}|: j=1,\dots,n\Bigr\} + \sup\biggl\{\sup_{x,y\in\Omega,\,x\neq y}\frac{|u_{x_j}(x)-u_{x_j}(y)|}{|x-y|^{\alpha}}: j=1,\dots,n\biggr\}.$$

Норму в соболевском пространстве $W_q^l(\Omega)$ $(q \geqslant 1,\ l \in \mathbb{N})$ обозначим $\|\cdot\|_{q,l}$, а в пространстве Лебега $L_q(\Omega)$ $(1 \leqslant q \leqslant \infty)$ через $\|\cdot\|_q$.

Для каждого $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ определим на $E = W_p^2(\Omega) \cap \mathring{W}_p^1(\Omega)$ дифференциальный оператор $L(u)$ со значениями в $L_p(\Omega)$ равенством

$$L(u)v \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u(x))v_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,u(x),\nabla u(x))v_{x_i} + a(x,u(x))v \quad \forall\, v \in E. \tag{2.1}$$

Здесь функции $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t,\eta)$ и $a(x,t)$ те же, что и в уравнении (1.1), и они удовлетворяют условиям (i1), (i2). Поэтому оператор $L(u)$ равномерно эллиптический на Ω, его коэффициенты непрерывны на $\overline{\Omega}$ и коэффициент при v неотрицателен на Ω. Более того, коэффициенты $a_{ij}(x,u(x))$ непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}$. Отсюда следует (см. [1, лемма 9.17]), что существует постоянная $M > 0$, независящая от $v \in E$, такая, что

$$\|v\|_{p,2} \leqslant M\|L(u)v\|_p \quad \forall\, v \in E. \tag{2.2}$$

Отображение $L(u)\colon E \to L_p(\Omega)$ биективно (см. [1, теорема 9.15]). Из оценки (2.2) следует, что обратный оператор $L^{-1}(u)$, $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, ограниченный ($E$ берется с нормой $W_p^2(\Omega)$) как оператор из $L_p(\Omega)$ в E. Далее будем рассматривать $L^{-1}(u)$ как оператор, действующий из $L_p(\Omega)$ в $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. В силу компактности вложения $W_p^2(\Omega)$ в $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ $(p > n,\ \alpha \in (0,(p-n)/p))$ оператор $L^{-1}(u)$ компактный.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (i1), (i2), *и* $B(\theta,R)$ – *шар в пространстве* $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ *радиуса* R *с центром в нуле* θ *этого пространства. Тогда существует постоянная* $M > 0$, *зависящая только от* R, *такая, что для произвольного* $u \in B(\theta,R)$ *верна оценка* (2.2).

Доказательство. Из условий (i1), (i2) следует, что для каждого $u \in B(\theta, R)$ существует постоянная $C > 0$, независящая от $v \in E$, такая, что

$$\|v\|_{p,2} \leqslant C(\|L(u)v\|_p + \|v\|_p) \quad \forall\, v \in E. \tag{2.3}$$

Постоянная C зависит от $\chi(\|u\|_\infty)$ ($\chi(t)$ – функция из условия (i1)), $\|da_{ij}(x,u(x))/dx_s\|_\infty$, $\|b_i(x,u(x),\nabla u(x))\|_\infty$, $\|a(x,u(x))\|_\infty$ и $\mu(\|u\|_\infty)$, где $\mu(r) = \max\bigl\{\max\{|a_{ij}(x,t)|\colon x \in \overline{\Omega},\ |t| \leqslant r\},\ i,j = 1,\dots,n\bigr\}$ [22, с. 233]. Константу C можно выбрать неубывающей от перечисленных выше величин. На шаре $B(\theta,R)$ величины $\chi(\|u\|_\infty)$, $\|da_{ij}(x,u)/dx_s\|_\infty$, $\|b_i(x,u,\nabla u)\|_\infty$, $\|a(x,u)\|_\infty$ и $\mu(\|u\|_\infty)$ ограничены. Поскольку C монотонно зависит от этих величин и они ограничены, то можно указать значение C равное C_1, которое годится для всех $u \in B(\theta,R)$.

Получим оценку для $\|v\|_p$ через $\|L(u)v\|_p$ для произвольного $v \in E$, справедливую для всех $u \in B(\theta,R)$. В начале оценим $\sup_\Omega |v(x)|$. Запишем $v(x)$ в виде $v(x) = v^+(x) + v^-(x)$, где $v^+(x) = \max\{v(x),0\}$, $v^-(x) = \min\{v(x),0\}$. Тогда $(-v(x))^+ = -v^-(x)$, $|v(x)| = v^+(x) + (-v)^+(x)$, $\sup_\Omega v^+(x) = \sup_\Omega v(x)$ и $\sup_\Omega(-v)^+(x) = \sup_\Omega(-v(x))$. Для оператора $L(u)$ через D обозначим определитель матрицы $A(x,u)$ с элементами $a_{ij}(x,u(x))$, а через $D^* = D^{1/n}$ – среднее геометрическое собственных значений матрицы $A(x,u)$ (в силу условия (i1) матрица A – положительно определенная). Заметим, что $D^* \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, где $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ – наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы $A(x,u)$ соответственно. Пусть $L(u)v = f$, $u \in B(\theta,R)$, $v \in E$, и, значит, $v = L^{-1}(u)f$. Согласно слабому принципу максимума Александрова (см. [1, теорема 9.1])

$$\sup_\Omega v(x) \leqslant \sup_{\partial\Omega} v^+(x) + C_2\|f/D^*\|_n,$$

где постоянная C_2 зависит только от n, $\operatorname{diam}\Omega$ и $\|b_j(x,u(x),\nabla u(x))/D^*\|_n$, $j = 1,\dots,n$, монотонно. В силу условия (i1) найдется постоянная $\alpha > 0$ такая, что $\lambda_{\min} > \alpha$ для всех $u \in B(\theta,R)$. Отсюда и из ограниченности $\|b_j(x,u(x),\nabla u(x))\|_n$, $j = 1,\dots,n$, на $B(\theta,R)$ следует, что постоянную C_2/D^* можно выбрать независящей от $u \in B(\theta,R)$. В результате с учетом того, что $v(x) = 0$ на $\partial\Omega$, заключаем о существовании постоянной C_3, независящей от $u \in B(\theta,R)$, для которой $\sup_\Omega v^+(x) = \sup_\Omega v(x) \leqslant C_3\|L(u)v\|_n$ для любого $v \in E$ и $u \in B(\theta,R)$. Аналогично, заменяя v на $-v$, и учитывая, что $L(u)(-v) = -f$, получаем оценку $\sup_\Omega(-v^-(x)) = \sup_\Omega(-v(x)) \leqslant C_4\|L(u)v\|_n$ для любого $v \in E$ и $u \in B(\theta,R)$. Здесь постоянная C_4 не зависит от выбора $u \in B(\theta,R)$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\sup_\Omega |v(x)| &= \sup_\Omega(v^+(x) + (-v^-(x)))\\ &\leqslant \sup_\Omega v^+(x) + \sup_\Omega(-v^-(x)) \leqslant (C_3 + C_4)\|L(u)v\|_n\end{aligned} \tag{2.4}$$

для любого $v \in E$ и $u \in B(\theta,R)$. Поскольку $p > n$, то $L_p(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_n(\Omega)$. Пространство $L_\infty(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_p(\Omega)$. Отсюда из оценки (2.4) следует существование постоянной C_5, независящей от $u \in B(\theta,R)$, такой, что $\|v\|_p \leqslant C_5\|L(u)v\|_p$ для любого $v \in E$ и произвольного $u \in B(\theta,R)$.

Последняя оценка вместе с неравенством (2.3), в котором C заменена на C_1, влечет (2.2) для произвольного $u \in B(\theta, R)$ с константой $M = C_1(1 + C_5)$, независящей от $u \in B(\theta, R)$. Лемма 1 доказана.

Пусть функция $g(x,t)$ удовлетворяет условию 3) теоремы 1. Сопоставим ей многозначное отображение G из $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ в $L_p(\Omega)$, положив для любого $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$

$$\begin{aligned} G(u) = \{z\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon z - \text{измеримая на } \Omega, \text{ и} \\ z(x) \in [g_-(x,u(x)),\, g_+(x,u(x))] \text{ почти всюду на } \Omega\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

В дальнейшем понадобятся два факта.

Предложение 1 (см. [23, лемма]). *Пусть $T\colon E_1 \to E_2$ – локально ограниченное отображение на банаховом пространстве E_1, и банахово пространство E_2 рефлексивно. Тогда овыпукливание*

$$T^{\Box}u := \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\mathrm{co}}\{y = Tv\colon \|v-u\|_{E_1} < \varepsilon\}$$

оператора T слабо-сильно замкнуто, т.е. из $u_n \to u$, $y_n \in T^{\Box}u_n$, $y_n \rightharpoonup y$ следует, что $y \in T^{\Box}u$ ($\overline{\mathrm{co}}\, V$ – замкнутая выпуклая оболочка множества V в E_2, $\rightharpoonup$ означает слабую сходимость).

Предложение 2 (см. [2, теорема 27.1]). *Пусть функция $f(x,t)$ борелева $(\mathrm{mod}\, 0)$ на $\Omega \times \mathbb{R}$ (Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$), и для почти всех $x \in \Omega$ верна оценка*

$$|f(x,t)| \leqslant a(x) + b|t|^{q/s} \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

где $a(x) \in L_s(\Omega)$, b – положительная константа, $s \geqslant 1$, $q \geqslant 1$. Отображение $F(u) = f(x,u(x))$ понимается как отображение из $L_q(\Omega)$ в $L_s(\Omega)$. Для функции $f(x,\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($x \in \Omega$) через $f_t^{\Box}$ обозначим ее овыпукливание,

$$\begin{aligned} F_t^{\Box}(u) = \{z\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon z(x) \text{ – измеримая функция на } \Omega, \text{ и} \\ z(x) \in f_t^{\Box}(x,u(x)) \text{ почти всюду на } \Omega\}. \end{aligned}$$

Тогда значения $F_t^{\Box}$ и $F^{\Box}$ лежат в $L_s(\Omega)$ и $F_t^{\Box} = F^{\Box}$ на $L_q(\Omega)$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть функция $g(x,t)$ удовлетворяет условию 3) теоремы 1, и G – многозначное отображение, заданное на $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ равенством (2.5). Тогда*

1) *значения G лежат в $L_p(\Omega)$, и G ограниченные множества в $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ переводит в ограниченные в $L_p(\Omega)$;*

2) *значения G – выпуклые и замкнутые множества в $L_p(\Omega)$;*

3) *отображение G слабо-сильно замкнуто, т.е. если $u_n \to u$ в $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $y_n \in G(u_n)$ и $y_n \rightharpoonup y$, то $y \in G(u)$.*

Доказательство. В силу условия (g2) значение $G(u) \subset L_p(\Omega)$ для любого $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ и, если U – ограниченное множество в $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, то $G(U) := \bigcup_{u\in U} G(u)$ – ограниченное множество в $L_p(\Omega)$. Согласно условию 3) теоремы 1 $g(x,u(x)) \in G(u)$ для любого $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Заключение 1) доказано.

Докажем 2). Пусть $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, y_1, $y_2 \in G(u)$. Тогда

$$y_j(x) \in [g_-(x, u(x)),\, g_+(x, u(x))]$$

для почти всех $x \in \Omega$, $j = 1, 2$. Поэтому для любого $t \in [0,1]$ имеем

$$(1-t)y_1(x) + ty_2(x) \geqslant (1-t)g_-(x, u(x)) + tg_-(x, u(x)) = g_-(x, u(x)),$$
$$(1-t)y_1(x) + ty_2(x) \leqslant (1-t)g_+(x, u(x)) + tg_+(x, u(x)) = g_+(x, u(x))$$

почти всюду на Ω, т.е. для любого $t \in [0,1]$

$$(1-t)y_1 + ty_2 \in G(u).$$

Выпуклость $G(u)$ установлена.

Пусть теперь $(y_n) \subset G(u)$ и $y_n \to y$ в $L_p(\Omega)$. Существует подпоследовательность (y_{n_k}) последовательности (y_n) такая, что $y_{n_k}(x) \to y(x)$ почти всюду на Ω. Поскольку $y_{n_k} \in G(u)$, то $g_-(x, u(x)) \leqslant y_{n_k}(x) \leqslant g_+(x, u(x))$ почти всюду на Ω. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим $g_-(x, u(x)) \leqslant y(x) \leqslant g_+(x, u(x))$ почти всюду на Ω, т.е. $y \in G(u)$. Замкнутость $G(u)$ доказана.

Перейдем к доказательству заключения 3) леммы 2. Пусть $(u_n) \subset C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $u_n \to u$ в $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $y_n \in G(u_n)$, и $y_n \rightharpoonup y$ в $L_p(\Omega)$. Заметим, что $g_t^{\square}(x,t) = [g_-(x,t), g_+(x,t)]$. Поэтому $G(v) = G_t^{\square}(v)$ для произвольного $v \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Существует постоянная $c > 0$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $|u_n(x)| \leqslant c$ для любого $x \in \overline{\Omega}$ и $|u(x)| \leqslant c$ для любого $x \in \overline{\Omega}$, поскольку $u_n \to u$ в $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Определим функцию $\widehat{g}(x,t)$ на $\Omega \times \mathbb{R}$ следующим образом: $\widehat{g}(x,t) = g(x,t)$ при $(x,t) \in \Omega \times [-c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$ фиксировано), $\widehat{g}(x,t) = g(x, -c-\varepsilon)$, если $x \in \Omega$, $t < -c-\varepsilon$, и $\widehat{g}(x,t) = g(x, c+\varepsilon)$, если $x \in \Omega$, $t > c+\varepsilon$. Тогда $\widehat{g}(x,t)$ борелева $(\operatorname{mod} 0)$ на $\Omega \times \mathbb{R}$, и в силу оценки из условия (g2) имеем

$$|\widehat{g}(x,t)| \leqslant d(x) + \psi(c+\varepsilon)$$

на $\Omega \times \mathbb{R}$, где $d(x) \in L_p(\Omega)$. Следовательно, для $f(x,t) = \widehat{g}(x,t)$ выполнены условия предложения 2 с $s = p$ и $q \geqslant 1$. Из чего заключаем, что овыпукливание оператора $F(v) = \widehat{g}(x, v(x))$, $v \in L_p(\Omega)$, совпадает с $F_t^{\square}(v)$ с $f(x,t) = \widehat{g}(x,t)$. В силу предложения 1 отображение $F_t^{\square}$ слабо-сильно замкнуто как многозначное отображение из $L_q(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$. Так как из сходимости (u_n) в $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ к $u(x)$ следует сходимость (u_n) к $u(x)$ в $L_q(\Omega)$ и $y_n \in G(u_n) = F_t^{\square}(u_n)$, $y_n \rightharpoonup y$ в $L_p(\Omega)$, то $y \in F_t^{\square}(u) = G(u)$. Заключение 3) леммы 2 доказано. Лемма 2 доказана.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть для коэффициентов дифференциального оператора L в уравнении* (1.1) *выполнены условия* (i1), (i2), $p > n$, $\alpha \in (0, (p-n)/p)$, $u_0 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ *и* $r > 0$. *Тогда существует постоянная $K > 0$ такая, что для любого u из шара $B(u_0, r)$ в пространстве $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ и $v \in W_p^2(\Omega)$ верно неравенство*

$$\|(L(u) - L(u_0))v\|_p \leqslant K\|u - u_0\| \cdot \|v\|_{p,2}, \tag{2.6}$$

где $\|\cdot\|$ – норма в $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Пусть $u \in B(u_0, r)$, $v \in W_p^2(\Omega)$. Оценим поточечно на Ω функцию $B(x) = |(L(u(x)) - L(u_0(x)))v(x)|$. Имеем для почти всех $x \in \Omega$

$$B(x) \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(x, u(x)) - a_{ij}(x, u_0(x))| \cdot |v_{x_i x_j}(x)| \\ + \sum_{i=1}^{n} |b_i(x, u(x), \nabla u(x)) - b_i(x, u_0(x), \nabla u_0(x))| \cdot |v_{x_i}(x)| \\ + |a(x, u(x)) - a(x, u_0(x))| \cdot |v(x)|.$$

Отсюда, применяя формулу Лагранжа, получим для почти всех $x \in \Omega$

$$B(x) \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \bigl|a_{ij_t}\bigl(x, u_0(x) + \theta_{ij}(u(x) - u_0(x))\bigr)\bigr| \cdot |u(x) - u_0(x)| \cdot |v_{x_i x_j}(x)| \\ + \sum_{i=1}^{n} \Biggl(\sum_{s=1}^{n} \bigl|b_{i_{\eta_s}}\bigl(x, u_0(x) + \theta_i(u(x) - u_0(x)),\ \nabla u_0(x) + \theta_i \nabla (u - u_0)(x)\bigr)\bigr| \\ \times |u_{x_s}(x) - u_{0_{x_s}}(x)| + \bigl|b_{i_t}\bigl(x, u_0(x) + \theta_i(u(x) - u_0(x)),\ \nabla u_0(x) + \theta_i \nabla (u - u_0)(x)\bigr)\bigr| \\ \times |u(x) - u_0(x)| \Biggr) \cdot |v_{x_i}(x)| \\ + \bigl|a_t\bigl(x, u_0(x) + \theta_0(u(x) - u_0(x))\bigr)\bigr| \cdot |u(x) - u_0(x)| \cdot |v(x)|, \tag{2.7}$$

где $\theta_{ij}(x)$, $\theta_i(x)$ и $\theta_0(x)$ из интервала $(0, 1)$. Для любого $u \in B(u_0, r)$ имеем $\|u\| \leqslant r + \|u_0\|$ в пространстве $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. По условию производные $a_{ij_t}(x, t)$, $a_t(x, t)$ непрерывны на $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, а $b_{i_{\eta_s}}(x, t, \eta)$ и $b_{i_t}(x, t, \eta)$ непрерывны на $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Поэтому они ограничены на ограниченных подмножествах множеств $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ и $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ соответственно. Из чего заключаем о существовании постоянной $K_1 > 0$, ограничивающей значения производных коэффициентов оператора L из уравнения (1.1) в неравенстве (2.7) для почти всех $x \in \Omega$ и любого $u \in B(u_0, r)$. Отсюда в силу неравенства (2.7) получим оценку

$$B(x) \leqslant K_1 \|u - u_0\| \sum_{i,j=1}^{n} |v_{x_i x_j}(x)| \\ + K_1 \|u - u_0\| \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n+1} 1 \cdot |v_{x_i}(x)| + K_1 \|u - u_0\| \cdot |v(x)|$$

почти всюду на Ω, любого $u \in B(u_0, r)$ и $v \in W_p^2(\Omega)$. Из чего следует

$$\|B\|_p \leqslant K_1(n^2 + n(n+1) + 1) \cdot \|u - u_0\| \cdot \|v\|_{p,2}$$

для любого $u \in B(u_0, r)$ и $v \in W_p^2(\Omega)$. Таким образом, установлено (2.6) с константой $K = K_1(2n^2 + n + 1) > 0$. Лемма 3 доказана.

Существование обобщенного решения задачи (1.1), (1.2) в пространстве $W_p^2(\Omega)$ $(p > n)$ эквивалентно существованию решения у включения

$$u \in \lambda L^{-1}(u) G(u) \tag{2.8}$$

в пространстве $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, где оператор $L^{-1}(u)$, $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, определен выше, отображение G задается формулой (2.5), $\lambda \geqslant 0$.

Положим

$$\Phi(u) = L^{-1}(u)G(u) \tag{2.9}$$

для любого $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Тогда включение (2.8) примет вид $u \in \lambda\Phi(u)$, где $\lambda \geqslant 0$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* 1)–3) *теоремы* 1. *Тогда отображение* Φ, *определенное формулой* (2.9), *обладает следующими свойствами*:

1) *образ любого ограниченного множества из* $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ *при отображении* Φ – *предкомпактное множество в* $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$;

2) *значения* Φ – *выпуклые компакты в* $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$;

3) *отображение* Φ *полунепрерывно сверху на* $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ [24], *т. е. для любого* $u_0 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ *и произвольного открытого множества* $U \supset \Phi(u_0)$ *найдется окрестность* V *точки* u_0 *такая, что* $\Phi(V) \subset U$.

Доказательство. Пусть A – ограниченное множество в $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, т. е. найдется шар $B(\theta, R)$, содержащий A (θ – нуль пространства, $R > 0$). В силу леммы 1 существует постоянная $M > 0$ такая, что для любых $u \in B(\theta, R)$ и $v \in W_p^2(\Omega)$ верно неравенство (2.2).

Из заключения 1) леммы 2 следует ограниченность множества $G(A)$ в $L_p(\Omega)$, т. е. существование постоянной $C > 0$ такой, что для любого $z \in G(A)$ имеем $\|z\|_p \leqslant C$. Последнее влечет оценку $\|L(u)v\|_p \leqslant C$ для любых $u \in A$ и $v \in \Phi(u)$. Отсюда и оценки (2.2) следует, что $\|v\|_{p,2} \leqslant MC$ для любого $v \in \Phi(A)$. Из чего заключаем о предкомпактности множества $\Phi(A)$, поскольку вложение $W_p^2(\Omega)$ в $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ компактно ($p > n$, $0 < \alpha < (p-n)/p$).

Докажем, что значения Φ – выпуклые компакты в $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Пусть $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. В силу леммы 2 множество $G(u)$ ограниченное, выпуклое и замкнутое в $L_p(\Omega)$. Поскольку при фиксированном u оператор $L^{-1}(u)$ линейный и компактный из $L_p(\Omega)$ в $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, то множество $\Phi(u) = L^{-1}(u)G(u)$ выпуклое и предкомпактное. Осталось доказать, что оно замкнутое.

Пусть $(v_n) \subset \Phi(u)$ и $v_n \to v$ в $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Тогда $v_n = L^{-1}y_n$, где $y_n \in G(u)$. Так как $L_p(\Omega)$ рефлексивно, а множество $G(u)$ ограниченное, то существует подпоследовательность (y_{n_k}), слабо сходящаяся к y. Поскольку ограниченное множество $G(u)$ выпуклое и замкнутое, то $y \in G(u)$. Из слабой сходимости (y_{n_k}) к y и компактности оператора $L^{-1}(u)$ следует, что $L^{-1}(u)y_{n_k} \to L^{-1}(u)y$. Значит, $v = L^{-1}(u)y \in \Phi(u)$. Замкнутость $\Phi(u)$ установлена.

Перейдем к доказательству заключения 3) леммы 4. Необходимо показать, что для любого $u_0 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ и произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что $\Phi(B(u_0, \delta)) \subset \Phi(u_0) + B(\theta, \varepsilon)$, θ – нулевой элемент пространства $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Последнее включение означает, что для любых $u \in B(u_0, \delta)$ и $v \in \Phi(u)$ найдется $v_0 \in \Phi(u_0)$ такой, что $\|v - v_0\| < \varepsilon$.

Фиксируем $u_0 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ и $\varepsilon > 0$. Согласно лемме 1 существует постоянная $M > 0$ такая, что для произвольных $u \in B(u_0, 1)$ и $v \in W_p^2(\Omega)$ верна оценка (2.2):

$$\|v\|_{p,2} \leqslant M\|L(u)v\|_p.$$

Поскольку пространство $W_p^2(\Omega)$ компактно вложено в $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, то существует константа $C > 0$ такая, что

$$\|v\| \leqslant C\|v\|_{p,2} \quad \forall\, v \in W_p^2(\Omega). \tag{2.10}$$

Известно [2], что отображение G как многозначная функция из $C(\overline{\Omega})$ в $L_p(\Omega)$ полунепрерывно сверху. Поскольку пространство $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ компактно вложено в $C(\overline{\Omega})$, то G и как отображение из $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ в $L_p(\Omega)$ будет полунепрерывно сверху. Поэтому по данному $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_1 > 0$ такое, что для любого $u \in B(u_0, \delta_1)$ справедливо включение

$$G(u) \subset G(u_0) + B\biggl(\theta, \frac{\varepsilon}{2MC}\biggr), \tag{2.11}$$

где M и C константы из неравенств (2.2) и (2.10) соответственно. Поскольку множество $\Phi(u_0)$ ограниченное в $W_p^2(\Omega)$, то найдется $\delta_2 > 0$ такое, что

$$\delta_2 K\|w\|_{p,2} < \frac{\varepsilon}{2MC} \quad \forall\, w \in \Phi(u_0), \tag{2.12}$$

где константа K соответствует шару $B(u_0, 1)$ в неравенстве (2.6) (см. лемму 3).

Выберем $\delta = \min\{1, \delta_1, \delta_2\}$. Покажем, что $\Phi(B(u_0, \delta)) \subset \Phi(u_0) + B(\theta, \varepsilon)$. Пусть $u \in B(u_0, \delta)$ и $v \in \Phi(u)$. Тогда $v = L^{-1}(u)y$, где $y \in G(u)$. В силу (2.11) найдется $y_0 \in G(u_0)$ такой, что $\|y - y_0\|_p < \varepsilon/(2MC)$. Положим $v_0 = L^{-1}(u_0)y_0$. Заметим, что $v_0 \in \Phi(u_0)$. Оценим $\|v - v_0\|$. В силу (2.2) и (2.10) имеем

$$\begin{aligned} \|v - v_0\| &\leqslant C\|v - v_0\|_{p,2} \leqslant CM\|L(u)(v - v_0)\|_p \\ &\leqslant CM\bigl(\|(L(u) - L(u_0))v_0\|_p + \|L(u)v - L(u_0)v_0\|_p\bigr). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Заметим, что $L(u)v = y$, $L(u_0)v_0 = y_0$, и в силу леммы 3

$$\|(L(u) - L(u_0))v_0\|_p \leqslant K\|u - u_0\| \cdot \|v_0\|_{p,2} \leqslant K\delta_2\|v_0\|_{p,2} < \frac{\varepsilon}{2MC}$$

(воспользовались неравенством (2.12)). Отсюда в силу (2.13) с учетом выбора y_0 получим

$$\|v - v_0\| \leqslant CM\biggl(\frac{\varepsilon}{2MC} + \|y - y_0\|_p\biggr) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

На этом доказательство полунепрерывности сверху отображения Φ завершается. Лемма 4 доказана.

Пусть X, Y – банаховы пространства, S – метрическое пространство, $\Gamma(Y)$ – множество всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств Y. Предположим, что отображение $\varphi_1\colon S \to \Gamma(Y)$ – компактное, т. е. оно полунепрерывно сверху на S, и $\varphi_1(S)$ – предкомпактное множество в Y, $\varphi_2\colon Y \to X$ – однозначное непрерывное отображение. Тогда $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1\colon S \to 2^X$ называется *компактной последовательностью отображений первого типа* (см. [20]).

Имеет место следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* 1)–3) *теоремы* 1. *Тогда для любого открытого ограниченного множества* A *в пространстве* $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ *отображение* Φ, *определенное формулой* (2.9), *есть компактная последовательность первого типа на* $\overline{A}$.

Доказательство. Положим $X = Y = C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $S = \overline{A}$ с метрикой пространства $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\varphi_1 = \Phi|_{\overline{A}}$, φ_2 – тождественное отображение в $C^{1,\alpha}(\Omega)$. В силу леммы 4 отображение $\varphi_1 \colon S \to \Gamma(Y)$ – компактное, а $\varphi_2 \colon Y \to X$ – однозначное непрерывное отображение. Поскольку $\Phi|_{\overline{A}} = \varphi_2 \circ \varphi_1$, то оно является компактной последовательностью первого типа на $\overline{A}$. Лемма 5 доказана.

Доказательство утверждения теоремы 1 о существовании континуума обобщенных положительных решений, соединяющего $(0,0)$ и ∞, сводится к проверке условий теоремы 2.12 из [20]. Приведем ее формулировку.

Теорема 3. *Пусть* X, Y *– вещественные банаховы пространства, и* X *полуупорядочено конусом* P, $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1 \colon [0,R] \times \overline{A} \to \Gamma(Y) \to 2^P$ *– компактная последовательность отображений первого типа для каждого* $R > 0$ *и произвольного открытого ограниченного множества* $A \subset P$. *Предположим, что* $\varphi(0,\theta) = \theta$ *(*θ *– нуль пространства* X*) и* θ *– единственная неподвижная точка отображения* $\varphi(0,\cdot\,)$. *Кроме того, предположим, что существует* $\rho > 0$, *для которого* $\nu x \notin \varphi(0,x)$ *для любых* $x \in S_\rho^+ = \{y \in P \colon \|y\| = \rho\}$ *и* $\nu \geqslant 1$. *Тогда множество решений* $\Sigma = \{(\lambda, x) \in \mathbb{R}_+ \times P \colon x \in \varphi(\lambda, x)\}$ *содержит неограниченное связное и замкнутое подмножество, содержащее* $(0,\theta)$ *(т.е. континуум положительных решений включения* $x \in \varphi(\lambda,x)$, *соединяющий* $(0,\theta)$ *и* ∞*).*

Теорему 3 можно рассматривать как аналог теоремы Лере–Шаудера для многозначных отображений. Теорема 3 доказывается с помощью теории степени, построенной Чангом в [20] для компактных последовательностей отображений.

Ниже приведем ответ на вопрос, что помешало провести доказательство теоремы 1 по схеме Купера.

На первом этапе доказательства основной теоремы в [17] Купер устанавливает существование континуума положительных решений для аппроксимирующей задачи с непрерывной нелинейностью в правой части. Доказательство этого опирается на общую теорему из [25, теорема 2.5], которая является следствием теоремы Красносельского о собственном векторе [19, теорема 5.5]. В теореме 2.5 из [25] утверждается следующее.

Если в банаховом пространстве Y, полуупорядоченном конусом K, оператор $T \colon [0,\infty) \times K \to K$ компактный и непрерывный, то существует континуум положительных решений уравнения $x = \lambda T(\lambda, x)$, соединяющий $(0,0)$ и ∞. Положительность решения (λ, x) означает, что $\lambda \geqslant 0$ и $x \in K$.

Если в теореме 1 нелинейность $g(x,u)$ аппроксимировать непрерывными нелинейностями также как у Купера, то, используя лемму 4 и предположение (g3), можно доказать, что оператор $T_k(u) \equiv L^{-1}(u) G_k(u)$, действующий в $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, компактный и непрерывный, причем $T_k(K) \subset K$, где K – конус неотрицательных функций в пространстве $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Здесь G_k – оператор Немыцкого, порожденный аппроксимирующей $g(x,u)$ нелинейностью $g_k(x,u)$. В силу теоремы 2.5 из [25] следует существование континуума положительных решений в $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ для аппроксимирующих задач (это следует и из [3, теорема 17]). Таким образом, первый этап доказательства по схеме Купера проходит и в условиях теоремы 1.

На втором этапе доказательства у Купера реализуется предельный переход. В его обосновании ключевым является следующее утверждение.

Если последовательность решений аппроксимирующих задач сходится в $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, то предельная функция – это сильное решение исходной задачи с разрывной нелинейностью.

При доказательстве этого утверждения Купер использовал ряд предположений, которые не следуют из условий теоремы 1. Такими являются предположение (a1) о структуре нелинейности $g(x,u)$ (которое влечет, что число точек разрыва $g(x,u)$ по u не более чем счетно), дивергентная форма уравнения и коэрцитивность левой части в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ [17, условие L-2], неположительность $a(x,u)$. По этой причине реализация второго этапа в схеме Купера при выполнении условий теоремы 1 оказалась проблематичной.

Для доказательства утверждения теоремы 2 о полуправильности обобщенных решений понадобится еще одна лемма.

Лемма 6. *Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ класса $C^{1,1}$,*

$$Lu(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i}$$

равномерно эллиптический дифференциальный оператор в Ω, коэффициенты которого $a_{ij}(x)$ непрерывно дифференцируемы, а $b_i(x)$ непрерывны в $\overline{\Omega}$. Предположим, что $u \in W_p^2(\Omega)$ $(p > n)$ сильное решение задачи

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega; \qquad u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

где функция f положительная на Ω и принадлежит $L_p(\Omega)$, а множество $\sigma \subset \mathbb{R}$ имеет меру нуль. Тогда $u^{-1}(\sigma) := \{x \in \Omega\colon u(x) \in \sigma\}$ – множество меры нуль.

Доказательство. Допустим противное, т. е. $\operatorname{mes}_n u^{-1}(\sigma) \neq 0$ (mes_n – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$). Так как $p > n$, то $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Значит, $\nabla u(x)$ непрерывна на $\overline{\Omega}$. Поскольку $u \in W_p^2(\Omega)$, то $u_{x_i}(x) \in W_p^1(\Omega)$, $i = 1,\dots,n$. Поэтому, если $A = \{x \in \overline{\Omega}\colon \nabla u(x) = 0\}$, то обобщенные производные $u_{x_ix_j}(x)$ равны нулю почти всюду на A (см. [1, лемма 7.7]). Из чего следует, что $Lu(x) = 0$ почти всюду на A. Однако это возможно только если $\operatorname{mes}_n A = 0$, поскольку $Lu(x) = f(x) > 0$ почти всюду на Ω. В силу непрерывности $\nabla u(x)$ на $\overline{\Omega}$ множество A замкнуто, поэтому его дополнение $A^c = \Omega \setminus A$ открыто. Множество $u^{-1}(\sigma)$ измеримое и содержится в Ω. По предположению его мера не равна нулю. Поскольку $\operatorname{mes}_n A = 0$ и A^c открыто, то найдется n-мерный параллелепипед $\Pi = [a_1,b_1] \times \dots \times [a_n,b_n]$, содержащийся в A^c, такой, что

$\mathrm{mes}_n(u^{-1}(\sigma)\cap\Pi)\neq 0$. Более того, Π можно выбрать так, что для некоторых $i_0\in\{1,\dots,n\}$ и $\varepsilon>0$ дополнительно $|u_{x_{i_0}}(x)|\geqslant\varepsilon$ на Π. Не теряя общности, можно считать $i_0=1$. Определим отображение $R\colon\Pi\to\mathbb{R}^n$ равенством $R(x)=R(x_1,x_2,\dots,x_n)=(u(x),x_2,\dots,x_n)$ для произвольного $x\in\Pi$. Функция $R\in C^1(\Pi)$ и ее якобиан равен $u_{x_1}(x)$. Согласно обобщенной лемме Сарда [26] отображение R^{-1} переводит множества меры нуль в множества меры нуль. Из чего следует, что R отображает множества положительной меры в множества положительной меры. Этим же свойством обладает функция $\varrho\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\varrho(y_1,\dots,y_n)=y_1$, а значит, и композиция $\varrho\circ R$, совпадающая с $u|_\Pi$. Поскольку $\mathrm{mes}_n(u^{-1}(\sigma)\cap\Pi)>0$, то в силу доказанного выше множество $u(u^{-1}(\sigma)\cap\Pi)\subset\sigma$ имеет положительную меру. С другой стороны, $\mathrm{mes}_1\sigma=0$ по условию леммы 6. Получено противоречие. Лемма 6 доказана.

Заметим, что доказательство леммы 6 аналогично доказательству теоремы 6 из работы [3]. Однако в [3] оператор L записан в дивергентной форме и предполагается его коэрцитивность: существует постоянная $c>0$ такая, что

$$\int_\Omega\biggl(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)v_{x_i}v_{x_j}+\sum_{i=1}^n b_i(x)v_{x_i}v\biggr)\,dx\geqslant c\|v\|_{2,1}^2\quad\forall\,v\in\mathring{W}_2^1(\Omega).$$

Здесь $Lv\equiv-\sum_{i,j=1}^n(a_{ij}(x)v_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^n b_i(x)v_{x_i}$.

§ 3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. Существование обобщенного решения задачи (1.1), (1.2) в пространстве $W_p^2(\Omega)$ $(p>n)$ эквивалентно существованию решения включения $u\in\lambda\Phi(u)$ в пространстве $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0<\alpha<(p-n)/p$, $\Phi(u)=L^{-1}(u)G(u)$, где оператор $L(u)$ определен равенством (2.1), $L^{-1}(u)$ – оператор, обратный к $L(u)$, рассмотренный как оператор из $L_p(\Omega)$ в $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, отображение G задано формулой (2.5), $\lambda\geqslant 0$.

Введем частичную упорядоченность в вещественном банаховом пространстве $X=C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ с помощью конуса P неотрицательных функций из $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$: $u\leqslant v$, если $u(x)\leqslant v(x)$ на $\overline{\Omega}$. В силу условия (g3) для некоторой положительной на Ω функции $\beta(x)$ верно неравенство $g(x,t)\geqslant\beta(x)$ для любых $(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}$. Поэтому из сильного принципа максимума [1] следует, что обобщенные решения задачи (1.1), (1.2) положительные в Ω, если $\lambda>0$. Из чего заключаем, что значения отображения $\varphi(\lambda,u)=\lambda\Phi(u)$, $\lambda\geqslant 0$, лежат в конусе P.

Поскольку $\varphi(0,u)\equiv\theta$ (θ – нулевой элемент в X), то у $\varphi(0,\cdot\,)$ единственная неподвижная точка θ и для любого $u\neq\theta$ и произвольного $\nu\geqslant 1$ элемент $\nu u\notin\varphi(0,u)$.

В силу леммы 5 для любого открытого ограниченного множества A в пространстве X отображение Φ – компактная последовательность первого типа на $\overline{A}$. Отсюда следует, что для любого открытого ограниченного множества A в X и произвольного $R>0$ отображение $\varphi(\lambda,u)$ на $[0,R]\times\overline{A}$ – компактная последовательность первого типа.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 3 с $Y = X$. Поэтому существует континуум обобщенных положительных решений задачи (1.1), (1.2), соединяющий $(0, \theta)$ и ∞. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть (λ, u) – обобщенное решение задачи (1.1), (1.2). Тогда существует измеримая на Ω функция

$$z(x) \in [g_-(x, u(x)),\, g_+(x, u(x))]$$

для почти всех $x \in \Omega$ такая, что

$$L(u(x))u(x) = \lambda z(x) \tag{3.1}$$

почти всюду на Ω, $u(x) = 0$ на $\partial\Omega$. Из условия (g3) следует, что $z(x) > 0$ почти всюду на Ω. Если в уравнении (1.1) функция $a(x,t) \equiv 0$ на $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, а функции $a_{ij}(x,t)$ и $b_i(x,t,\eta)$ удовлетворяют условиям (i1), (i2), то оператор $L(u(x))$ в уравнении (3.1) удовлетворяет условиям леммы 6. Из условия (g4) следует, что за исключением множества $\omega \subset \Omega$ меры нуль, множество σ значений $u(x)$, для которых $g_-(x, u(x)) \neq g_+(x, u(x))$, имеет меру нуль. В силу леммы 6 имеем, что $u^{-1}(\sigma)$ – множество меры нуль. Из чего следует, что (λ, u) – полуправильное решение задачи (1.1), (1.2). Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989, 464 с.; пер. с англ.: D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, 2nd ed., Grundlehren Math. Wiss., **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1983, xiii+513 pp.
2. М. А. Красносельский, А. В. Покровский, *Системы с гистерезисом*, Наука, М., 1983, 272 с.; англ. пер.: M. A. Krasnosel'skiĭ, A. V. Pokrovskiĭ, *Systems with hysteresis*, Springer-Verlag, Berlin, 1989, xviii+410 pp.
3. H. J. Kuiper, "On positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems", *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), **20**:2-3 (1971), 113–138.
4. М. А. Красносельский, А. В. Покровский, "Правильные решения уравнений с разрывными нелинейностями", *Докл. АН СССР*, **226**:3 (1976), 506–509; англ. пер.: M. A. Krasnosel'skii, A. V. Pokrovskii, "Regular solutions of equations with discontinuous nonlinearities", *Soviet Math. Dokl.*, **17**:1 (1976), 128–132.
5. В. Н. Павленко, Д. К. Потапов, "Существование полуправильных решений эллиптических спектральных задач с разрывными нелинейностями", *Матем. сб.*, **206**:9 (2015), 121–138; англ. пер.: V. N. Pavlenko, D. K. Potapov, "The existence of semiregular solutions to elliptic spectral problems with discontinuous nonlinearities", *Sb. Math.*, **206**:9 (2015), 1281–1298.
6. В. Н. Павленко, Д. К. Потапов, "Существование решений невариационной эллиптической краевой задачи с параметром и разрывной нелинейностью", *Матем. тр.*, **19**:1 (2016), 91–105; англ. пер.: V. N. Pavlenko, D. K. Potapov, "Existence of solutions to a nonvariational elliptic boundary value problem with parameter and discontinuous nonlinearity", *Siberian Adv. Math.*, **27**:1 (2017), 16–25.
7. В. Н. Павленко, Д. К. Потапов, "Существование двух нетривиальных решений в задачах на собственные значения для уравнений с разрывными правыми частями при достаточно больших значениях спектрального параметра", *Матем. сб.*,

208:1 (2017), 165–182; англ. пер.: V. N. Pavlenko, D. K. Potapov, "Existence of two nontrivial solutions for sufficiently large values of the spectral parameter in eigenvalue problems for equations with discontinuous right-hand sides", *Sb. Math.*, **208**:1 (2017), 157–172.

8. В. Н. Павленко, Д. К. Потапов, "Существование трех нетривиальных решений эллиптической краевой задачи с разрывной нелинейностью в случае сильного резонанса", *Матем. заметки*, **101**:2 (2017), 247–261; англ. пер.: V. N. Pavlenko, D. K. Potapov, "Existence of three nontrivial solutions of an elliptic boundary-value problem with discontinuous nonlinearity in the case of strong resonance", *Math. Notes*, **101**:2 (2017), 284–296.
9. В. Н. Павленко, Д. К. Потапов, "Об оценках спектрального параметра эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями", *Сиб. матем. журн.*, **58**:2 (2017), 375–385; англ. пер.: V. N. Pavlenko, D. K. Potapov, "Estimates for a spectral parameter in elliptic boundary value problems with discontinuous nonlinearities", *Siberian Math. J.*, **58**:2 (2017), 288–295.
10. В. Н. Павленко, Д. К. Потапов, "Задача Эленбааса об электрической дуге", *Матем. заметки*, **103**:1 (2018), 92–100; англ. пер.: V. N. Pavlenko, D. K. Potapov, "Elenbaas problem of electric arc discharge", *Math. Notes*, **103**:1 (2018), 89–95.
11. В. Н. Павленко, Д. К. Потапов, "О свойствах спектра эллиптической краевой задачи с параметром и разрывной нелинейностью", *Матем. сб.*, **210**:7 (2019), 145–170; англ. пер.: V. N. Pavlenko, D. K. Potapov, "Properties of the spectrum of an elliptic boundary value problem with a parameter and a discontinuous nonlinearity", *Sb. Math.*, **210**:7 (2019), 1043–1066.
12. В. Н. Павленко, Д. К. Потапов, "Об одном классе эллиптических краевых задач с параметром и разрывной нелинейностью", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **84**:3 (2020), 168–184; англ. пер.: V. N. Pavlenko, D. K. Potapov, "On a class of elliptic boundary-value problems with parameter and discontinuous non-linearity", *Izv. Math.*, **84**:3 (2020), 592–607.
13. В. Н. Павленко, Д. К. Потапов, "О существовании трех нетривиальных решений резонансной эллиптической краевой задачи с разрывной нелинейностью", *Дифференц. уравнения*, **56**:7 (2020), 861–871; англ. пер.: V. N. Pavlenko, D. K. Potapov, "On the existence of three nontrivial solutions of a resonance elliptic boundary value problem with a discontinuous nonlinearity", *Differ. Equ.*, **56**:7 (2020), 831–841.
14. В. Н. Павленко, Д. К. Потапов, "Положительные решения суперлинейных эллиптических задач с разрывными нелинейностями", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **85**:2 (2021), 95–112; англ. пер.: V. N. Pavlenko, D. K. Potapov, "Positive solutions of superlinear elliptic problems with discontinuous non-linearities", *Izv. Math.*, **85**:2 (2021), 262–278.
15. В. Н. Павленко, Д. К. Потапов, "Вариационный метод для эллиптических систем с разрывными нелинейностями", *Матем. сб.*, **212**:5 (2021), 133–152; англ. пер.: V. N. Pavlenko, D. K. Potapov, "Variational method for elliptic systems with discontinuous nonlinearities", *Sb. Math.*, **212**:5 (2021), 726–744.
16. В. Н. Павленко, Д. К. Потапов, "Существование полуправильных решений эллиптических систем с разрывными нелинейностями", *Матем. заметки*, **110**:2 (2021), 239–257; англ. пер.: V. N. Pavlenko, D. K. Potapov, "Existence of semiregular solutions of elliptic systems with discontinuous nonlinearities", *Math. Notes*, **110**:2 (2021), 226–241.
17. H. J. Kuiper, "Eigenvalue problems for noncontinuous operators associated with quasilinear elliptic equations", *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **53**:2 (1974), 178–186.
18. И. В. Шрагин, "Условия измеримости суперпозиций", *Докл. АН СССР*, **197**:2 (1971), 295–298; англ. пер.: I. V. Shragin, "Conditions for measurability of superpositions", *Soviet Math. Dokl.*, **12** (1971), 465–470.

19. М. А. Красносельский, *Положительные решения операторных уравнений*, Физматгиз, М., 1962, 394 с.; англ. пер.: M. A. Krasnosel'skiĭ, *Positive solutions of operator equations*, P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1964, 381 pp.
20. Kung-ching Chang, "Free boundary problems and the set-valued mappings", *J. Differential Equations*, **49**:1 (1983), 1–28.
21. С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, 3-е изд., перераб. и доп., Наука, М., 1988, 334 с.; англ. пер.: S. L. Sobolev, *Some applications of functional analysis in mathematical physics*, Transl. Math. Monogr., **90**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, viii+286 pp.
22. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, 2-е изд., Наука, М., 1973, 576 с.; англ. пер. 1-го изд.: O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press, New York–London, 1968, xviii+495 pp.
23. В. Н. Павленко, "Управление сингулярными распределенными системами параболического типа с разрывными нелинейностями", *Укр. матем. журн.*, **46**:6 (1994), 729–736; англ. пер.: V. N. Pavlenko, "Control of singular distributed parabolic systems with discontinuous nonlinearities", *Ukrainian Math. J.*, **46**:6 (1994), 790–798.
24. Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, 2-е изд., испр. и доп., Либроком, М., 2011, 224 с.
25. H. J. Kuiper, W. R. Derrick, "Nonlinear ordinary and functional Sturm–Liouville problems", *Indiana Univ. Math. J.*, **25**:2 (1976), 179–190.
26. J. T. Schwartz, *Nonlinear functional analysis*, Notes on Mathematics and its Applications, Gordon and Breach Science Publishers, New York–London–Paris, 1969, vii+236 pp.

Вячеслав Николаевич Павленко
(Vyacheslav N. Pavlenko)
Челябинский государственный университет
E-mail: pavlenko@csu.ru

Поступило в редакцию
18.04.2021
07.02.2022

Дмитрий Константинович Потапов
(Dmitriy K. Potapov)
Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: d.potapov@spbu.ru