Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Асимптотическая оценка для тригонометрических сумм алгебраических сеток, *Чебышевский сб.*, 2020, том 21, выпуск 3, 232–240

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-21-3-232-240

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 3.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-232-240

Асимптотическая оценка для тригонометрических сумм алгебраических сеток[1]

Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва

Елена Михайловна Рарова — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: rarova82@mail.ru
Николай Николаевич Добровольский — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет; Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Ирина Юрьевна Реброва — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Аннотация

В работе продолжены исследования авторов по оценке тригонометрических сумм алгебраической сетки с весами с произвольной весовой функцией $r+1$ порядка.

Для параметра $\vec{m}$ тригонометрической суммы $S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m})$ выделены три случая.

Если $\vec{m}$ принадлежит алгебраической решётке $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$, то справедлива асимптотическая формула

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(t(m,\ldots,m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right).$$

Если $\vec{m}$ не принадлежит алгебраической решётке $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$, то определены два вектора $\vec{n}_\Lambda(\vec{m}) = (n_1,\ldots,n_s)$ и $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ из условий $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})\in\Lambda$, $\vec{m} = \vec{n}_\Lambda(\vec{m}) + \vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ и произведение $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) = \overline{n_1}\cdot\ldots\cdot\overline{n_s}$ минимально. Доказана асимптотическая оценка

$$|S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m})| \leqslant B_r\left(\frac{1-\delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{(q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})))^{r+1}} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right)\right).$$

Ключевые слова: алгебраические решётки, алгебраические сетки, тригонометрические суммы алгебраических сеток с весами, весовые функции.

Библиография: 8 названий.

Для цитирования:
Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва. Асимптотическая оценка для тригонометрических сумм алгебраических сеток // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 232–240.

[1]Работа подготовлена по гранту РФФИ №19-41-710004_р_а

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-232-240

Asymptotic estimation for trigonometric sums of algebraic grids[2]

E. M. Rarova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova

Elena Mikhailovna Rarova — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: rarova82@mail.ru
Nikolai Nikolaevich Dobrovol'skii — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University; Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Irina Yuryevna Rebrova — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Abstract

The paper continues the author's research on the evaluation of trigonometric sums of an algebraic net with weights with the arbitrary weight function of the $r+1$ order.

For the parameter $\vec{m}$ of the trigonometric sum $S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m})$, three cases are highlighted.

If $\vec{m}$ belongs to the algebraic lattice $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$, then the asymptotic formula is valid

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(t(m,\ldots,m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right).$$

If $\vec{m}$ does not belong to the algebraic lattice $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$, then two vectors are defined $\vec{n}_\Lambda(\vec{m}) = (n_1,\ldots,n_s)$ and $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ from the conditions $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})\in\Lambda$, $\vec{m} = \vec{n}_\Lambda(\vec{M}) + \vec{K}_\lambda(\vec{m})$ and the product $q(\vec{n}_\lambda(\vec{m})) = \overline{n_1}\cdot\ldots\cdot\overline{n_s}$ is minimal. Asymptotic estimation is proved

$$|S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m})| \leqslant B_r\left(\frac{1-\delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{(q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})))^{r+1}} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right)\right).$$

Keywords: algebraic lattices, algebraic net, trigonometric sums of algebraic net with weights, weight functions..

Bibliography: 8 titles.

For citation:

E. M. Rarova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, 2020, "Asymptotic estimation for trigonometric sums of algebraic grids" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 232–240.

Посвящается Николаю Михайловичу Добровольскому
по случаю его семидесятипятилетия

[2]The work has been prepared by the RFBR grant №19-41-710004_p_a

1. Введение

В данной работе используются обозначения и определения из работ [2]–[6].

Рассматриваются единичные $s-$мерные кубы

$$\overline{G}_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu \leqslant 1,\, \nu = 1,2,\ldots,s\}, \quad G_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu < 1,\, \nu = 1,2,\ldots,s\}.$$

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор $\{\vec{x}\}=(\{x_1\},\ldots,\{x_s\})$. Отсюда следует, что всегда $\{\vec{x}\} \in G_s$.

Далее везде под произвольной решеткой $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ мы будем понимать только полные решетки, то есть

$$\Lambda = \{m_1\vec{\lambda}_1 + \ldots + m_s\vec{\lambda}_s = \vec{m}\cdot A\,|\vec{m} = (\,m_1,\ldots,m_s) \in \mathbb{Z}^s\},$$

где $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1\,1},\ldots,\lambda_{1\,s})$,...,$\vec{\lambda}_s = (\lambda_{s\,1},\ldots,\lambda_{s\,s})$ — система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^s$, а матрица решётки A задана соотношениями

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{1\,1} & \ldots & \lambda_{1\,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s\,1} & \ldots & \lambda_{s\,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \vec{\lambda}_s \end{pmatrix}.$$

Взаимная решетка $\Lambda^* = \{\vec{x}\,|\,\forall\vec{y}\in\Lambda\ (\vec{x},\vec{y}) \in \mathbb{Z}\}$. Непосредственно из определения следует равенство $(q\Lambda)^* = \dfrac{1}{q}\Lambda^*$.

Определение 1. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$. Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1;1)^s$.*

Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda) = \{\vec{x}\,|\,\vec{x} = \{\vec{y}\},\vec{y} \in M_1(\Lambda)\}.$$

Определение 2. *Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=-1}^{0} \rho(\vec{x} + (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s)) = 1 \text{ } \textit{при } \vec{x} \in G_s, \tag{1}$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \textit{при} \quad \vec{x} \notin (-1;1)^s, \tag{2}$$

$$\left|\int_{-1}^{1}\!\!\ldots\!\int_{-1}^{1} \rho(\vec{x})e^{2\pi i(\vec{\sigma},\vec{x})}d\vec{x}\right| \leqslant B(\overline{\sigma}_1\ldots\overline{\sigma}_s)^{-r} \quad \textit{для любого} \quad \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^s. \tag{3}$$

Если выполнены условия (1) и (2), то говорим просто о весовой функции $\rho(\vec{x})$. Простейшим примером весовой функции является функция $\rho_1(\vec{x}) = \rho_1(x_1)\cdot\ldots\cdot\rho_1(x_s)$, где

$$\rho_1(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ 0, & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Пусть $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \tag{4}$$

неприводим над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и все корни $\Theta_\nu\,(\nu = 1,\ldots,s)$ многочлена (4) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1,\ldots,\Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \Theta_1 & \ldots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \ldots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1,\ldots,\Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t > 0$ решётка $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))=\left\{\vec{x}=\left(t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_1^{\nu-1}m_\nu,\ldots,t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_s^{\nu-1}m_\nu\right)=t\cdot\vec{m}\cdot T(\vec{a})\,\middle|\,\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\right\}.$$

Таким образом, алгебраическая решётка $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ имеет базис $\vec{\lambda}_\nu = t\cdot(\Theta_1^{\nu-1},\ldots,\Theta_s^{\nu-1})$ $(\nu = 1,\ldots,s)$. Нетрудно видеть, что $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))\cap\mathbb{Z}^s = \{t(m,\ldots,m)|m\in\mathbb{Z}\}$.

Совокупность $M\subset G_s$ точек $M_k = (\xi_1(k),\ldots,\xi_s(k))\quad(k = 1,\ldots,N)$ называется *сеткой* M из N узлов, а сами точки — *узлами квадратурной формулы.* Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные и являются значениями специальной весовой функции.

Лемма 1. *Для любого действительного σ выполняется неравенство*

$$\left|\int_{-1}^{1}(1-|x|)e^{2\pi i\sigma x}dx\right|\leqslant(\overline{\sigma})^{-2}, \tag{6}$$

где $\overline{\sigma} = \max(1,|\sigma|)$.

Доказательство. См. [7]. □

Лемма 2. *Пусть функция $\rho_r(x)$ определена равенствами*

$$\rho_r(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } |x|\geqslant 1,\\ 1-(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}\sum\limits_{\nu=0}^{r-1}C_{r-1}^{\nu}\dfrac{(-1)^\nu}{r+\nu}x^{r+\nu}, & \text{при } 0\leqslant x<1,\\ 1-(-1)^r(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}\sum\limits_{\nu=0}^{r-1}C_{r-1}^{\nu}\dfrac{1}{r+\nu}x^{r+\nu}, & \text{при } -1<x<0 \end{cases}. \tag{7}$$

Тогда для любого действительного числа σ и интеграла

$$I_r(\sigma) = \int_{-1}^{1}\rho_r(x)e^{2\pi i\sigma x}dx$$

выполняется оценка

$$|I_r(\sigma)|\leqslant\frac{B(r)}{\overline{\sigma}^{r+1}} \tag{8}$$

и функция $\rho_r(x)$ *— весовая функция порядка* $r+1$ *с константой* $B(r)$, *где*

$$B(r)=\frac{(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}}{\pi(2\pi)^r}\sup_{|\sigma|>1}\left|\big(P_{r-1}(1)e^{2\pi i\sigma}-P_{r-1}(0)\big)-\int\limits_0^1 P_{r-1,r}(x)e^{2\pi i\sigma x}dx\right|,$$

и при $0\leqslant\nu\leqslant r-1$ *имеем:*

$$\big(((1-x)x)^{r-1}\big)^{(\nu)}=((1-x)x)^{r-1-\nu}P_\nu(x),$$

где

$$P_0(x)=1,$$
$$P_{\nu+1}(x)=\nu(1-2x)P_\nu(x)+x(1-x)P'_\nu(x)\quad(\nu=0,\ldots,r-2),$$
$$P_{r-1}(x)=\sum_{\nu=0}^{r-1}(-1)^\nu C_{r-1}^\nu\prod_{k=0}^{r-2}(r-1+\nu-k)x^\nu,$$

и при $r\leqslant\nu\leqslant 2r-2$ *имеем:*

$$\big(((1-x)x)^{r-1}\big)^{(\nu)}=P_{r-1,\nu}(x),\quad P_{r-1,r}(x)=P'_{r-1}(x),$$
$$P_{r-1,\nu}(x)=\sum_{\mu=\nu+1-r}^{r-1}(-1)^\mu C_{r-1}^\mu\prod_{k=0}^{\nu-1}(r-1+\mu-k)x^{r-1+\mu-\nu}=$$
$$=P'_{r-1,\nu-1}(x)=P_{r-1}^{(\nu-r+1)}(x),$$
$$P_{r-1,2r-2}(x)=(-1)^{r-1}(2r-2)!.$$

Доказательство. См. [7]. $\square$

Для произвольных целых $m_1,\ldots,m_s$ суммы $S_{M,\vec\rho}(m_1,\ldots,m_s)$, определённые равенством

$$S_{M,\vec\rho}(m_1,\ldots,m_s)=\sum_{k=1}^N\rho_k e^{2\pi i[m_1\xi_1(k)+\ldots+m_s\xi_s(k)]},\tag{9}$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами.*

Пусть матрица $T=T(\vec a)$ и $t>0$. Рассмотрим алгебраическую сетку $M(t)=M'(t\cdot\Lambda(T))$ из $N'(t\cdot\Lambda(T))$ узлов $\vec x_k$ $(k=1,\ldots,N'(t\cdot\Lambda(T))\,)$ с весами

$$\rho_k=\rho_{\vec x_k}=(\det(t\cdot\Lambda(T)))^{-1}\sum_{\{\vec y\}=\vec x_k,\,\vec y\in M_1(t\cdot\Lambda(T))}\rho(\vec y)$$

и её тригонометрическую сумму с весами

$$S_{M(t),\vec\rho}(\vec m)=(\det(t\cdot\Lambda(T)))^{-1}\sum_{\vec x\in M(t)}\left(\sum_{\{\vec y\}=\vec x,\,\vec y\in M_1(t\cdot\Lambda(T))}\rho(\vec y)\right)e^{2\pi i(\vec m,\vec x)}.$$

Теорема 1. *Для алгебраической решётки* $\Lambda(t\cdot T(\vec a))$ *и произвольной весовой функции* $\rho(\vec x)$ *справедливо равенство*[3]

$$S_{M(t),\vec\rho}(\vec m)=\delta(\vec m)+\sum_{\vec x\in\Lambda(t\cdot T(\vec a))}{}^{'}\int\limits_{-1}^1\ldots\int\limits_{-1}^1\rho(\vec y)e^{2\pi i(\vec y,\vec m-\vec x)}d\vec y,\tag{10}$$

где

$$\delta(\vec m)=\begin{cases}1, & \text{при } \vec m=\vec 0;\\ 0, & \text{при } \vec m\neq\vec 0,\ \vec m\in\mathbb{Z}^s.\end{cases}$$

[3]Здесь и далее символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена нулевая точка.

Доказательство. См. [5]. □

С помощью леммы 1 доказываются следующие теоремы.

Теорема 2. *При $t \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{0}) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^2}\right). \tag{11}$$

Доказательство. См. [5]. □

Теорема 3. *При $t \to \infty$ для произвольного вектора $\vec{m} \neq \vec{0}$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{m}) = O\left(\frac{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^2\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^2}\right). \tag{12}$$

Доказательство. См. [5]. □

Цель данной работы — уточнить теорему 3.

2. Новые оценки тригонометрических сумм алгебраических сеток

Теорему 3 можно уточнить. Сначала мы это сделаем для векторов $\vec{m}$ специального вида: $\vec{m} = t(m,\ldots,m)$, где $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$.

Теорема 4. *Для любого целого $m \neq 0$ и натурального t справедливо равенство*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_r}(t(m,\ldots,m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right). \tag{13}$$

Доказательство. Действительно, если $\vec{m} = t(m,\ldots,m)$, и $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$, то по теореме 1 имеем:

$$S_{M(t),\vec{\rho}_r}(t(m,\ldots,m)) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))\setminus\{t(m,\ldots,m)\}} \int_{-1}^{1}\ldots\int_{-1}^{1}\rho_r(\vec{y})e^{2\pi i(\vec{y},\vec{x})}d\vec{y},$$

где $\{t(m,\ldots,m)\}$ — одноэлементное множество, состоящее из вектора $\vec{m} = t(m,\ldots,m)$. Так как при $\vec{x} = \vec{0}$ имеем:

$$\int_{-1}^{1}\ldots\int_{-1}^{1}\rho_r(\vec{y})e^{2\pi i(\vec{y},\vec{x})}d\vec{y} = 1,$$

то

$$S_{M(t),\vec{\rho}_r}(t(m,\ldots,m)) = 1 + \sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))\setminus\{t(m,\ldots,m)\}}{}' \int_{-1}^{1}\ldots\int_{-1}^{1}\rho_r(\vec{y})e^{2\pi i(\vec{y},\vec{x})}d\vec{y}.$$

Поэтому по лемме 2 получим

$$|S_{M(t),\vec{\rho}_r}(t(m,\ldots,m)) - 1| \leqslant B(r)\zeta_H(\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))|r+1) = O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right),$$

что и доказывает утверждение теоремы. □

Теперь рассмотрим случай, когда $\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ и, следовательно, $\vec{m} \neq t(m,\ldots,m)$ для любого $m \in \mathbb{Z}$.

Для решётки $\Lambda = \Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ определим два вектора $\vec{n}_\Lambda(\vec{m}) = (n_1,\ldots,n_s)$ и $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ из условий $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \in \Lambda$, $\vec{m} = \vec{n}_\Lambda(\vec{m}) + \vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ и произведение $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) = \overline{n_1}\cdot\ldots\cdot\overline{n_s}$ минимально. Ясно, что существует константа $C(\Lambda) \geqslant 1$ такая, что для любого вектора $\vec{m}$ имеем $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) \leqslant C(\Lambda)$.

Лемма 3. *Для любого действительного x справедливы неравенства*

$$\frac{1}{\overline{\overline{n-x}}} \leqslant \begin{cases} \frac{1}{2\overline{x}}, & \text{при } \overline{n-x} \geqslant 2\overline{x}, \\ \frac{1}{\overline{\overline{x}}}, & \text{при } 2\overline{x} > \overline{n-x} \geqslant \overline{x}, \\ \frac{2}{\overline{\overline{x}}}, & \text{при } \frac{\overline{x}}{2} \leqslant \overline{n-x} < \overline{x}, \\ \frac{2\overline{n}}{\overline{x}}, & \overline{n-x} < \frac{\overline{x}}{2}. \end{cases} \tag{14}$$

Доказательство. Первые три неравенства в (14) очевидны.

Перейдем к доказательству четвертого неравенства. Неравенство $\frac{1}{\overline{\overline{n-x}}} \leqslant \frac{2\overline{n}}{\overline{x}}$ эквивалентно неравенству $\overline{x} \leqslant 2\overline{n} \cdot \overline{n-x}$. При $|x| \leqslant 1$ это очевидно. Пусть $|x| > 1$, тогда $\frac{|x|}{2} \leqslant |n| \leqslant \frac{3|x|}{2}$. Отсюда следует, что $2\overline{n} \geqslant |x|$ и лемма полностью доказана. □

Теорема 5. *При $t \to \infty$ для произвольного вектора $\vec{m} \neq \vec{0}$ и $\vec{m} \notin \Lambda$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_r}(\vec{m}) \leqslant B(r) \begin{cases} \frac{1}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1} \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right), & \text{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \neq \vec{0}, \\ O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1} \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right), & \text{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) = \vec{0}. \end{cases} \tag{15}$$

Доказательство. Действительно, согласно теореме 1 и лемме 2 имеем:

$$\left|S_{M(t),\vec{\rho}_r}(\vec{m})\right| \leqslant B(r) \sum_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))}' \frac{1}{(\overline{m_1 - x_1} \ldots \overline{m_s - x_s})^{r+1}}.$$

Если $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) = \vec{0}$, то

$$\sum_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))}' \frac{1}{(\overline{m_1 - x_1} \ldots \overline{m_s - x_s})^{r+1}} = \sum_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))}' \frac{1}{(\overline{n_1 - x_1} \ldots \overline{n_s - x_s})^{r+1}}.$$

Если $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \neq \vec{0}$, то

$$\sum_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))}' \frac{1}{(\overline{m_1 - x_1} \ldots \overline{m_s - x_s})^{r+1}} = \frac{1}{(\overline{n_1} \ldots \overline{n_s})^{r+1}} + \sum_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a})) \setminus \{-\vec{k}_\Lambda(\vec{m})\}}' \frac{1}{(\overline{n_1 - x_1} \ldots \overline{n_s - x_s})^{r+1}}.$$

Для простоты изложения воспользуемся неравенством (14) в наиболее слабой форме $\frac{1}{\overline{\overline{n-x}}} \leqslant \frac{2\overline{n}}{\overline{x}}$, получим

$$\left|S_{M(t),\vec{\rho}_r}(\vec{m})\right| \leqslant B(r) \left(\frac{1 - \delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}} + \sum_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))}' \frac{2^{s(r+1)}(\overline{n_1} \ldots \overline{n_s})^{r+1}}{(\overline{x_1} \ldots \overline{x_s})^{r+1}}\right) =$$

$$= B(r) \left(\frac{1 - \delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}} + 2^{s(r+1)}(q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})))^{r+1} \zeta(\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))|r+1)\right).$$

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 11, получим доказываемое утверждение. □

3. Заключение

Лемма 3 содержит определенный потенциал, чтобы усилить теорему 5, но это потребует дополнительного исследования. Кроме этого возникает вопрос о возможности переноса методов работы [1] на получение усиленных асимптотических оценок рассматриваемых тригонометрических сумм алгебраических сеток.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. Н. Добровольский. О двух асимптотических формулах в теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник. 2018. Т. 21, вып. 3, С. 109–134.

2. Рарова Е. М. Разложение тригонометрической суммы сетки с весами в ряд по точкам решетки // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 1. Ч. 1. С. 37–49.

3. Рарова Е. М. Тригонометрические суммы сетки с весами для целочисленной решётки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. № 3. С. 34–39.

4. Рарова Е. М. Тригонометрические суммы алгебраических сеток // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения Материалы XIII Международной конференции, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тульский государственный педагогичекий университет им. Л. Н. Толстого. 2015. С. 356–359.

5. Рарова Е. М. О взвешенном числе точек алгебраической сетки // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 200–219.

6. Е. М. Рарова. Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 399–405.

7. Ребров Е. Д. Квадратурные формулы с модифицированными алгебраическими сетками // Чебышевский сборник 2012 Т. 13, вып. 3(43). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 53–90.

8. Реброва И. Ю., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Балаба И. Н., Есаян А. Р., Басалов Ю. А. Теоретико-числовой метод в приближённом анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК»: Моногр. В 2 ч. Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. – Ч. I. – 232 с.

REFERENCES

1. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "On two asymptotic formulas in the theory of hyperbolic Zeta function of lattices" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 109–134.

2. Rarova E. M., 2014, "Decomposition of the trigonometric sum of a grid with weights in a series by lattice points" , *Proceedings of Tula state University. Natural science*, vol. 1, part 1, pp. 37–49.

3. Rarova E. M., 2014, "Trigonometric grid sums with weights for integer lattice" , *Proceedings of Tula state University. Natural science*, № 3, pp. 34–39.

4. Rarova E. M., 2015, "Trigonometric sums of algebraic nets" , *In the collection: Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications Proceedings of the XIII International conference dedicated to the eighty-fifth anniversary of the birth of Professor Sergei Sergeevich Ryshkov. Tula state pedagogical University. L. N. Tolstoy*, pp. 356–359.

5. Rarova E. M., 2018, "Weighted number of points of algebraic net" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 200–219.

6. E. M. Rarova, 2019, "Trigonometric sums of nets of algebraic lattices" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 399–405.

7. Rebrov E. D. 2012, "Quadrature formulas with modified algebraic grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 13, no. 3(43), pp. 53 — 90.

8. Rebrova I. Yu., Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Balaba I. N., Yesayan A. R., Basalov Yu. A. numerical Theoretic method in approximate analysis and its implementation in POIVS "TMK": Monogr. In Under 2 hours. ed. — Tula: Publishing house of Tula. state PED. UN-TA im. L. N. Tolstoy, 2016. – Part I. – 232 p.

Получено 28.05.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.