В. Ф. Колчин, В. И. Хохлов, О числе циклов в случайном неравновероятном графе, *Дискрет. матем.*, 1990, том 2, выпуск 3, 137–145

Дискретная математика

том 2 выпуск 3 * 1990

УДК 519.21

О ЧИСЛЕ ЦИКЛОВ В СЛУЧАЙНОМ НЕРАВНОВЕРОЯТНОМ ГРАФЕ

В. Ф. Колчин, В. И. Хохлов

Рассматривается неравновероятный случайный граф $G_{n,N}$ с n занумерованными вершинами и N ребрами, который получается в результате N независимых испытаний. В каждом испытании в графе проводится одно ребро: оно соединяет вершины i и j с вероятностью $2p_ip_j$ или образует петлю в вершине i с вероятностью p_i^2, $i, j=1, \ldots, n$, $p_1, \ldots, p_n \geqslant 0$, $p_1+\ldots+p_n=1$.

Основным результатом статьи является следующее утверждение.

Предположим, что $p_i=a_i/n$, где $a_i=a_i(n)$, $0<\varepsilon\leqslant a_i\leqslant E<\infty$, $i=1, \ldots, n$, а ε и E — некоторые постоянные, и пусть существует предел

$$a^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2.$$

Тогда если $n, N\to\infty$ так, что $2N/n\to\lambda$, и $\lambda a^2<1$, то распределение числа циклов в графе сходится к распределению Пуассона с параметром $\Lambda=-\frac{1}{2}\ln(1-\lambda a^2)$.

§ 1. Формулировка основных результатов

Среди большого числа работ о случайных графах (обширная библиография содержится в [1—3]) всего несколько статей посвящено случайным графам, которые принимают значения из множества своих возможных значений с неравными вероятностями [4—6]. Однако устойчивость результатов, полученных для моделей при условии строгой равновероятности, бесспорно, требует изучения. Во многих случаях было бы полезно знать, как меняются результаты при нарушении условия равновероятности, какой уровень отклонений можно считать пренебрежимым и сохраняющим результаты, справедливые в равновероятном случае.

В настоящей работе изучается важная характеристика графа, равная числу циклов. Для многих моделей равновероятных графов при соотношениях между параметрами, при которых с вероятностью, стремящейся к единице, в графе нет гигантской компоненты, число циклов имеет в пределе распределение Пуассона. Так, в [7] отмечено, что для случайного равновероятного графа с n вершинами и N ребрами методом моментов можно показать, что число циклов $\alpha_{n,N}$ имеет в пределе при $n, N\to\infty$, $2N/n\to\lambda$, $0<\lambda<1$, распределение Пуассона с параметром $-\frac{1}{2}\ln(1-\lambda)-\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda^2}{4}$. Аналогичный результат для случайного графа с n вершинами, в котором каждое ребро присутствует независимо от остальных с вероятностью $p=\lambda/n$, $0<\lambda<1$, доказан в [8].

В настоящей работе рассматривается неравновероятный граф $G_{n,N}$ с n вершинами, занумерованными числами $1, 2, \ldots, n$, и N ребрами, который получается с помощью следующей процедуры. Производится N независимых испытаний, при каждом из которых в графе случайно размещается одно ребро. Оно может соединить две различные вершины или образовать петлю, вершины с номерами i и j соединяются при этом с вероятностью $2p_ip_j$, петля в вершине i образуется с вероятностью p_i^2, $i, j=1, \ldots, n$, $p_1, \ldots, p_n\geqslant 0$, $p_1+\ldots+p_n=1$. Таким образом, после N испытаний получается реализация случайного графа $G_{n,N}$, который, вообще говоря, имеет петли и параллельные ребра.

Основным результатом этой статьи является следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что* $p_i=a_i/n$, *где* $a_i=a_i(n)$, $0<\varepsilon\leqslant a_i\leqslant\leqslant E<\infty$, $i=1, \ldots, n$, *а* ε *и* E — *некоторые постоянные, и пусть существует предел*

$$a^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2.$$

Тогда, если $n, N\to\infty$ *так, что* $2N/n\to\lambda$ *и* $\lambda a^2<1$, *то распределение числа циклов* $\alpha_{n,N}$ *в графе* $G_{n,N}$ *сходится к распределению Пуассона с параметром* $\Lambda=-\frac{1}{2}\ln(1-\lambda a^2)$.

При доказательстве этой теоремы получено предельное распределение случайной величины α_r, равной числу циклов длины r в графе $G_{n,N}$, а также совместное предельное распределение величин $\alpha_{r_1}, \ldots, \alpha_{r_s}$.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 без требования* $\lambda a^2<1$ *случайная величина* α_r *при любом фиксированном* $r\geqslant 1$ *имеет в пределе распределение Пуассона с параметром* $\lambda_r=\lambda^r a^{2r}/(2r)$.

Теорема 3. *В условиях теоремы 1 без требования* $\lambda a^2<1$ *совместное распределение случайных величин* $\alpha_{r_1}, \ldots, \alpha_{r_s}$ *при любых фиксированных* $1\leqslant r_1<\ldots<r_s$ *сходится к распределению* s *независимых случайных величин, распределенных по законам Пуассона с параметрами* $\lambda_{r_1}, \ldots, \lambda_{r_s}$ *соответственно.*

Доказательство проводится методом моментов. При реализации этого трудоемкого подхода возникает естественное желание опустить громоздкие выкладки. Этим, по-видимому, объясняется то, что даже в равновероятном случае полное доказательство с использованием метода моментов опубликовано не было. Поэтому в следующем параграфе мы приводим достаточно подробные доказательства.

§ 2. Доказательство основных результатов

Обозначим α_r число циклов без самопересечений длины r, $r\geqslant 3$, в случайном графе $G_{n,N}$. Дадим более точное определение этой величины. Для r различных вершин $i_1, \ldots, i_r$ положим $\xi_{i_1\ldots i_r}=1$, если в $G_{n,N}$ существует цикл, составленный из этих r вершин и содержащий ровно r ребер графа $G_{n,N}$ (такие циклы будем называть циклами без самопересечений), в остальных случаях положим $\xi_{i_1\ldots i_r}=0$. Тогда

$$\alpha_r=\sum_{\{i_1,\ldots,i_r\}}\xi_{i_1\ldots i_r}, \tag{1}$$

где суммирование проводится по всем C_N^r различным неупорядоченным наборам r различных индексов. В полном графе с вершинами $i_1, \ldots, i_r$ существует $(r-1)!/2$ различных циклов, содержащих ровно r ребер. Занумеруем эти циклы в каком-либо порядке числами $j=1, \ldots, (r-1)!/2$ и представим случайную величину $\xi_{i_1 \ldots i_r}$ в виде суммы индикаторов:

$$\xi_{i_1 \ldots i_r} = \sum_{j=1}^{(r-1)!/2} \xi^{(j)}_{i_1 \ldots i_r}, \tag{2}$$

где $\xi^{(j)}_{i_1 \ldots i_r} = 1$, если j-й (при выбранной нумерации) цикл существует в $G_{n,N}$, и $\xi^{(j)}_{i_1 \ldots i_r} = 0$ в остальных случаях.

В статье изучается случайная величина

$$\alpha_{n,N} = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,$$

где величины α_r при $r \geqslant 3$ определены равенствами (1) и (2), α_1 есть число петель, а α_2 — число пар параллельных ребер в $G_{n,N}$.

Каждый цикл в графе $G_{n,N}$ можно рассматривать как множество ребер, образующих этот цикл, поэтому для вычисления вероятностей вида $\mathsf{P}\{\xi^{(j)}_{i_1 \ldots i_r} = 1\}$ требуется следующее утверждение. Пусть $V_r = \{(i_1, j_1), \ldots, (i_r, j_r)\}$ — множество r различных пар вершин графа $G_{n,N}$, причем $i_k \neq j_k$, $k = 1, \ldots, r$. Обозначим $P(V_r)$ вероятность того, что в $G_{n,N}$ существуют все ребра из V_r.

Лемма 1. *Если $n, N \to \infty$, $2N/n \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, $0 < \varepsilon \leqslant a_i \leqslant E < \infty$, $i = 1, \ldots, n$, то при любых фиксированных ε, E, r*

$$P(V_r) = \frac{\lambda^r}{n^r} a_{i_1} a_{j_1} \ldots a_{i_r} a_{j_r} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{3}$$

равномерно относительно $a_1, \ldots, a_n$ в указанных границах и всех множеств V_r.

Кроме того, для любого $\delta > 0$ существует такая постоянная c, что для всех r и n

$$P(V_r) \leqslant c \frac{(\lambda + \delta)^r}{n^r} a_{i_1} a_{j_1} \ldots a_{i_r} a_{j_r}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим $q_k = 2p_{i_k} p_{j_k}$, $k = 1, \ldots, r$. Тогда

$$P(V_r) = \sum_{m_1, \ldots, m_r \geqslant 1} \frac{N^{[m_1 + \ldots + m_r]}}{m_1! \ldots m_r!} q_1^{m_1} \ldots q_r^{m_r} (1 - q_1 - \ldots - q_r)^{N - m_1 - \ldots - m_r} =$$

$$= N^{[r]} q_1 \ldots q_r \Big((1 - q_1 - \ldots - q_r)^{N-r} +$$

$$+ \sum{}' \frac{(N-r)^{[m_1 + \ldots + m_r - r]}}{m_1! \ldots m_r!} q_1^{m_1 - 1} \ldots q_r^{m_r - 1} (1 - q_1 - \ldots - q_r)^{N - m_1 - \ldots - m_r} \Big). \tag{5}$$

Здесь и ниже $x^{[m]} = x(x-1) \ldots (x - m + 1)$, суммирование в $\sum'$ проводится по всем наборам $m_1, \ldots, m_r$, в которых $m_1, \ldots, m_r \geqslant 1$ и $m_i > 1$ хотя бы для одного i, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Ясно, что

$$(1 - q_1 - \ldots - q_r)^{N-r} \leqslant 1$$

и для любого фиксированного r

$$(1 - q_1 - \ldots - q_r)^{N-r} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{6}$$

Кроме того,

$$\sum{}' \frac{(N-r)^{[m_1 + \ldots + m_r - r]}}{m_1! \ldots m_r!} q_1^{m_1 - 1} \ldots q_r^{m_r - 1} (1 - q_1 - \ldots - q_r)^{N - m_1 - \ldots - m_r} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{r} q_i (N - r) S_i, \tag{7}$$

где

$$S_i = \sum_{\substack{m_1, \ldots, m_r \geqslant 1 \\ m_i > 1}} \frac{(N - r - 1)^{[m_1 + \ldots + m_r - r - 1]}}{m_1! \ldots m_r!} \frac{q_1^{m_1 - 1} \ldots q_r^{m_r - 1}}{q_i} (1 - q_1 - \ldots - q_r)^{N - m_1 - \ldots - m_r}.$$

Положим $l_i = m_i - 2$, $l_j = m_j - 1$, $j \neq i$. Тогда

$$S_i = \sum_{l_1, \ldots, l_r \geqslant 0} \frac{(N-r-1)^{[l_1+\ldots+l_r]}}{(l_1+1)!\ldots(l_i+2)!\ldots(l_r+1)!} q_1^{l_1}\ldots q_r^{l_r} (1-q_1-\ldots-q_r)^{N-r-1-l_1-\ldots-l_r} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l_1, \ldots, l_r \geqslant 0} \frac{(N-r-1)^{[l_1+\ldots+l_r]}}{l_1!\ldots l_r!} q_1^{l_1} \ldots q_r^{l_r} (1-q_1-\ldots-q_r)^{N-r-1-l_1-\ldots-l_r} = 1. \tag{8}$$

Теперь утверждение (3) следует из (5), (6), (7) и (8), а утверждение (4) — из (5), (7) и (8), поскольку

$$\sum_{i=1}^{r} q_i (N-r) \leqslant \frac{2NrE^2}{n^2},$$

$$N^{[r]} q_1 \ldots q_r \leqslant \frac{(2N)^r}{n^{2r}} a_{i_1} a_{j_1} \ldots a_{i_r} a_{j_r}.$$

Следствие 1. *Если $n, N \to \infty$, $2N/n \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, $0 < \varepsilon \leqslant a_i \leqslant \leqslant E < \infty$, $i = 1, \ldots, n$, то для любых фиксированных ε, E, λ и r*

$$\mathsf{P}\{\xi_{i_1\ldots i_r}^{(j)} = 1\} = \frac{\lambda^r}{n^r} a_{i_1}^2 \ldots a_{i_r}^2 \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

равномерно относительно j, $1 \leqslant j \leqslant (r-1)!/2$, всех наборов $\{i_1, \ldots, i_r\}$ и $a_1, \ldots, a_n$ в указанных границах.

Кроме того, для любого $\delta > 0$ существует такая постоянная c, что для всех r и n

$$\mathsf{P}\{\xi_{i_1\ldots i_r}^{(j)} = 1\} \leqslant c \frac{(\lambda+\delta)^r}{n^r} a_{i_1}^2 \ldots a_{i_r}^2.$$

Доказательство. Для справедливости равенства $\xi_{i_1\ldots i_r}^{(j)} = 1$ необходимо и достаточно, чтобы в $G_{n,N}$ существовало r фиксированных ребер $\{(k_1, j_1), \ldots, (k_r, j_r)\}$, $k_\nu \neq j_\nu$, $\nu = 1, \ldots, r$, образующих j-й цикл с вершинами $i_1, \ldots, i_r$. Для этих ребер множества $\{k_1, \ldots, k_r\}$ и $\{j_1, \ldots, j_r\}$ совпадают с множеством $\{i_1, \ldots, i_r\}$. Поэтому, применяя лемму 1, приходим к утверждению следствия.

Запись $\{i_1, \ldots, i_r\}$ означает неупорядоченный набор различных индексов $i_1, \ldots, i_r$, число таких наборов C_n^r. Для упорядоченных наборов различных индексов $i_1, \ldots, i_r$ будем использовать обозначение $\langle i_1, \ldots, i_r \rangle$, число таких наборов равно $n^{[r]}$. Символы

$$\sum_{\{i_1, \ldots, i_r\}}, \quad \sum_{\langle i_1, \ldots, i_r \rangle}$$

будем использовать для обозначения суммирования, соответственно, по всем различным неупорядоченным и упорядоченным наборам r различных индексов. Ясно, что суммирование по всем неупорядоченным наборам $\{i_1, \ldots, i_r\}$ имеет смысл для слагаемых $f_{i_1\ldots i_r}$, значения которых инвариантны относительно перестановок индексов. Для таких слагаемых

$$\sum_{\langle i_1, \ldots, i_r \rangle} f_{i_1\ldots i_r} = r! \sum_{\{i_1, \ldots, i_r\}} f_{i_1\ldots i_r}, \tag{9}$$

и кроме того,

$$\sum_{\langle i_1^{(1)}, \ldots, i_r^{(1)} \rangle, \ldots, \langle i_1^{(k)}, \ldots, i_r^{(k)} \rangle} f_{i_1^{(1)}\ldots i_r^{(1)}\ldots i_1^{(k)}\ldots i_r^{(k)}} = \sum_{\langle j_1, \ldots, j_{rk} \rangle} f_{j_1\ldots j_{rk}}, \tag{10}$$

если суммирование в левой части проводится по всем различным упорядоченным наборам r-мерных индексов вида $i_1^{(1)}, \ldots, i_r^{(k)}$, причем все индексы $i_1^{(1)}, \ldots, i_r^{(k)}$ различны.

Лемма 2. *Если* $0<\varepsilon\leqslant a_i\leqslant E<\infty$, $i=1,\ldots,n$, *то для любого фиксированного* r *при* $n\to\infty$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^r=\sum_{\langle i_1,\ldots,i_r\rangle}a_{i_1}^2\ldots a_{i_r}^2\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{11}$$

Доказательство. Справедливо представление

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^r=\sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n}a_{i_1}^2\ldots a_{i_r}^2=\sum_{\langle i_1,\ldots,i_r\rangle}a_{i_1}^2\ldots a_{i_r}^2+\sum_{\langle i_1,\ldots,i_r\rangle}^{*}a_{i_1}^2\ldots a_{i_r}^2,$$

где, как было условлено, в первой сумме суммирование проводится по всем различным упорядоченным наборам различных индексов, а в сумме со звездочкой суммирование проводится по всем различным упорядоченным наборам, в каждом из которых имеется хотя бы два одинаковых индекса. Число слагаемых в первой сумме равно $n^{[r]}$, а во второй $n^r-n^{[r]}$ и не превосходит c_rn^{r-1}, где постоянная c_r зависит только от r. Поэтому

$$\sum_{\langle i_1,\ldots,i_r\rangle}a_{i_1}^2\ldots a_{i_r}^2\geqslant n^{[r]}\varepsilon^{2r},\qquad \sum_{\langle i_1,\ldots,i_r\rangle}^{*}a_{i_1}^2\ldots a_{i_r}^2\leqslant c_rn^{r-1}E^{2r},$$

откуда следует утверждение леммы.

Следствие 2. *В условиях теоремы* 2 *для любого фиксированного* $r\geqslant 3$

$$\mathsf{M}\alpha_r\to\frac{\lambda^ra^{2r}}{2r}.$$

Кроме того, для любого $\delta>0$ *найдется такая постоянная* c, *что*

$$\mathsf{M}\alpha_r\leqslant c\,\frac{(\lambda+\delta)^r(a^2+\delta)^{2r}}{2r}.$$

Доказательство. Используя представления (1) и (2), с помощью (9), следствия 1 и леммы 2 находим, что

$$\mathsf{M}\alpha_r=\frac{(r-1)!}{2}\frac{\lambda^r}{n^r}\sum_{\{i_1,\ldots,i_r\}}a_{i_1}^2\ldots a_{i_r}^2\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$
$$=\frac{(r-1)!\,\lambda^r}{2n^rr!}\sum_{\langle i_1,\ldots,i_r\rangle}a_{i_1}^2\ldots a_{i_r}^2\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$
$$=\frac{\lambda^r}{2r}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^r(1+o(1))=\frac{\lambda^ra^{2r}}{2r}(1+o(1)).$$

Второе утверждение вытекает непосредственно из неравенства следствия 1.

Перейдем теперь к вычислению факториальных моментов α_r. Если

$$\alpha=\xi_1+\ldots+\xi_n,$$

где $\xi_1,\ldots,\xi_n$ принимают лишь значения 0 и 1, то

$$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+1)=\sum_{\langle k_1,\ldots,k_m\rangle}\xi_{k_1}\ldots\xi_{k_m}, \tag{12}$$

где суммирование проводится по всем различным упорядоченным наборам m различных индексов.

В нашем случае индексы имеют сложное строение, так как

$$\alpha_r=\sum_{\{i_1,\ldots,i_r\}}\sum_{j=1}^{(r-1)!/2}\xi_{i_1\ldots i_r}^{(j)}.$$

Аналогом (12) будет представление

$$\alpha_r(\alpha_r-1)\ldots(\alpha_r-m+1)=\sum\xi_{i_1^{(1)}\ldots i_r^{(1)}}^{(j_1)}\ldots\xi_{i_1^{(m)}\ldots i_r^{(m)}}^{(j_m)}, \tag{13}$$

где суммирование проводится по всем различным упорядоченным наборам

$$\langle(\{i_1^{(1)}, \ldots, i_r^{(1)}\}, j_1), \ldots, (\{i_1^{(m)}, \ldots, i_r^{(m)}\}, j_m)\rangle$$

различных индексов, каждый из которых имеет вид $(\{i_1, \ldots, i_r\}, j)$, внутри индекса набор $\{i_1, \ldots, i_r\}$ рассматривается как неупорядоченный набор различных индексов, а j указывает номер цикла, построенного из вершин $i_1, \ldots, i_r$.

Покажем, что в условиях теоремы 2 для любого фиксированного r и любого фиксированного $m \geqslant 1$

$$\mathsf{M}\alpha_r^{[m]} \to \left(\frac{\lambda^r a^{2r}}{2r}\right)^m. \tag{14}$$

Для $m=1$ это утверждение содержится в следствии 2.

Чтобы привыкнуть к сложным обозначениям, рассмотрим вначале случай $m=2$. В силу (13)

$$\mathsf{M}\alpha_r^{[2]} = \sum_{\langle(\{i_1^{(1)},\ldots, i_r^{(1)}\}, j_1), (\{i_1^{(2)},\ldots, i_r^{(2)}\}, j_2)\rangle} \mathsf{P}\left\{\xi^{(j_1)}_{i_1^{(1)}\ldots i_r^{(1)}} = \xi^{(j_2)}_{i_1^{(2)}\ldots i_r^{(2)}} = 1\right\}.$$

Разобьем сумму из правой части этого равенства на две суммы. В первую сумму $\sum_1$ включим слагаемые с непересекающимися множествами $\{i_1^{(1)}, \ldots, i_r^{(1)}\}$ и $\{i_1^{(2)}, \ldots, i_r^{(2)}\}$. Учитывая, что в этом случае для равенства единице случайных величин $\xi^{(j_1)}_{i_1^{(1)}\ldots i_r^{(2)}}$ и $\xi^{(j_2)}_{i_1^{(2)}\ldots i_r^{(2)}}$ должны существовать $2r$ ребер, и применяя лемму 1, находим, что

$$\mathsf{P}\left\{\xi^{(j_1)}_{i_1^{(1)}\ldots i_r^{(1)}} = 1,\ \xi^{(j_2)}_{i_1^{(2)}\ldots i_r^{(2)}} = 1\right\} = \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{2r} a^2_{i_1^{(1)}} \ldots a^2_{i_r^{(1)}} a^2_{i_1^{(2)}} \ldots a^2_{i_r^{(2)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Поэтому

$$\sum\nolimits_1 = \left(\frac{(r-1)!}{2}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{2r} \sum_{\langle\{i_1^{(1)},\ldots, i_r^{(1)}\}, \{i_1^{(2)},\ldots, i_r^{(2)}\}\rangle} a^2_{i_1^{(1)}}\ldots a^2_{i_r^{(1)}} a^2_{i_1^{(2)}}\ldots a^2_{i_r^{(2)}} \times \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Ясно, что в силу (9) и (10)

$$\sum_{\langle\{i_1^{(1)},\ldots, i_r^{(1)}\}, \{i_1^{(2)},\ldots, i_r^{(2)}\}\rangle} a^2_{i_1^{(1)}}\ldots a^2_{i_r^{(1)}} a^2_{i_1^{(2)}}\ldots a^2_{i_r^{(2)}} = \frac{1}{(r!)^2} \sum_{\langle i_1,\ldots, i_{2r}\rangle} a^2_{i_1}\ldots a^2_{i_{2r}}.$$

Поэтому в силу леммы 2

$$\sum\nolimits_1 = \left(\frac{(r-1)!}{2}\right)^2 \frac{\lambda^{2r}}{(r!)^2} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^r (1 + o(1)) = \left(\frac{\lambda^r a^{2r}}{2r}\right)^2 (1 + o(1)). \tag{15}$$

Покажем, что оставшаяся сумма $\sum_2$ стремится к нулю.

Суммирование в $\sum_2$ проводится по парам сложных индексов, у которых множества $\{i_1^{(1)}, \ldots, i_r^{(1)}\}$ и $\{i_1^{(2)}, \ldots, i_r^{(2)}\}$ имеют хотя бы один общий элемент. Каждому из сложных индексов вида $(\{i_1, \ldots, i_r\}, j)$ соответствует цикл в полном графе из n вершин, составленный из r ребер и вершин $i_1, \ldots, i_r$. Два цикла, соответствующие индексам $(\{i_1^{(1)}, \ldots, i_r^{(1)}\}, j_1)$ и $(\{i_1^{(2)}, \ldots, i_r^{(2)}\}, j_2)$, могут иметь $M < 2r$ различных вершин и L различных ребер. Разобьем сумму $\sum_2$ на суммы $\sum_{M, L}$, содержащие слагаемые с фиксированными значениями параметров L и M. Число таких сумм не превосходит $(2r)^2$, поэтому достаточно показать, что сумма с произвольными значениями L и M стремится к нулю. Нетрудно видеть, что в случае, когда $M < 2r$, справедливо неравенство $L \geqslant M + 1$. Число слагаемых в сумме $\sum_{M, L}$ не превышает n^M, а вероятность появления L фиксированных ребер в $G_{n, N}$

не превосходит в силу (4) величины cn^{-L}. Отсюда следует, что

$$\sum\nolimits_{M,\,L} \leqslant \frac{c}{n^{L-M}} \leqslant \frac{c}{n}. \tag{16}$$

Поэтому при $n \to \infty$

$$\sum\nolimits_2 \to 0. \tag{17}$$

Утверждение (14) следует для $m=2$ из (15) и (17).

Рассмотрим теперь факториальный момент произвольного порядка m. По формуле (13)

$$\mathsf{M}\alpha_r^{[m]} = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2,$$

где в сумму $\sum_1$ включены только те слагаемые, у которых никакие два множества из множеств $\{i_1^{(1)}, \ldots, i_r^{(1)}\}, \ldots, \{i_1^{(m)}, \ldots, i_r^{(m)}\}$ не имеют общих элементов. Учитывая, что в этом случае для равенства единице соответствующих случайных величин в графе $G_{n,\,N}$ должно существовать rm ребер, и применяя лемму 1, находим, что

$$\mathbf{P}\left\{\xi^{(j_1)}_{i_1^{(1)}\ldots i_r^{(1)}} = 1, \ \ldots, \ \xi^{(j_m)}_{i_1^{(m)}\ldots i_r^{(m)}} = 1\right\} = \\ = \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{mr} a^2_{i_1^{(1)}} \ldots a^2_{i_r^{(1)}} \ldots a^2_{i_1^{(m)}} \ldots a^2_{i_r^{(m)}} (1+o(1)),$$

и в силу (9) и леммы 2

$$\sum\nolimits_1 = \left(\frac{\lambda^r a^{2r}}{2r}\right)^m (1+o(1)). \tag{18}$$

Остается показать, что сумма $\sum_2$, где суммирование проводится по оставшимся наборам индексов, стремится к нулю. Суммирование в $\sum_2$ ведется по m наборам сложных индексов, у которых хотя бы у одной пары множеств $\{i_1^{(p)}, \ldots, i_r^{(p)}\}, \{i_1^{(q)}, \ldots, i_r^{(q)}\}$, $p \neq q$, имеется хотя бы один общий элемент. Как и ранее, каждому сложному индексу отвечает цикл в полном графе с n вершинами. Циклы, соответствующие m индексам, могут содержать M различных вершин и L различных ребер. Разобьем сумму $\sum_2$ на суммы $\sum_{M,\,L}$ с фиксированными значениями M и L у слагаемых. Число таких сумм не превосходит $(rm)^2$, поэтому достаточно показать, что сумма с произвольными M и L стремится к нулю. Очевидно, что если $M < rm$, то для параметров L и M справедливо неравенство $L \geqslant M+1$. Таким образом, поскольку число слагаемых не превосходит n^M, а вероятность появления L фиксированных ребер в силу (3) не превосходит величины cn^{-L}, справедлива оценка

$$\sum\nolimits_{M,\,L} \leqslant \frac{c}{n^{L-M}} \leqslant \frac{c}{n},$$

Поэтому при $n \to \infty$

$$\sum\nolimits_{M,\,L} \to 0. \tag{19}$$

Утверждение (14) следует из (18) и (19).

В силу (14) предельным распределением для α_r, $r \geqslant 3$, служит распределение Пуассона с параметром $\lambda_r = \lambda^r a^{2r}/(2r)$. Нетрудно видеть, что в рассматриваемой схеме число петель α_1 и число пар параллельных ребер α_2 имеют в пределе распределения Пуассона с параметрами $\lambda_1 = \lambda a^2/2$ и $\lambda_2 = \lambda^2 a^4/4$ соответственно.

Теорема 2 доказана.

Аналогично доказывается и более общая теорема 3. Достаточно показать, что в условиях теоремы для любых натуральных фиксированных $m_1, \ldots, m_s$

$$\mathsf{M}\alpha_{r_1}^{[m_1]}\alpha_{r_2}^{[m_2]} \ldots \alpha_{r_s}^{[m_s]} \to \lambda_{r_1}^{m_1}\lambda_{r_2}^{m_2} \ldots \lambda_{r_s}^{m_s},$$

где

$$\lambda_r = \frac{\lambda^r a^{2r}}{2r}.$$

Согласно (13)

$$\alpha_{r_k}^{[m_k]} = \sum_{\langle (I_1^{(k)},\, j_1^{(k)}),\, \ldots,\, (I_{m_k}^{(k)},\, j_{m_k}^{(k)}) \rangle} \xi_{I_1^{(k)}}^{(j_1^{(k)})} \ldots \xi_{I_{m_k}^{(k)}}^{(j_{m_k}^{(k)})},$$

где

$$I_l^{(k)} = \{i_1^{(l,\,k)}, \ldots, i_{r_k}^{(l,\,k)}\} \qquad (l = 1, \ldots, m_k,\ k = 1, \ldots, s)$$

— неупорядоченные наборы r_k вершин и $j_l^{(k)}$ $(l = 1, \ldots, m_k, k = 1, \ldots, s)$ — номера циклов длины r_k при выбранной нумерации.

Поэтому

$$\mathsf{M}\alpha_{r_1}^{[m_1]} \ldots \alpha_{r_s}^{[m_s]} = \\ = \sum_{I} \mathsf{P}\left\{\xi_{I_1^{(1)}}^{(j_1^{(1)})} = 1, \ldots, \xi_{I_{m_1}^{(1)}}^{(j_{m_1}^{(1)})} = 1, \ldots, \xi_{I_1^{(s)}}^{(j_1^{(s)})} = 1, \ldots, \xi_{I_{m_s}^{(s)}}^{(j_{m_s}^{(s)})} = 1\right\},$$

где

$$I = \langle\langle (I_1^{(1)}, j_1^{(1)}), \ldots, (I_{m_1}^{(1)}, j_{m_1}^{(1)})\rangle, \ldots, \langle (I_1^{(s)}, j_1^{(s)}), \ldots, (I_{m_s}^{(1)}, j_{m_s}^{(s)})\rangle\rangle.$$

Разобьем сумму в правой части этого представления на две части: в первую сумму $\sum_1$ включим только те слагаемые, у которых элементы всех $I_l^{(k)}$, $l = 1, \ldots, m_k$, $k = 1, \ldots, s$, различны; во вторую сумму $\sum_2$ включим все остальные слагаемые. Для слагаемых первой суммы соответствующие случайные величины равны единице, только если в $G_{n,\,N}$ существуют $m_1 r_1 + \ldots \ldots + m_s r_s$ фиксированных ребер. Поэтому в силу леммы 1

$$\mathsf{P}\left\{\xi_{I_1^{(1)}}^{(j_1^{(1)})} = 1, \ldots, \xi_{I_{m_s}^{(s)}}^{(j_{m_s}^{(s)})} = 1\right\} = \\ = \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{m_1 r_1 + \ldots + m_s r_s} a^2_{i_1^{(1,\,1)}} \ldots a^2_{i_{r_1}^{(1,\,1)}} \ldots a^2_{i_1^{(m_s,\,s)}} \ldots a^2_{i_{r_s}^{(m_s,\,s)}} (1 + o(1))$$

и в силу (9), (10) и леммы 2

$$\sum\nolimits_1 = \left(\frac{\lambda^{r_1} a^{2r_1}}{2r_1}\right)^{m_1} \ldots \left(\frac{\lambda^{r_s} a^{2r_s}}{2r_s}\right)^{m_s} (1 + o(1)).$$

Остается убедиться, что $\sum_2$ стремится к нулю. Действительно, суммирование в $\sum_2$ проводится по наборам сложных индексов, в которых хотя бы один элемент $1, 2, \ldots, n$ встречается дважды. Каждому из сложных индексов соответствует цикл. Наличие общего элемента в циклах приводит к тому, что число M различных вершин, входящих в эти циклы, и число L различных ребер, участвующих в построении циклов, связаны неравенством $L \geqslant M + 1$. Разобьем сумму $\sum_2$ на конечное число сумм $\sum_{M,\,L}$ с фиксированными параметрами M и L у слагаемых. Для каждой из этих сумм в силу (3) справедлива оценка

$$\sum\nolimits_{M,\,L} \leqslant \frac{c}{n^{L-M}} \leqslant \frac{c}{n},$$

так как число слагаемых не превосходит n^M, а вероятность появления L фиксированных ребер в $G_{n,\,N}$ не превышает cn^{-L}. Теорема 3 доказана.

Для того чтобы доказать утверждение теоремы 1, остается получить следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Пусть* $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}$ — *неотрицательные целочисленные случайные величины и при* $n \to \infty$ *для любого фиксированного* s *и любых целых* *неотрицательных* $k_1, \ldots, k_s$

$$\mathsf{P}\{\xi_1^{(n)}=k_1, \ldots, \xi_s^{(n)}=k_s\} \to \frac{a_1^{k_1}\ldots a_s^{k_s}}{k_1!\ldots k_s!}e^{-a_1-\ldots-a_s},$$

где $a_1, a_2, \ldots$ — *фиксированная последовательность неотрицательных чисел. Пусть кроме того, при* $s \to \infty$ *равномерно относительно* n

$$\mathsf{M}(\xi_{s+1}^{(n)}+\ldots+\xi_n^{(n)}) \to 0 \tag{20}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A < \infty.$$

Тогда при $n \to \infty$ *распределение случайной величины*

$$\zeta_n^{(n)} = \xi_1^{(n)}+\ldots+\xi_n^{(n)}$$

сходится к распределению Пуассона с параметром A.

Доказательство. Покажем, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ и любого фиксированного m при достаточно большом n

$$\left|\mathsf{P}\{\zeta_n^{(n)}=m\}-\frac{A^m e^{-A}}{m!}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Для фиксированных ε и m найдется такое s, что

$$\left|\frac{A_s^m e^{-A_s}}{m!}-\frac{A^m e^{-A}}{m!}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

где $A_s = a_1+\ldots+a_s$.

Нетрудно увидеть, что

$$|\mathsf{P}\{\zeta_n^{(n)}=m\}-\mathsf{P}\{\zeta_s^{(n)}=m\}| \leqslant \mathsf{P}\{\xi_{s+1}^{(n)}+\ldots+\xi_n^{(n)}>0\}.$$

Поэтому в силу условия (20) при достаточно больших s

$$|\mathsf{P}\{\zeta_n^{(n)}=m\}-\mathsf{P}\{\zeta_s^{(n)}=m\}| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Наконец, в силу условия леммы распределение $\zeta_s^{(n)}=\xi_1^{(n)}+\ldots+\xi_s^{(n)}$ при любом фиксированном s сходится к распределению Пуассона с параметром $A_s=a_1+\ldots+a_s$. Поэтому при достаточно больших s

$$\left|\mathsf{P}\{\zeta_s^{(n)}=m\}-\frac{A_s^m e^{-A_s}}{m!}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Лемма доказана.

Теорема 1 следует теперь из теоремы 3 и леммы 3, условия которой выполняются при $\lambda a^2 < 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Karonski M. A review of random graphs // J. Graph Theory.— 1982.— V. 6.— P. 349—389.
2. Bollobas B. Random Graphs.— London: Academic Press, 1985.
3. Palmer E. M. Graphical Evolution.— New York: Wiley, 1985.
4. Коваленко И. Н. К теории случайных графов // Кибернетика.— 1971.— № 4.— С. 1—4.
5. Коваленко И. Н. О строении случайного ориентированного графа. // Теория вероятн. и матем. статистика.— 1972.— № 6.— С. 83—91.
6. Ивченко Г. И. Неравновероятные случайные графы // Тр. МИЭМ.— 1975.— Т. 44.— С. 34—66.
7. Erdös P., Renyi A. On the evolution of random graphs // Maguar Tud. Acad. Mat. Kut. Int. Közl.— 1960.— V. 5.— P. 17—61.
8. Takacs L. On the limit distribution of the number of cycles in a random graph // J. Appl. Probab.— 1988.— V. 25A.— P. 359—376.

Статья поступила 01.02.90