2000. Т. 36, № 12. С. 1699 — 1706

УДК 517.955

КРИТЕРИЙ СТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ ВО ВСЕМ ПРОСТРАНСТВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Л. В. Фардигола

Введение. В настоящей работе исследовано дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^m w(x,t)}{\partial t^m} + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(D_x)\frac{\partial^j w(x,t)}{\partial t^j} + b(D_x)u(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $D_x = (-i\partial/\partial x_1, \ldots, -i\partial/\partial x_n)$; $a_j(\sigma)$ $(j = \overline{0, m-1})$, $b(\sigma)$ — произвольные полиномы с комплексными коэффициентами $(\sigma \in \mathbb{R}^n)$; здесь $w : \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ — искомая функция, $u : \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ — управление (вход системы). Ясно, что это уравнение эквивалентно системе

$$\partial \mathbf{w}(x,t)/\partial t = \mathbf{A}(D_x)\mathbf{w}(x,t) + \mathbf{B}(D_x)u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

где $(m \times m)$-матрица $\mathbf{A}(\sigma) \equiv (a_{ij})_{i,j=1}^n$, у которой могут быть отличными от нуля лишь элементы $a_{ii+1} = 1$, $i = \overline{1, m-1}$, и $a_{mj} = -a_{j-1}(\sigma)$, $j = \overline{1, m}$, а $B(\sigma) \equiv \mathrm{col}\,[0, \ldots, 0, -b(\sigma)]$.

Система (2) получается из уравнения (1) заменой: $\mathrm{w}_j(x,t) \equiv \partial^{j-1} w(x,t)/\partial t^{j-1}$ $(j = \overline{1, m})$.

При исследовании управляемых процессов, описываемых системами вида (2), где $\mathbf{w}$ и u принадлежат некоторым линейным пространствам, обычно на операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ накладываются некоторые ограничения. Как правило, $\mathbf{B}$ является ограниченным оператором, а $\mathbf{A}$ — инфинитезимальным порождающим оператором некоторой сильно непрерывной (и даже сжимающей) полугруппы $T(t)$, кроме того, пространственные переменные x часто рассматриваются в некоторой ограниченной области $\mathbb{R}^n$ (см., например, [1 — 5] и др.). В данной же работе на операторы $\mathbf{A}(D_x)$ и $\mathbf{B}(D_x)$ системы (2) априори не накладываются никакие ограничения. При этом функции $\mathbf{w}(\cdot, t)$ при каждом $t \geq 0$ принадлежат пространствам функций полиномиального роста $\gamma \geq 0$: $H_{q,\gamma} = \{g \in C^q(\mathbb{R}^n) \mid \|g\|_{q,\gamma} < +\infty\}$; здесь $\|g\|_{q,\gamma} = \sup\{|D_x^\alpha g(x)|(1 + |x|)^{-\gamma} \mid x \in \mathbb{R}^n \wedge |\alpha| \leq q\}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Отметим, что функции $w(\cdot, t)$ и $u(\cdot, t)$ рассматриваются на всем $\mathbb{R}^n$.

В настоящей работе получен критерий стабилизируемости уравнения (1) в классах функций полиномиального роста (см. ниже теорему 1).

В п. 1 работы доказаны некоторые вспомогательные леммы. В п. 2 получены необходимое и достаточное условия стабилизируемости уравнения (1) в классах функций полиномиального роста. В п. 3 проанализированы условия утверждений, доказанных в п. 2, и приведены примеры стабилизируемых и нестабилизируемых в классах функций полиномиального роста уравнений вида (1).

Определение 1. Уравнение (1) стабилизируемо в классе функций полиномиального роста $\gamma \geq 0$, если существуют стабилизирующие дифференциальные операторы $p_0(D_x), \ldots$ $\ldots, p_{m-1}(D_x)$ такие, что для каждого $r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ найдется такое $q \in \mathbb{N}_0$, что для любого решения $w(\cdot, t) \in H_{r,\gamma}$ $(\forall t \geq 0)$ уравнения (1) с управлением

$$u(x,t) \equiv \sum_{j=0}^{m-1} p_j(D_x)\frac{\partial^j w(x,t)}{\partial t^j}, \tag{3}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$\partial^j w(x,0)/\partial t^j \in H_{q,\gamma} \quad (j = \overline{0, m-1}), \tag{4}$$

выполняются соотношения: $\|\partial^j w(\cdot,t)/\partial t^j\|_{r,\gamma} \to 0,\ t \to \infty \quad (j = \overline{0,m})$.

Обозначим $A(\lambda,\sigma) \equiv \lambda^m + \sum\limits_{j=0}^{m-1} a_j(\sigma)\lambda^j$, $\Lambda_P(\sigma) \equiv \sup\{\operatorname{Re}\lambda \mid \exists\lambda \in \mathbb{C}\ \ A(\lambda,\sigma)+b(\sigma)P(\lambda,\sigma)=0\}$.

Из утверждений 1 и 2, доказанных в п. 2, сразу получаем критерий стабилизируемости уравнения (1).

Теорема 1. *Уравнение (1) стабилизируемо в классе функций полиномиального роста $\gamma \geq 0$ в том и только в том случае, когда выполняется условие*

$$\forall\sigma \in \mathbb{R}^n \quad [b(\sigma) = 0 \quad \Longrightarrow \Lambda_0(\sigma) < 0]. \tag{5}$$

Следствие 1. *Если для уравнения (1) выполнено условие*

$$b(\sigma) \neq 0 \quad (\forall\sigma \in \mathbb{R}^n), \tag{6}$$

то это уравнение стабилизируемо в классе функций полиномиального роста $\gamma \geq 0$.

При доказательстве многих результатов настоящей работы используется метод преобразования Фурье [6 — 8]. Доказательства условий стабилизируемости основаны на анализе явной формулы для решений "двойственного" уравнения, полученного после преобразования Фурье (по x) уравнений вида (1). Метод построения стабилизирующего управления основан на использовании явной формулы сдвига всех корней алгебраического уравнения на заданную величину (см. лемму 1). Значительную роль в доказательстве многих утверждений настоящей работы играют применение теоремы Тарского — Зайденберга и ее следствий [9 — 11], а также методы работ [12, 13].

1. Вспомогательные утверждения. Доказанные в этом пункте леммы будут использованы при доказательстве утверждения 2 для построения набора стабилизирующих уравнение (1) дифференциальных операторов.

Лемма 1. *Пусть* $a(\lambda) \equiv \prod\limits_{j=1}^{m}(\lambda-\lambda_j) \equiv \lambda^m + \sum\limits_{l=0}^{m-1} a_l\lambda^l$ *и* $p_\alpha(\lambda) \equiv \alpha\sum\limits_{l=0}^{m-1}\alpha^l \sum\limits_{j=0}^{m-l-1} C_{j+l+1}^{l+1} a_{j+l+1}\lambda^j$, *где* $a_l \in \mathbb{C}$ $(l = \overline{0,m-1})$, $a_m = 1$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$ $(j = \overline{1,m})$, $\alpha \in \mathbb{C}$ *— произвольное число,* $C_r^k = r!/[(r-k)!k!]$. *Тогда* $a(\lambda) + p_\alpha(\lambda) \equiv \prod\limits_{j=1}^{m}(\lambda - \lambda_j + \alpha)$.

Доказательство. Используя метод математической индукции, легко получить формулу $\prod\limits_{j=1}^{m}(\lambda - \lambda_j + \alpha) \equiv \sum\limits_{l=0}^{m}\alpha^l \sum\limits_{j=0}^{m-l}(-1)^{m-l-1}C_{j+l}^{l}\lambda^j\Lambda_m^{m-l-j}$; здесь $\Lambda_m^r = \sum\limits_{1\leq i_1<\cdots<i_r\leq m}\ \prod\limits_{l=1}^{r}\lambda_{i_l} = (-1)^r a_{m-r}$. Отсюда сразу получаем требуемое. Лемма доказана.

Из леммы 1 следует

Лемма 2. *Пусть полином с вещественными коэффициентами $r(\sigma)$ удовлетворяет условию*

$$\Lambda_0(\sigma) - |b(\sigma)|^2 r(\sigma) < 0 \quad (\forall\sigma \in \mathbb{R}^n) \tag{7}$$

и

$$P(\lambda,\sigma) \equiv \overline{b}(\sigma)r(\sigma)\sum_{l=0}^{m-1}(|b(\sigma)|^2 r(\sigma))^l \sum_{j=0}^{m-l-1} C_{j+l+1}^{l+1} a_{j+l+1}(\sigma)\lambda^j, \tag{8}$$

где $a_m(\sigma) \equiv 1$. *Тогда выполняется условие*

$$\Lambda_P(\sigma) < 0 \quad (\forall\sigma \in \mathbb{R}^n). \tag{9}$$

Лемма 3. *Пусть выполнено условие (5). Тогда существует полином с вещественными коэффициентами $r(\sigma)$, удовлетворяющий условию (7).*

Доказательство. Оценим снизу функцию $\nu(r) \equiv \inf\{|\xi - \eta| \mid \xi \in \mathbb{R}^n \wedge \eta \in \mathbb{R}^n \wedge |\xi| = r \wedge \Lambda_0(\xi) > 0 \wedge b(\eta) = 0\}$. Согласно (5), $\nu(r) > 0$ $(\forall r \geq 0)$. Отсюда, применяя к $\nu(r)$

следствия теоремы Тарского — Зайденберга [10, добавление A], получаем, что $\nu(r)$ кусочно непрерывна при $r \geq 0$ и удовлетворяет условию $\nu(r) = Nr^{2q}(1+o(1))$ $(r \to +\infty)$, где $N > 0$, $q \in \mathbb{Q}$. Следовательно, при некотором $Q > 0$ имеем $\nu(r) \geq 2Q(1+r^2)^q$ $(\forall r \geq 0)$. Тогда для множества $\Omega = \{\sigma \in \mathbb{R}^n \mid \exists \xi \in \mathbb{R}^n\ [b(\xi) = 0 \wedge |\sigma - \xi| \leq Q(1+|\sigma|^2)^q]\}$ верна оценка

$$\Lambda_0(\sigma) < 0 \quad (\forall \sigma \in \Omega). \tag{10}$$

Оценим теперь $|b(\sigma)|^2$ вне множества Ω. Применяя к $|b(\sigma)|^2$ лемму 2 из [11], легко получаем оценку $|b(\sigma)|^2 \geq B(1+|\sigma|^2)^\alpha (d[\sigma, N\{b\}])^\beta$, где $N\{b\} = \{\sigma \in \mathbb{R}^n \mid b(\sigma) = 0\}$, $d[\sigma, N\{b\}]$ — расстояние от σ до $N\{b\}$, $B > 0$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\beta \in \mathbb{Q}$; причем $\beta = 0$, если $N\{b\} = \varnothing$, и $\beta > 0$, если $N\{b\} \neq \varnothing$. Отсюда получаем $|b(\sigma)|^2 \geq BQ^\beta(1+|\sigma|^2)^{\alpha+\beta q}$ $(\forall \sigma \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega)$. Ясно, что функция $\Lambda_0(\sigma)$ удовлетворяет оценке

$$\Lambda_0(\sigma) \leq \max\left\{1,\ \sum_{j=0}^{m-1} |a_j(\sigma)|\right\} \quad (\forall \sigma \in \mathbb{R}^n). \tag{11}$$

Обозначим $r(\sigma) \equiv \left(m + \sum\limits_{j=0}^{m-1} |a_j(\sigma)|^2\right) B^{-1}Q^{-\beta}(1+|\sigma|^2)^l$, где $l \in \mathbb{N}_0$ и $l + \alpha + \beta q \geq 0$. Тогда $r(\sigma) > |\Lambda_0(\sigma)||b(\sigma)|^{-2}$ $(\forall \sigma \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega)$, значит (см. (10)), полином $r(\sigma)$ удовлетворяет условию (7). Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть для некоторого полинома $P(\lambda, \sigma)$ функция $\Lambda_P(\sigma)$ удовлетворяет условию (9). Тогда существуют постоянные $L > 0$ и $l \in \mathbb{Q}$ такие, что*

$$\Lambda_P(\sigma) < -L(1+|\sigma|^2)^{l/2} \quad (\forall \sigma \in \mathbb{R}^n). \tag{12}$$

Доказательство. Согласно (9) функция $\mu(r) \equiv \sup\{\Lambda_P(\sigma) \mid \sigma \in \mathbb{R}^n \wedge |\sigma| = r\}$ удовлетворяет условию $\mu(r) > 0$ $(\forall r \geq 0)$. Применяя к $\mu(r)$ следствия теоремы Тарского — Зайденберга [10, добавление A], отсюда получаем, что $\mu(r)$ кусочно непрерывна при $r \geq 0$ и удовлетворяет условию $\mu(r) = -Mr^l(1+o(1))$ $(r \to +\infty)$, где $M > 0$, $l \in \mathbb{Q}$, значит, существует $L > 0$, для которого $\mu(r) \leq -L(1+r^2)^{l/2}$ $(\forall r \geq 0)$. Отсюда сразу следует оценка (12). Лемма доказана.

2. Условия стабилизируемости уравнения (1). Справедливо

Утверждение 1. *Если уравнение (1) стабилизируемо в классе функций полиномиального роста $\gamma \geq 0$, то для него выполняется условие (5).*

Доказательство. Предположим, что уравнение (1) стабилизируемо в классе функций полиномиального роста $\gamma \geq 0$, но условие (5) для него не выполняется. Найдем точку $\sigma_0 \in \mathbb{R}^n$, в которой условие (5) не выполняется (ясно, что $b(\sigma_0) = 0$). Возьмем произвольный набор стабилизирующих уравнение (1) дифференциальных операторов $p_0(D_x), \ldots$ $\ldots, p_{m-1}(D_x)$. Для уравнения (1) с управлением (3) рассмотрим эквивалентную ему систему вида (2):

$$\partial \mathbf{w}(x,t)/\partial t = [\mathbf{A}(D_x) + \mathbf{B}(D_x)\mathbf{P}(D_x)]\mathbf{w}(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{13}$$

где $\mathbf{P}(\sigma) \equiv (p_0(\sigma), \ldots, p_{m-1}(\sigma))$. Найдем собственное значение $\lambda(\sigma_0)$ матрицы $\mathbf{A}(\sigma_0)$, для которого $\operatorname{Re}\lambda(\sigma_0) = \Lambda_0(\sigma_0)$, и найдем единичный собственный вектор $\mathbf{v}(\sigma_0)$, соответствующий собственному значению $\lambda(\sigma_0)$. Далее найдем решение задачи Коши для системы (13) с начальным условием

$$\mathbf{w}(x,0) = \mathbf{v}(\sigma_0)\exp\{i\langle x, \sigma_0\rangle\}; \tag{14}$$

здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Ясно, что решением этой задачи является функция

$$\mathbf{w}(x,t) \equiv \exp\{t\mathbf{A}(\sigma_0)\}\mathbf{v}(\sigma_0)\exp\{i\langle x,\sigma_0\rangle\} \equiv \exp\{t\lambda(\sigma_0) + i\langle x,\sigma_0\rangle\}\mathbf{v}(\sigma_0). \tag{15}$$

Поскольку $|\mathbf{w}(x,t)| \equiv \exp\{t\operatorname{Re}\lambda(\sigma_0)\}$, то $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} |\mathbf{w}(x,t)| > 0$, что противоречит выбору дифференциальных операторов $p_0(D_x), \ldots, p_{m-1}(D_x)$.

Таким образом, мы показали, что если уравнение (1) стабилизируемо в классах функций полиномиального роста $\gamma \geq 0$, то для него выполняется условие (5). Утверждение доказано.

Условие (5) является не только необходимым, но и достаточным для стабилизируемости уравнения (1) в классах функций полиномиального роста.

Утверждение 2. *Если для уравнения (1) выполнено условие (5), то существуют дифференциальные операторы $p_0(D_x), \ldots, p_{m-1}(D_x)$ такие, что для каждого $r \in \mathbb{N}_0$ найдутся такие число $q \in \mathbb{N}_0$ и функция $\nu \in C[0,+\infty]$, $\nu(t) \to 0$ $(t \to +\infty)$, что для любого решения $w(\cdot,t) \in H_{r,\gamma}$ $(\forall t \geq 0)$ уравнения (1) с управлением (3), удовлетворяющего начальным условиям (4), выполняются соотношения*

$$\left\| \frac{\partial^j w(\cdot,t)}{\partial t^j} \right\|_{r,\gamma} \leq \nu(t) \sum_{i=0}^{m-1} \left\| \frac{\partial^i w(\cdot,0)}{\partial t^i} \right\|_{q,\gamma} \quad (\forall t \geq 0), \quad j = \overline{0,m}. \tag{16}$$

Доказательство. Применяя леммы 2 — 4, сразу получаем, что существует полином $P(\lambda,\sigma)$, $\deg P(\cdot,\sigma) \leq m-1$ $(\forall \sigma \in \mathbb{R}^n)$, для которого функция $\Lambda_P(\sigma)$ удовлетворяет оценке (12). Этот полином можно записать в виде $P(\lambda,\sigma) \equiv \sum\limits_{j=0}^{m-1} p_j(\sigma)\lambda^j$, где $p_j(\sigma)$ $(j=\overline{0,m-1})$ — полиномы по σ. Подставим $p_0(D_x),\ldots,p_{m-1}(D_x)$ в условие (3) и рассмотрим уравнение (1) с таким управлением (3). Заменим это уравнение эквивалентной ему системой (13). Рассмотрим для системы (13) задачу Коши с начальным условием

$$\mathbf{w}(x,0) = \mathbf{w}^0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{17}$$

Используя оценку для матричной экспоненты, доказанную в работе [7, гл. 1, § 6], и соотношение (12), получаем $\|\exp\{t[\mathbf{A}(\lambda,\sigma)+\mathbf{B}(\sigma)\mathbf{P}(\lambda,\sigma)]\}\| \leq C(1+|\sigma|)^{(m-1)\eta}\exp\{-tL(1+|\sigma|)^l\}$ $(\forall \sigma \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \geq 0)$, где $C > 0$, $\eta = \max\{\deg a_j, \deg p_j + \deg b \mid j = \overline{0,m-1}\}$. Поэтому для любого мультииндекса α выполняется оценка

$$\|D_\sigma^\alpha \exp\{t[\mathbf{A}(\lambda,\sigma)+\mathbf{B}(\sigma)\mathbf{P}(\lambda,\sigma)]\}\| \leq C_\alpha(1+|\sigma|)^{(|\alpha|+m-1)\eta-|\alpha|}\exp\{-tL(1+|\sigma|)^l\} \ (\forall \sigma \in \mathbb{R}^n,\ \forall t \geq 0), \tag{18}$$

где $C_\alpha > 0$. Зафиксируем произвольное $\gamma \geq 0$. Пусть $\mathbf{w}^0 \in H_{q,\gamma}$, где $q \in \mathbb{N}_0$ будет выбрано ниже (мы говорим, что вектор-функция принадлежит некоторому классу функций, если каждая ее координата принадлежит этому классу функций). Рассматривая задачу (13), (17) в пространстве S' (S — пространство Шварца, а S' — пространство обобщенных функций над ним, см. [8]) и применяя к ней преобразование Фурье, получаем

$$\partial \mathbf{v}(\sigma,t)/\partial t = [\mathbf{A}(\sigma)+\mathbf{B}(\sigma)\mathbf{P}(\sigma)]\mathbf{v}(\sigma,t)\ (S'), \quad t \geq 0, \quad \mathbf{v}(\sigma,0) = \mathbf{v}^0(\sigma)\ (S'), \tag{19}$$

где $\mathbf{v}(\cdot,t) \equiv F_x[\mathbf{w}(\cdot,t)]$, $\mathbf{v}^0 = F_x[\mathbf{w}^0]$ (F_x — оператор преобразования Фурье по x). Используя оценку (18), заключаем, что функция $\mathbf{v}(\sigma,t) = \exp\{t[\mathbf{A}(\lambda,\sigma)+\mathbf{B}(\sigma)\mathbf{P}(\lambda,\sigma)]\}\mathbf{v}^0(\sigma)\ (S')$ $(\forall t \geq 0)$ является решением в S' задачи Коши (19). Поэтому функция $\mathbf{w}(x,t) = F_\sigma^{-1}[\mathbf{v}(\sigma,t]\ (S')$ $(\forall t \geq 0)$ является единственным решением в S' задачи Коши (13), (17) (см. [8]). Зафиксируем произвольное $r \in \mathbb{N}_0$ и покажем, что если $q \in \mathbb{N}_0$ достаточно велико, то функция $\mathbf{w}(x,t)$ принадлежит (по x) классу $H_{r,\gamma}$. Ниже всюду до конца доказательства этого утверждения будем считать, что $x \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$. Пусть $e(x)$ — финитная бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ функция с носителем, содержащимся в $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$, удовлетворяющая условию $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^n} e(x-k) \equiv 1$.

Обозначим $\mathbf{w}_k^0(x) \equiv e(x)\mathbf{w}^0(x+k)$, $\mathbf{v}_k^0 = F_x[\mathbf{w}_k^0]$. Тогда функция $\mathbf{v}_k(\sigma,t) \equiv \exp\{t[\mathbf{A}(\sigma)+\mathbf{B}(\sigma)\mathbf{P}(\sigma)]\}\mathbf{v}_k^0(\sigma)$ — решение задачи (19) с заменой $\mathbf{v}^0$ на $\mathbf{v}_k^0$, а $\mathbf{w}_k(x,t) \equiv F_\sigma^{-1}[\mathbf{v}_k(\sigma,t)]$ — решение задачи (13), (17) с заменой $\mathbf{w}^0$ на $\mathbf{w}_k^0$; здесь $k \in \mathbb{Z}^n$. Ясно, что $\|\mathbf{w}_k^0\|_{q,\gamma} \leq M\|\mathbf{w}^0\|_{q,\gamma}(1+|k|)^\gamma$, причем $M > 0$ не зависит от $k \in \mathbb{Z}^n$. Из оценки $|\sigma^\lambda D_\sigma^\alpha(\sigma^\beta \mathbf{v}_k^0(\sigma))| \leq C\|\mathbf{w}^0\|_{q,\gamma}(1+|k|)^\gamma$, где $C = C(\alpha,\beta,\lambda) > 0$, $|\beta|+|\lambda| \leq q$, α произвольно, используя оценку (18), получаем

$$|D_\sigma^\alpha(\sigma^\beta \mathbf{v}_k(\sigma,t))| \leq C'\|\mathbf{w}^0\|_{q,\gamma}(1+|\sigma|)^{(|\alpha|+m-1)\eta-|\alpha|-|\lambda|}\exp\{-tL(1+|\sigma|^l)\}(1+|k|)^\gamma,$$

где $C' = C'(\alpha,\beta,\lambda) > 0$, $|\beta|+|\lambda| \le q$, α произвольно. При $|\lambda| = (|\alpha|+m-1)\eta-|\alpha|+n+1$ отсюда получаем $|x^\alpha D_x^\beta \mathrm{w}_k(x,t)| \le C''\nu(t)\|\mathrm{w}^0\|_{q,\gamma}(1+|k|)^\gamma$, где $C'' = C''(\alpha,\beta) > 0$, α произвольно, $|\beta| \le q-(|\alpha|+m-1)\eta+|\alpha|-(n+1)$, $\nu(t) \equiv (1+t)^{1/l}$, если $l<0$, и $\nu(t) \equiv \exp\{-tL\}$, если $l \ge 0$. Учитывая, что $(1+|k|)^\gamma \le (1+|x+k|)^\gamma(1+|x|)^\gamma$, и выбирая α так, чтобы $|\alpha| = n-[-\gamma]+1$ (здесь $[-\gamma]$ означает целую часть числа $-\gamma$), получаем $|D_x^\beta \mathrm{w}_k(x,t)| \le$ $\le C^*\nu(t)\|\mathrm{w}^0\|_{q,\gamma}(1+|x+k|)^\gamma(1+|x|)^{-n-1}$, где $\beta \le r$, $q \ge r+(n-[-\gamma]+m)\eta+[-\gamma]$, $C^* =$ $= C^*(\beta) > 0$, следовательно, $\mathrm{w}(x,t) \equiv \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} \mathrm{w}_k(x-k,t)$, при этом $\mathrm{w}(\cdot,t) \in H_{r,\gamma}$ $(\forall t \ge 0)$ и удовлетворяет условию

$$\|\mathrm{w}(\cdot,t)\|_{r,\gamma} \le C_r\nu(t)\|\mathrm{w}^0\|_{q,\gamma} \quad (\forall t \ge 0), \tag{20}$$

где $C_r > 0$.

Таким образом, задача Коши (13), (17) имеет единственное решение $\mathrm{w}(\cdot,t) \in H_{r,\gamma}$ $(\forall t \ge 0)$, причем это решение удовлетворяет условию (20). Отсюда сразу следует, что для найденных выше дифференциальных операторов $p_0(D_x),\dots,p_{m-1}(D_x)$ любое решение $\mathrm{w}(\cdot,t) \in H_{r,\gamma}$ $(\forall t \ge$ $\ge 0)$ уравнения (1) с управлением (3), удовлетворяющее начальным условиям (4), удовлетворяет условиям (16). Утверждение доказано.

Из лемм 2, 4 и доказательства утверждения 2 вытекает

Следствие 2. *Пусть полином с вещественными коэффициентами $r(\sigma)$ удовлетворяет условию (7) и $P(\lambda,\sigma) \equiv \sum\limits_{j=0}^{m-1} p_j(\sigma)\lambda^j$ — полином вида (8). Тогда управление $u(x,t)$ вида (3) стабилизирует уравнение (1) в классе функций полиномиального роста $\gamma \ge 0$.*

Замечание 1. Отметим, что в случаях, когда m велико, вычисление функции $\Lambda_0(\sigma)$ для уравнения (1) является непростой задачей, поэтому применение следствия 2 в этих случаях сильно затрудняется. Но поскольку функция $\Lambda_0(\sigma)$ удовлетворяет оценке (11), то при выборе полинома $r(\sigma)$ (для построения стабилизирующего управления с помощью формулы (8)) в случае выполнения (6) можно вместо (7) использовать более сильное условие

$$\max\left\{2,\ \sum_{j=0}^{m-1}|a_j(\sigma)|\right\} - |b(\sigma)|^2 r(\sigma) < 0 \quad (\forall \sigma \in \mathbb{R}^n), \tag{7'}$$

в котором в отличие от условия (7) не используется функция $\Lambda_0(\sigma)$. Таким образом, если в случае выполнения (6) условие (7) заменить условием (7′), то следствие 2 остается справедливым.

Из утверждений 1 и 2 сразу следует теорема 1 и следствие 1, сформулированные во введении.

3. Анализ критерия стабилизируемости. При доказательстве утверждения 2 стабилизирующие уравнение (1) операторы $p_0(D_x),\dots,p_{m-1}(D_x)$ выбирались так, чтобы функция $\Lambda_P(\sigma)$ удовлетворяла условию (9).

Покажем, что условие (9) выполнено для любого набора стабилизирующих уравнение (1) дифференциальных операторов.

Утверждение 3. *Пусть уравнение (1) стабилизируемо в классе функций степенного роста $\gamma > 0$ и $p_0(D_x),\dots,p_{m-1}(D_x)$ — произвольный набор стабилизирующих уравнение (1) дифференциальных операторов. Тогда для функции $\Lambda_P(\sigma)$ выполняется условие (9).*

Доказательство будем проводить аналогично доказательству утверждения 1. Пусть уравнение (1) стабилизируемо, а $p_0(D_x),\dots,p_{m-1}(D_x)$ — произвольный набор стабилизирующих это уравнение дифференциальных операторов, пусть $P(\lambda,\sigma) \equiv \sum\limits_{j=0}^{m-1} p_j(\sigma)\lambda^j$ и $\Lambda_P(\sigma_0) \ge 0$. Построим систему (13), найдем собственное значение $\lambda(\sigma_0)$ матрицы $\mathbf{A}(\sigma_0)+\mathbf{B}(\sigma_0)\mathbf{P}(\sigma_0)$, для которого $\operatorname{Re}\lambda(\sigma_0) = \Lambda_P(\sigma_0)$, и найдем единичный собственный вектор $\mathrm{v}(\sigma_0)$, соответствующий собственному значению $\lambda(\sigma_0)$. Ясно, что функция $\mathrm{w}(x,t)$, задаваемая формулой (15), будет решением задачи Коши для системы (13) с начальным условием (14). Но тогда $|\mathrm{w}(x,t)| \equiv$ $\equiv \exp\{t\operatorname{Re}\lambda(\sigma_0)\}$, поэтому $\varlimsup\limits_{t\to 0}|\mathrm{w}(x,t)| > 0$, что противоречит тому, что $p_0(D_x),\dots,p_{m-1}(D_x)$ — стабилизирующий уравнение (1) набор дифференциальных операторов.

Таким образом, если $p_0(D_x),\dots,p_{m-1}(D_x)$ — стабилизирующий уравнение (1) набор дифференциальных операторов, то условие (9) выполняется. Утверждение доказано.

В утверждении 2 показано, что для стабилизируемого в классах функций полиномиального роста уравнения (1) существует стабилизирующий набор дифференциальных операторов такой, что все решения уравнения (1) с управлением (3), удовлетворяющие условию (4) с достаточно большим q, "равномерно" (в смысле (16)) стремятся к нулю при $t \to 0$ (вместе со всеми своими производными по t до порядка m и по x до порядка r). Оказывается, что таким свойством "равномерности" обладает произвольный набор стабилизирующих уравнение (1) дифференциальных операторов.

Утверждение 4. *Пусть уравнение (1) стабилизируемо в классе функций полиномиального роста $\gamma \geq 0$ и $p_0(D_x),\dots,p_{m-1}(D_x)$ — произвольный набор стабилизирующих его дифференциальных операторов. Тогда для каждого $r \in \mathbb{N}_0$ найдутся такие число $q \in \mathbb{N}_0$ и функция $\nu \in C[0,+\infty]$, $\nu(t) \to 0$ $(t \to +\infty)$, что для любого решения $w(\cdot,t) \in H_{r,\gamma}$ $(\forall t \geq 0)$ уравнения (1) с управлением (3), удовлетворяющего начальным условиям (4), выполняются соотношения (16).*

Доказательство. Для $p_0(D_x),\dots,p_{m-1}(D_x)$ выполняется условие (9) (см. утверждение 3), а следовательно (см. лемму 4), и условие (12). Далее, рассуждая так же, как в доказательстве утверждения 2 после вывода оценки (12), имеем, что для каждого $r \in \mathbb{N}_0$ найдутся такие $q \in \mathbb{N}_0$ и $V > 0$, что для любого решения $w(\cdot,t) \in H_{r,\gamma}$ $(\forall t \geq 0)$ уравнения (1) с управлением (3), удовлетворяющего начальным условиям (4), выполняются соотношения (16) с $\nu(t) \equiv V(1+t)^{-1/|l|}$. Утверждение доказано.

Приведем теперь примеры, иллюстрирующие критерий стабилизируемости (теорему 1).

Пример 1. Рассмотрим волновое уравнение:

$$\partial^2 w/\partial t^2 - \partial^2 w/\partial x_1^2 - \partial^2 w/\partial x_2^2 + b(D_x)u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0,$$

где $b(\sigma)$ — произвольный полином $(\sigma \in \mathbb{R}^2)$. Очевидно, что $A(\lambda,\sigma) \equiv \lambda^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2$, поэтому $\Lambda_0(\sigma) \equiv 0$. Применяя теорему 1, получаем, что данное уравнение стабилизируемо в классах функций полиномиального роста в том и только в том случае, когда для $b(\sigma)$ выполняется условие (6). В случае выполнения этого условия найдем стабилизирующие наше уравнение дифференциальные операторы $p_0(D_x)$ и $p_1(D_x)$. Из (6) следует, что $|b(\sigma)|^2 > 0$ $(\forall \sigma \in \mathbb{R}^n)$. Ясно, что полином $r(\sigma) \equiv 1$ удовлетворяет условию (7). Далее по формуле (8) строим полином $P(\lambda,\sigma) \equiv \bar{b}(\sigma)(2\lambda + |b(\sigma)|^2)$, значит (см. следствие 2), $p_0(D_x) = \bar{b}(D_x)|b(D_x)|^2$, $p_1(D_x) = 2\bar{b}(D_x)$, следовательно, управление, стабилизирующее данное уравнение, имеет вид $u(x,t) \equiv \bar{b}(D_x)|b(D_x)|^2 w(x,t) + 2\bar{b}(D_x)\partial w(x,t)/\partial t$, в частности, если $b(\sigma) \equiv b = \mathrm{const} \neq 0$, то стабилизирующее управление имеет вид $u(x,t) \equiv \bar{b}|b|^2 w(x,t) + 2\bar{b}\partial w(x,t)/\partial t$.

Поскольку в примере 1 в случае $b(\sigma) \equiv b = \mathrm{const} \neq 0$ управление, стабилизирующее рассматриваемое уравнение, имеет вид $u(x,t) \equiv p_0 w(x,t) + p_1 \partial w(x,t)/\partial t$, где p_0, p_1 — некоторые константы, то естественно возникает вопрос, нельзя ли для любого стабилизируемого уравнения (1) выбрать стабилизирующее его управление $u(x,t)$ вида (3), в котором вместо дифференциальных операторов $p_0(D_x),\dots,p_{m-1}(D_x)$ стоят некоторые константы $p_0,\dots,p_{m-1}$. Отрицательный ответ на этот вопрос дает

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\partial^2 w/\partial t^2 + 2i\partial^2 w/\partial x\partial t - i\partial w/\partial x + u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0.$$

Здесь $A(\lambda,\sigma) \equiv \lambda^2 - 2\sigma\lambda + \sigma$, $b(\sigma) \equiv 1$. Значит,

$$\Lambda_0(\sigma) \equiv \begin{cases} \sigma + \sqrt{\sigma^2 - \sigma}, & \sigma \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty), \\ \sigma, & \sigma \in (0,1). \end{cases}$$

Согласно следствию 1, это уравнение стабилизируемо в классах функций полиномиального роста. В качестве $r(\sigma)$, удовлетворяющего условию (7), можно взять $r(\sigma) \equiv 3(1+\sigma^2)$. Согласно (8), $P(\lambda,\sigma) \equiv -6\sigma(1+\sigma^2) + 9(1+\sigma^2)^2 + 6(1+\sigma^2)\lambda$. Поэтому (см. следствие 2) управление

$$u(x,t) \equiv \left[-6i\frac{\partial}{\partial x}\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + 9\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2\right] w(x,t) + 6\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}$$

стабилизирует наше уравнение.

Покажем теперь, что для любых постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ управление

$$u(x,t) \equiv (\beta_1 + i\beta_2)w(x,t) + (\alpha_1 + i\alpha_2)\partial w(x,t)/\partial t \tag{21}$$

не стабилизирует рассматриваемое уравнение. Для этого достаточно показать, что не существует набора чисел $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, для которых все корни уравнения

$$i\lambda^2 + (\alpha_1 - 2\sigma + i\alpha_2)\lambda - i(\beta_1 + \sigma) + \beta_2 = 0 \tag{22}$$

лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Воспользуемся критерием Рауса — Гурвица [14, гл. 16, § 19]: если все корни полинома (22) лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$, то

$$0 < \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_1 - 2\sigma \end{vmatrix} \equiv \alpha_1 - 2\sigma. \tag{23}$$

Поскольку выбрать $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ так, чтобы выполнялось соотношение (23), невозможно, то ни при каких $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ управление (21) не стабилизирует рассматриваемое дифференциальное уравнение.

В заключение приведем пример стабилизируемого уравнения вида (1), для которого условие (6) не выполняется.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^3 w}{\partial t^3} + i\frac{\partial^5 w}{\partial x_1 \partial x_2^2 \partial t^2} - \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^2 \partial t^2} - 3i\frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2} - i\frac{\partial^6 w}{\partial x_1 \partial x_2^4 \partial t} + 2\frac{\partial^5 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \partial t} + 2i\frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2^2 \partial t} -$$

$$-3\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial t} - \frac{\partial^6 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^4} - i\frac{\partial^5 w}{\partial x_1^3 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + i\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + i\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} - i\frac{\partial u}{\partial x_1} - u = 0, \ x \in \mathbb{R}^2, \ t \geq 0.$$

Здесь $A(\lambda,\sigma) \equiv \lambda^3 + \lambda^2(\sigma_1\sigma_2^2 + \sigma_2^2 + 3\sigma_1) + \lambda(\sigma_1\sigma_2^4 + 2\sigma_1^2\sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2^2 + 3\sigma_1^2) + \sigma_1^2\sigma_2^4 + \sigma_1^3\sigma_2^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2 + \sigma_1^3$, $b(\sigma) \equiv \sigma_1(\sigma_2^2+1) - 1$. Очевидно, что $\lambda_1(\sigma) \equiv -\sigma_1$, $\lambda_2(\sigma) \equiv \sigma_1(\sigma_2^2+1) - 1$, $\lambda_3(\sigma) \equiv -\sigma_1 - \sigma_2^2$ являются корнями полинома $A(\lambda,\sigma)$, поэтому $\Lambda_0(\sigma) \equiv \begin{cases} -\sigma_1, & \sigma_1 \geq 0, \\ -\sigma_1(\sigma_2^2+1), & \sigma_1 \leq 0. \end{cases}$ Отсюда сразу получаем, что условие (5) теоремы 1 выполняется, следовательно, рассматриваемое уравнение стабилизируемо в классах функций полиномиального роста. Найдем теперь управление, стабилизирующее это уравнение. Ясно, что полином $r(\sigma) \equiv 1/2$ удовлетворяет условию (7), поэтому (см. (10)) $P(\lambda,\sigma) \equiv (1/2)b(\sigma)a_1(\sigma) + (1/4)b^3(\sigma)a_2(\sigma) + (1/8)b^5(\sigma) + (b(\sigma)a_2(\sigma) + (4/3)b^3(\sigma))\lambda + +(3/2)b(\sigma)\lambda^2$, значит (см. следствие 2),

$$p_0(D_x) \equiv \frac{1}{2}\left(i\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} - i\frac{\partial}{\partial x_1} - 1\right)\left(-\frac{\partial^5}{\partial x_1 \partial x_2^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 2i\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} - 3\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right) +$$

$$+\frac{1}{4}\left(i\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} - i\frac{\partial}{\partial x_1} - 1\right)^3\left(i\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - 3i\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \frac{1}{8}\left(i\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} - i\frac{\partial}{\partial x_1} - 1\right)^5,$$

$$p_1(D_x) \equiv \left(i\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} - i\frac{\partial}{\partial x_1} - 1\right)\left(i\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - 3i\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \frac{3}{4}\left(i\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} - i\frac{\partial}{\partial x_1} - 1\right)^3,$$

$$p_2(D_x) \equiv \frac{3}{2}\left(i\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} - i\frac{\partial}{\partial x_1} - 1\right),$$

следовательно, управление $u(x,t) \equiv p_0(D_x)w(x,t) + p_1(D_x)\partial w(x,t)/\partial t + p_2(D_x)\partial^2 w(x,t)/\partial t^2$ стабилизирует рассматриваемое уравнение.

Автор благодарит Г. М. Скляра за постоянный интерес и внимание к работе.

Литература

1. *Балакришнан А.* Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве. М., 1974.
2. *Lions J.L.* Contrôle optimal de systèmes gouvernes par des équations aux dérivées partielles. Paris, 1968.
3. *Boyadzhiev K.N., Levan N.* // Studia. Sci. Math. Hungar. 1995. Vol. 30, N 3 — 4. P. 165 — 182.
4. *Ammar Khodja F., Benabdallakh A.* // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1995. T. 321, N 2. P. 195 — 198.
5. *Коробов В.И., Скляр Г.М.* // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 11. С. 1862 — 1869.
6. *Петровский И.Г.* // Бюл. МГУ. Секц. А. 1938. Т. 1, № 7. С. 1 — 72.
7. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., 1958.
8. *Schwartz L.* // Ann. Inst. Fourier. Grenoble. 1950. T. 2. P. 19 — 49.
9. *Seidenberg A.* // Ann. Math. 1954. Ser. 2. Vol. 60, N 2. P. 365 — 374.
10. *Hörmander L.* The analysis of linear differential operators. Vol. 2: Differential operators with constant coefficients. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo, 1983.
11. *Hörmander L.* // Ark. Mat. 1958. Bd 3, Hf 6. S. 555 — 558.
12. *Фардигола Л.В.* // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 11. С. 123 — 144.
13. *Фардигола Л.В.* // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 424 — 438.
14. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1967.

Харьковский национальный университет

Поступила в редакцию
8 ноября 1999 г.