В. П. Одинец, О функционалах, дуально порожденных минимальными проекторами, и критерии гильбертовости пространств Банаха,
Матем. заметки, 1985, том 38, выпуск 5, 770–776

https://www.mathnet.ru/mzm5590

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 38, № 5 (1985)

О ФУНКЦИОНАЛАХ, ДУАЛЬНО ПОРОЖДЕННЫХ МИНИМАЛЬНЫМИ ПРОЕКТОРАМИ, И КРИТЕРИИ ГИЛЬБЕРТОВОСТИ ПРОСТРАНСТВ БАНАХА

В. П. Одинец

Литература, посвященная проблеме характеризации гильбертова пространства с точностью до изометрии в классе банаховых (или даже нормированных пространств) обширна и постоянно пополняется. В основном эти работы посвящены либо некоторым условиям на норму пространства, либо на группу обратимых изометрий пространства, либо некоторым характеристикам конечномерных подпространств фиксированной размерности (см., например, [1—5]).

В настоящей работе строится функционал φ_x, дуально порождаемый минимальным проектором, изучаются некоторые условия его существования. В терминах функционала φ_x характеризуется гильбертово пространство в классе равномерно гладких строго нормированных пространств Банаха. Ставится ряд проблем характеризации пространств со скалярным произведением (ср. [3], [6, 7, предложение 2.2]).

1. Пусть B — банахово пространство над полем $\mathbf{R}$ вещественных чисел, E^n — n-мерное евклидово пространство, θ и θ^* — нулевые элементы соответственно в B и B^*, $[x]$ — одномерное подпространство, содержащее элемент $x \in B \setminus \theta$, x^{**} — элемент из B^{**}, совпадающий с $i(x)$, где i — естественное вложение B в B^{**}.

Определение 1. Предположим, что для данного $x \in B \setminus \theta$ существует единственное подпространство[1]) D_x, $\dim(B/D_x)=1$, такое, что для любого другого подпространства D, $\operatorname{codim} D = 1, x \notin D$, проектор P_D^x на D вдоль x будет иметь норму строго большую, чем норма проектора $P_{D_x}^x$.

Рассмотрим функционал φ_x, полагая для произвольного $z \in B$, $z = \alpha x + P_{D_x}^x(z)$,

$$\varphi_x(z) = \alpha \| x \|. \tag{1}$$

Пример 1. Пусть B — двумерное пространство, полученное перенормировкой пространства E^2 относительно границы множества $K = K_1 \cap K_2$, где K_1 задается неравенством $x^2 + (y-4)^2 \leqslant 5^2$, а K_2 — неравенством $x^2 + (y+4)^2 \leqslant 5^2$. Легко видеть, что для каждого элемента $e \in B \setminus \theta$ существует единственное подпространство D_e такое, что проектор на D_e вдоль e имеет норму, равную 1.

Пусть $x \in B$, а $f \in B^*$ и $f(x) = 1$. Тогда проектор на подпространство $D = f^{-1}(0)$, аннулирующийся на x, представим (см. [8]) в виде

$$P_D^x = I - f \otimes x, \text{ т. е. } P_D^x(z) = z - f(z)\,x, \tag{2}$$

для любого $z \in B$ (I — тождественный оператор на B).

С помощью представления (2) легко проверяются следующие две леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть $x \in B \setminus \theta$. Пусть для x определен функционал φ_x. Тогда:*

а) *функционал φ_x линеен и*

$$\varphi_{\mu x} = (\operatorname{sgn}\mu)\,\varphi_x, \text{ если } \mu \neq 0 \quad (\mu \in \mathbf{R}); \tag{3}$$

б)
$$\| \varphi_x \| = \| I - P_{D_x}^x \|; \tag{4}$$

в) *для наклонов [2]) элемента x к D_x и D_x к x справедливо*

$$([x]\,\hat{,}\ D_x) = 1/\| \varphi_x \|; \tag{5}$$

$$(D_x\,\hat{,}\ [x]) = 1/\| P_{D_x}^x \|. \tag{6}$$

---

[1]) Подпространства везде предполагаются замкнутыми. Термины, встречающиеся в работе, а также обозначения классических пространств l_1 и c_0 следуют принятым в [1, 2].

[2]) Наклоном подпространства D_1 к подпространству D_2 — $(D_1\,\hat{,}\ D_2)$ — называется $\inf \| x + y \| / \| x \|$ по всем $x \in D_1 \setminus \theta$ и $y \in D_2$ (см. [9]).

ЛЕММА 2. *Пусть* $f \in B^*$, $\| f \| \neq 0$. *Пусть* $x \notin \tilde{D} = f^{-1}(0)$ *и* $\tilde{D} = (x^{**})^{-1}(0)$. *Тогда для проекторов* $P^f_{\tilde{D}}$ *и* P^x_D, *соответственно из* B^* *на* $\tilde{D}$ *и из* B *на* D *справедливо*:

а) $$\| P^f_{\tilde{D}} \|_{B^*} \leqslant \| P^x_D \|_B; \tag{7}$$

б) *если* B — *рефлексивное пространство, то*

$$\| P^f_{\tilde{D}} \|_{B^*} = \| P^x_D \|_B. \tag{8}$$

Для дальнейшего, специально не оговаривая, будем иметь в виду, что в рефлексивных пространствах Банаха минимальный проектор на дополняемое подпространство всегда существует (см. [10]).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* B — *рефлексивное банахово пространство такое, что для любого подпространства* $\tilde{D} \subset B^*$, $\operatorname{codim} \tilde{D} = 1$, *минимальный проектор на* $\tilde{D}$ *единственный. Тогда для любого* $x \in B \setminus \theta$ *определен функционал* φ_x.

Доказательство. Возьмем произвольный $x \in B \setminus \theta$. Положим $\tilde{D} = (x^{**})^{-1}(0)$. По условию существует единственный минимальный проектор $P_{\tilde{D}}\colon B^* \to \tilde{D}$. Пусть $f \in (P_{\tilde{D}})^{-1}(\theta^*)$ и $\| f \| = 1$. Тогда $P_{\tilde{D}} = P^f_{\tilde{D}}$. Положим $D = f^{-1}(0)$. Проверим, что подпространство D есть подпространство D_x (из определения функционала φ_x). Предположим противное, т. е. что существует подпространство $D_1 \neq D$, $\operatorname{codim} D_1 = 1$, $x \notin D_1$, и такое, что $\| P^x_{D_1} \| \leqslant \| P^x_D \|$. Пусть f_1 — функционал из B^* такой, что $D_1 = f_1^{-1}(0)$. Очевидно, $[f_1] \neq [f]$. В силу леммы 2 $\| P^{f_1}_{\tilde{D}} \| = \| P^x_{D_1} \|$ и $\| P^f_{\tilde{D}} \| = \| P^x_D \|$. Из предположения получим $\| P^f_{\tilde{D}} \| \geqslant \| P^{f_1}_{\tilde{D}} \|$, что, в силу единственности минимального проектора в B^*, означает $[f_1] = [f]$, вопреки выбору f_1.

Следствие 1. *Пусть* B — *равномерно гладкое, строго нормированное пространство. Тогда для любого* $x \in B \setminus \theta$ *определен функционал* φ_x.

Доказательство. В силу равномерной гладкости B пространство B^* равномерно выпуклое и рефлексивное, что влечет единственность минимальных проекторов (на подпространство коразмерности 1) в B^* с нормой, строго большей 1 (см. [11]). Строгая нормируемость B влечет гладкость пространства B^*, что обеспечивает единственность минимальных проекторов в B^* с единичной нормой (см., например, [12]).

Замечание 1. а) Если x — некоторый элемент банахова пространства B, $x \neq \theta$, то для существования φ_x, вообще говоря, рефлексивность пространства B не является необходимой. Пусть, например, $B = \boldsymbol{c}_0$. Пусть $x = (1/2, 1/2, 0, 0, \ldots)$. В силу теоремы 3 из [8] на подпространство $\widetilde{D} \subset (\boldsymbol{c}_0)^*$, где $\widetilde{D} = (x^{**})^{-1}(0)$, существует единственный минимальный проектор $P_{\widetilde{D}}$ (кстати, его норма равна 1). Пусть $f \in P_{\widetilde{D}}^{-1}(\theta^*)$ и $\| f \|_{l_1} = 1$. Положим $D = f^{-1}(0)$. В силу леммы 2 легко показать, что подпространство D совпадает с подпространством D_x из определения φ_x. В то же время, как хорошо известно, пространство $\boldsymbol{c}_0$ не рефлексивное.

б) Пример 1 показывает, что гладкость пространства B не является необходимым условием существования φ_x для любого $x \in B \setminus \theta$. С другой стороны, гладкость пространства B не является и достаточным условием существования φ_x для любого $x \in B \setminus \theta$. Соответствующие примеры (уже для двумерного пространства) легко строятся.

в) Если $2 \leqslant \dim B \leqslant 3$, то для выполнения условий теоремы 1 достаточно, чтобы B было строго нормировано (см. [12, 13]).

г) Если $\dim B = 4$, то для выполнения условий теоремы 1 строгой нормируемости B (т. е. гладкости B^*) уже недостаточно. Действительно, пусть B_1 — такое гладкое трехмерное пространство и D — такое его двумерное подпространство, что норма минимального проектора P из B_1 на D больше 1, причем P проектирует вдоль e_1: $\| e_1 \| = 1$. Пусть $e_2 \notin B_1$, K_1 — единичный шар в B_1 (т. е. $K_1 = \{x \in B_1 \colon \| x \| \leqslant 1\}$), $K_2 = \bigcup \{te_2 + \sqrt{1 - t^2}K_1 \colon \ | t | \leqslant 1\}$ — гладкое четырехмерное тело. Пусть $K_3 = \bigcup \{te_2 + K_1 \cap D \colon | t | \leqslant 10\} \cup \bigcup \{te_2 + \sqrt{1 - (| t | - 10)^2}\ (K_1 \cap D) \colon 10 < | t | \leqslant 11\}$,

$$K_4 = \bigcup \{te_1 + \sqrt{1 - t^2}K_3 \colon \ | t | \leqslant 1\}$$

— гладкое четырехмерное тело. Нетрудно показать, что выпуклая оболочка множеств K_2 и K_4 является шаром гладкого пространства B^*, в котором минимальный проектор на подпространство, порожденное D и e_2, неединственный. (Подробнее об условиях единственности минимальных проекторов см., например, [8, 14]).

2. ТЕОРЕМА 2. *Пусть B — равномерно гладкое строго нормированное пространство. Для того чтобы B было изометрически изоморфно гильбертову пространству, необходимо и достаточно, чтобы для любых $x, y \in B \setminus \theta$*

$$\| x \| \varphi_x (y) = \| y \| \varphi_y (x). \tag{9}$$

Доказательство. а) Пусть H — гильбертово пространство, и $\Psi(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение, согласованное с его нормой. Легко видеть, что для любого $x \in H \setminus \theta$ гиперподпространство D_x совпадает с подпространством элементов, ортогональных x, и при этом $\Psi(x, y) = \| x \| \varphi_x (y)$.

б) Пусть для любых $x, y \in B \setminus \theta$ выполняется условие (9). На множестве пар $B \times B = \{(x, y)\colon x \in B, y \in B\}$ рассмотрим функционал $\Psi(\cdot, \cdot)$, полагая $\Psi(\theta, y) = 0$, а при $x \neq \theta$ $\Psi(x, y) = \| x \| \varphi_x (y)$. В силу линейности функционала φ_x и условия (9) непосредственно видно, что $\Psi(\cdot, \cdot)$ — билинейный и симметричный функционал и, кроме того, $\Psi(x, x) = \| x \|^2$, т. е. в B можно ввести скалярное произведение, согласованное с его нормой.

Замечание 2. В гладких пространствах Банаха опорный функционал в любой точке $x \in B \setminus \theta$ единственный и совпадает с функционалом $g(x, \cdot)$, определяемым для любого $y \in B$,

$$g(x, y) = \lim_{t \to 0} t^{-1} (\| x + ty \| - \| x \|).$$

В классе гладких пространств Банаха характеристикой пространства со скалярным произведением может служить сходное с (9) условие

$$\| x \| g(x, y) = \| y \| g(y, x), \tag{10}$$

если оно выполняется для всех $x, y \neq \theta$. Более того, как следует из определения 1, в гильбертовом пространстве H для любого $x \in H \setminus \theta$ функционал φ_x совпадает с опорным функционалом, т. е.

$$\varphi_x = g(x, \cdot). \tag{11}$$

Из (1), леммы 1, а также из того факта, что $\| g(x, \cdot) \| = 1$ для любого $x \neq \theta$ (см. [15]), легко следует следующее

Предложение 1. *Пусть B — равномерно гладкое строго нормированное пространство. Пусть $x \in B \setminus \theta$. Для того чтобы функционал φ_x был опорным,* *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\| \varphi_x \| = 1. \qquad (12)$$

Замечание 3. Нетрудно построить пример равномерно гладкого строго нормированного n-мерного пространства ($n = 2, 3, \ldots$) такого, что для некоторых $x \in B \setminus \theta$ $\| \varphi_x \| > 1$, т. е. функционал φ_x окажется отличным от опорного.

С другой стороны, уже пример 1 показывает, что может существовать такая перенормировка пространства B, в результате которой любой функционал φ_x (из B^*) окажется опорным. Автору неизвестно, верен ли этот факт для любого пространства, в котором можно определить функционал φ_x для каждого $x \in B \setminus \theta$.

3. С. Банах [1] поставил вопрос о том, характеризует ли гильбертово пространство тот факт, что для фиксированного $k \geqslant 2$ все подпространства размерности k изометричны между собой. Проблема эта полностью еще не решена (см. [3] и [1]). Сформулируем проблему, двойственную проблеме С. Банаха:

(Б^0) Пусть B — банахово пространство и k — натуральное число ($k \geqslant 1$). Предположим, что все подпространства коразмерности k изометричны между собой ($\dim B \geqslant k + 1$). Верно ли, что тогда B изометрично гильбертову пространству?

Замечание 4. Очевидно, что для конечномерных пространств проблема С. Банаха и проблема (Б^0) совпадают.

Иначе в бесконечномерном случае. Ролевич с Пелчинским построил пример рефлексивного, изотропного, не сепарабельного пространства $X = L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, $p \notin \{1, 2, \infty\}$, не изометричного гильбертову пространству (см. [16, предложение IX.6.7). Как нетрудно получить из результатов работы [6], все подпространства коразмерности 1 пространства X изометричны между собой. Следовательно, если $\dim B = \infty$, то в формулировке проблемы (Б^0) следует дополнительно предполагать сепарабельность пространства B. Интересно отметить, что в пространстве X, построенном Ролевичем, норма любого функционала φ_x постоянна и строго больше 1.

В заключение автор выражает глубокую благодарность рецензенту за ценные замечания.

Ленинградский финансово-экономический институт
им. Н. А. Вознесенского

Поступило
06.02.84

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Banach S. Oeuvres, v. II.— Warszawa: PWN, 1979.
[2] Дэй М. М. Нормированные линейные пространства.— М.: ИЛ, 1961.
[3] Пелчинский А. О некоторых проблемах Банаха.— Успехи мат. наук, 1973, т. 28, вып. 6, с. 67—75.
[4] Зайденберг М. Г., Скорик А. И. О группах изометрий, содержащих отражения.— Функцион. анализ и его прил., 1976, т. 10, № 4, с. 87—88.
[5] Kapoor O. P., Mathur S. B. Some geometric charactesations of inner product spaces.— Bull. Austral. Math. Soc., 1981, v. 24, № 2, p 239—246.
[6] Odinec V. P. On a property of reflexive Banach spaces with a transitive norm.—Bull. Acad. Polon. Sci., 1982, v. 30, № 7—8, p. 353—357.
[7] Papini P. L. Approximation and norm derivatives in real normed spaces. — Result. Math., 1982, v. 5, № 1, p. 81—94.
[8] Blatter J., Cheney E. W. Minimal projections on Hyperplanes in sequences spaces.— Ann. Math. Pura Appl., 1974, v. 101, p. 215—227.
[9] Гурарий В. И. О растворах и наклонах подпространств банахова пространства.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., вып. 1, 1965, Харьков: Изд-во ХГУ, с. 194—201.
[10] Isbell J. R., Semadeni Z. Projection constants and spaces of continous functions.— Trans. Amer. Math. Soc., 1963, v. 30, № 1, p. 38—48.
[11] Одинец В. П. Минимальные проекции. Условия единственности.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1978, вып. 30, Харьков, с. 101—108.
[12] Одинец В. П. Об условиях единственности проектора с единичной нормой.— Математические заметки, 1977, т. 22, вып. 1, с. 45—49; т. 22, № 6, с. 928.
[13] Одинец В. А. О единственности минимальных проекций.— Изв. вузов. Математика, 1978, № 2, с. 73—75.
[14] Odinec V. P. Remarks on the uniqueness of minimal projection with nonunit norm.— Bull. Acad. Polon. Sci., 1981, v. 29, № 3—4, p. 145—151.
[15] Poulsen E. T. Eindeutige Hahn—Banach—Erweiterungen.— Math. Ann., 1966, v. 162, p. 225—227.
[16] Rolewicz S. Metric linear spaces.— Warszawa: PWN, 1972.