Краткие сообщения

УДК 517.9

МЕТРИКА НА СФЕРЕ, ГЕОДЕЗИЧЕСКИ ЭКВИВАЛЕНТНАЯ МЕТРИКЕ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ, САМА ЯВЛЯЕТСЯ МЕТРИКОЙ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

В. С. Матвеев, П. Топалов

Рассмотрим поверхность P^2 с двумя гладкими метриками G и $\hat{G}$. Метрики G и $\hat{G}$ называются *геодезически эквивалентными*, если геодезические линии метрики G совпадают как множества точек с геодезическими линиями метрики $\hat{G}$. Основным результатом настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Любая метрика на сфере, геодезически эквивалентная метрике постоянной кривизны, тоже является метрикой постоянной кривизны.*

Наиболее близким к этой теореме классическим результатом является следующая теорема Бельтрами (см., например, [1]).

Любая метрика на проективной плоскости RP^2, геодезически эквивалентная метрике постоянной кривизны, сама является метрикой постоянной кривизны.

Заметим, что наша теорема напрямую не вытекает из теоремы Бельтрами. Априори не ясно, что метрика, геодезически эквивалентная метрике постоянной кривизны, сохраняется центральной симметрией.

Также напомним, что для размерности 3 и больше утверждение теоремы есть факт локальный: метрика на R^n, $n > 2$, геодезически эквивалентная метрике постоянной кривизны, сама является метрикой постоянной кривизны (см., например, [1]).

Доказательство теоремы. Пусть мы имеем две гамильтоновы системы v и $\hat{v}$ на соответственно симплектических многообразиях (M^4, ω) и $(\hat{M}^4, \hat{\omega})$. Предположим, что эти гамильтоновы системы гладко траекторно эквивалентны на регулярных изоэнергетических поверхностях $Q^3 \subset M^4$ и $\hat{Q}^3 \subset \hat{M}^4$, т.е. пусть существует диффеоморфизм $\xi : Q^3 \to \hat{Q}^3$, переводящий траектории гамильтоновой системы v в траектории гамильтоновой системы $\hat{v}$. Тогда диффеоморфизм ξ позволяет построить интеграл гамильтоновой системы v [2]. Действительно, обозначим через σ ограничение формы ω на Q^3.

Лемма. *Верны следующие утверждения:*

1) *форма $\xi^*\hat{\sigma}$ сохраняется потоком поля v;*

2) *в каждой точке изоэнергетической поверхности Q^3 формы σ и $\xi^*\hat{\sigma}$ пропорциональны;*

3) *коэффициент пропорциональности (будем обозначать I) форм σ и $\xi^*\hat{\sigma}$ является интегралом гамильтоновой системы v.*

Доказательство леммы. Рассмотрим производную Ли $L_v(\xi^*\hat{\sigma})$ формы $\xi^*\hat{\sigma}$ по векторному полю v. Для доказательства леммы достаточно показать, что она равна нулю. По определению имеем

$$L_v(\xi^*\hat{\sigma}) = i_v\ d[\xi^*\hat{\sigma}] + d[i_v\xi^*\hat{\sigma}].$$

Первый член стоящей справа суммы равен нулю, так как форма $\hat{\sigma}$ замкнута. Поэтому форма $\xi^*\hat{\sigma}$ тоже замкнута и дифференциал ее равен нулю.

Второй член стоящей справа суммы тоже равен нулю. Действительно, в каждой точке $\hat{Q}^3$ линейные оболочки векторов $\hat{v}$ совпадают с ядрами формы $\hat{\sigma}$. Аналогично, в каждой точке Q^3 линейные оболочки векторов v совпадают с ядрами формы σ. Так как диффеоморфизм ξ переводит траектории в траектории, то векторное поле $\xi^*\hat{v}$ коллинеарно векторному полю v. Поэтому $i_v\xi^*\hat{\sigma} \equiv 0$ и $d[i_v\xi^*\hat{\sigma}] \equiv 0$. Первое утверждение леммы доказано.

Пропорциональность форм σ и $\xi^*\hat{\sigma}$ есть локальный факт: если ядра двух кососимметрических форм на трехмерном линейном векторном пространстве совпадают, то формы пропорциональны. Известно, что форма σ сохраняется при сдвиге вдоль гамильтонова векторного поля v. В силу первого утверждения леммы форма $\xi^*\hat{\sigma}$ тоже сохраняется при сдвигах вдоль гамильтонова векторного поля v. Поэтому коэффициент пропорциональности I является интегралом. Лемма доказана.

Похожая идея построения интеграла использовалась в [3].

Пусть метрики G и $\hat{G}$, заданные на поверхности P^2, геодезически эквивалентны. Рассмотрим их геодезические потоки. Под геодезическим потоком метрики G мы понимаем гамильтонову систему на T^*P^2 с гамильтонианом $H \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}|p|_G^2$, где через p обозначен импульс, а $|.|_G$ обозначает норму импульса p, взятую в метрике G. Геодезические потоки метрик G и $\hat{G}$ траекторно эквивалентны. В качестве диффеоморфизма, переводящего траектории геодезического потока метрики G в траектории геодезического потока метрики $\hat{G}$, можно взять отображение $\xi : Q^3 \to \hat{Q}^3$, $\xi(x,p) \overset{\text{def}}{=} (x, \frac{|p|_G}{|p|_{\hat{G}}}p)$, где через x обозначена точка на поверхности P^2, а через p — импульс. После некоторых вычислений получаем, что интеграл $I : Q^3 \to R$, строящийся по диффеоморфизму ξ указанным в лемме способом, задается формулой

$$I = \frac{\det(\hat{H})}{\det(H)} \frac{H^{\frac{3}{2}}}{\hat{H}^{\frac{3}{2}}}, \tag{1}$$

где через $\det(H)$ обозначается детерминант соответствующей квадратичной формы от импульсов (т.е. если функция H задается формулой $H(x,y,p_x,p_y) = a(x,y)p_x^2 + 2b(x,y)p_xp_y + c(x,y)p_y^2$, то $\det(H) \overset{\text{def}}{=} a(x,y)c(x,y) - b^2(x,y)$).

Пусть теперь поверхность P^2 является сферой, а метрика $\hat{G}$ является метрикой постоянной кривизны. Тогда, очевидно, существуют два независимых линейных по импульсам интеграла геодезического потока метрики $\hat{G}$. В обратную сторону утверждение тоже верно: если геодезический поток некоторой метрики на сфере допускает два независимых линейных по импульсам интеграла, то эта метрика $\hat{G}$ является метрикой постоянной кривизны — более сильное утверждение доказано в [4].

Рассмотрим какие-нибудь координаты x, y на плоскости. Через p_x, p_y будем обозначать импульсы, канонически сопряженные координатам x, y соответственно. Пусть линейные по импульсам интегралы F_1 и F_2 геодезического потока метрики $\hat{G}$ в координатах x, y, p_x, p_y задаются формулами

$$F_1(x,y,p_x,p_y) = a_1(x,y)p_x + b_1(x,y)p_y\,,$$

$$F_2(x,y,p_x,p_y) = a_2(x,y)p_x + b_2(x,y)p_y\,.$$

Рассмотрим функции ξ^*F_1 и ξ^*F_2. Так как отображение ξ является траекторной эквивалентностью, то функции ξ^*F_1 и ξ^*F_2 являются интегралами геодезического потока метрики G. Пользуясь тем, что отображение ξ задается формулой $\xi(x,p) \overset{\text{def}}{=} (x, \frac{|p|_G}{|p|_{\hat{G}}}p)$, получаем

$$\xi^*F_1 = \frac{|p|_G}{|p|_{\hat{G}}}(a_1(x,y)p_x + b_1(x,y)p_y)\,,$$

$$\xi^*F_2 = \frac{|p|_G}{|p|_{\hat{G}}}(a_2(x,y)p_x + b_2(x,y)p_y)\,.$$

Используя формулу (1), находим

$$\xi^*F_1 = I^{\frac{1}{3}}(\alpha_1(x,y)p_x + \beta_1(x,y)p_y)\,,$$

$$\xi^*F_1 = I^{\frac{1}{3}}(\alpha_2(x,y)p_x + \beta_2(x,y)p_y)\,,$$

где $\alpha_i \overset{\text{def}}{=} a_i \left[\frac{\det(H)}{\det(\hat{H})}\right]^{\frac{1}{3}}$ и $\beta_i \overset{\text{def}}{=} b_i \left[\frac{\det(H)}{\det(\hat{H})}\right]^{\frac{1}{3}}$.

Так как функция I является интегралом, то у геодезического потока метрики G существуют два независимых линейных по импульсам интеграла, и поэтому метрика G является метрикой постоянной кривизны.

Авторы пользуются случаем поблагодарить своих научных руководителей А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко за ценные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эйзенхарт Л.П.* Риманова геометрия. М., 1948.
2. *Топалов П.Й.* Тензорные инварианты натуральных механических систем на компактных поверхностях и соответствующие им интегралы //Матем. сб. 1977. **188**, № 2. 138–158.
3. *Bolotin S.V., Kozlov V.V.* Symmetry fields of geodesic flows //Rus. J. Math. Phys. 1995. **3**, N 3. 279–295.
4. *Колокольцов В.Н.* Полиномиальные интегралы геодезических потоков на компактных поверхностях: Канд. дис. М., 1984.

Поступила в редакцию
26.03.97

УДК 517.51

ОСОБЕННОСТИ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ТЕОРЕМ ПРИБЛИЖЕНИЯ p-АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

С. С. Волосивец

Пусть $f(x)$ — действительная ограниченная 2π-периодическая функция, а $\xi = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x_0 + 2\pi\}$ — разбиение периода. Величину $æ_\xi^p(f) = (\sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p)^{1/p}$ будем называть вариационной суммой p-го порядка для $f(x)$ по разбиению ξ. При $k \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$ положим по определению $\omega_{1-1/p}(f,\delta) = \sup\{æ_\xi^p(f) \,:\, \max_i(x_i - x_{i-1}) \leqslant \delta\}$ и $\omega_{k-1/p}(f,\delta) = \sup\{\omega_{1-1/p}(\Delta_h^{k-1} f(x), |h|) \,:\, |h| \leqslant \delta\}$ при $k \geqslant 2$. Здесь $\Delta_h^k f(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} f(x+ih)$ — k-я разность функции $f(x)$ с шагом h. При $1 < p < \infty$ рассматриваются два пространства функций $V_p = \{f \,:\, \omega_{1-1/p}(f, 2\pi) < \infty\}$ и $C_p = \{f \in V_p : \lim\limits_{\delta\to 0} \omega_{1-1/p}(f,\delta) = 0\}$. Первое из них введено Винером [1], второе — Юнгом [2]. Оба этих пространства являются банаховыми, если в них задать норму $\|f\|_p = \max(\omega_{1-1/p}(f,2\pi), \sup\limits_{[0,2\pi]} |f(x)|)$. Как обычно, если T_n — множество тригонометрических полиномов степени не выше n, то $E_n(f)_p = \inf\{\|f - t_{n-1}\|_p : t_{n-1} \in T_{n-1}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Терехин [3] установил прямые и обратные теоремы приближения в пространстве C_p тригонометрическими полиномами ($1 < p < \infty$, $k, n \in \mathbb{N}$):

$$E_n(f)_p \leqslant C\omega_{k-1/p}(f, 1/n), \tag{1}$$

$$\omega_{k-1/p}(f, 1/n) \leqslant Cn^{-k+1/p} \sum_{i=1}^{n} i^{k-1/p-1} E_i(f)p. \tag{2}$$

Аналогичные неравенства были им получены и для дифференцируемых функций. Объединяя (1) и (2), имеем неравенство

$$\omega_{k-1/p}(f, 1/n) \leqslant Cn^{-k+1/p} \sum_{i=1}^{n} i^{k-1/p-1} \omega_{j-1/p}(f, 1/i),$$

где $k, j \in \mathbb{N}$, $p > 1$. Автором было получено его уточнение, см. [4, теорема 4]. В настоящей заметке формулируются уточнения неравенств (1) и (2). При их доказательстве использованы метод из [4] и результаты Тимана (см. [5, 6]) и Кокилашвили (см. [7]).

Теорема 1. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 < p < \infty$, $\gamma = \max(p, r)$, *а* $f(x)$ — 2π-*периодическая функция, такая, что* $f^{(r)}(x)$ *существует везде и* $f^{(r)} \in C_p$. *Тогда*

$$\omega_{k-1/p}(f^{(r)}, 1/n) \geqslant Cn^{-k+1/p} \left\{ \sum_{i=1}^{n} i^{\gamma(k+r-1/p)-1} E_i^\gamma(f)_p \right\}^{1/\gamma}.$$