

## Идеалы квантования неабелевых интегрируемых систем

А. В. Михайлов

Рассматриваются динамические системы на пространстве функций со значениями в свободной ассоциативной алгебре [1], [2]. Система называется интегрируемой, если она обладает бесконечномерной алгеброй Ли коммутирующих симметрий. В работе предлагается новый подход к проблеме квантования динамических систем, вводится понятие идеалов квантования и даются содержательные примеры.

Для иллюстрации подхода мы выбрали интегрируемые неабелевы системы, а именно цепочку Вольтерра (i) и  $N$ -цепочки Богоявленского (ii) [3]:

$$(i) \ u_t = u_1 u - u u_{-1}, \quad (ii) \ u_t = \sum_{k=1}^N (u_k u - u u_{-k}). \quad (1)$$

Это бесконечные системы уравнений, в которых мы используем стандартные обозначения  $u = u_0 = u(n, t)$ ,  $u_k = u_k(n, t) = u(n + k, t)$ ,  $n, k \in \mathbb{Z}$ . В уравнениях (1) функции  $u_k$  являются элементами свободной ассоциативной алгебры  $\mathfrak{A} = \mathbb{K}\langle \dots, u_{-1}, u, u_1, \dots \rangle$  над полем констант  $\mathbb{K}$  нулевой характеристики.

Традиционные теории квантования стартуют с классических систем для функций со значениями в коммутативных алгебрах. В этой работе предлагается новый подход к проблеме квантования, который отправляется от систем, определенных на свободных ассоциативных алгебрах. В этом подходе задача квантования сводится к описанию двусторонних идеалов, задающих перестановочные соотношения в факторалгебре и являющихся инвариантными относительно динамики системы. Мы начнем с рассмотрения двусторонних идеалов  $\mathfrak{J}_F$  алгебры  $\mathfrak{A}$ , порожденных бесконечным набором полиномов:

$$\mathfrak{J}_F = \{ \{ F_{p,q} = u_q u_p - \omega_{p,q} u_p u_q \mid p, q \in \mathbb{Z}, p > q, \omega_{p,q} \in \mathbb{K}^* \} \}, \quad (2)$$

и выясним, какими должны быть структурные константы  $\omega_{p,q}$ , чтобы уравнения (1) могли быть ограничены на факторалгебру  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{J}_F} = \mathfrak{A}/\mathfrak{J}_F$ . В этом случае мы будем говорить, что система (1) допускает  $\mathfrak{J}_F$ -квантование и определена на квантованной алгебре  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{J}_F}$ .

В общем случае под квантованной алгеброй мы понимаем такую некоммутативную факторалгебру  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{J}} = \mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ , которая обладает аддитивным базисом лексикографически упорядоченных мономов вида  $u_{i_1}^{a_1} u_{i_2}^{a_2} \dots u_{i_n}^{a_n}$  от конечного или бесконечного числа переменных, где  $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ ,  $i_k \in \mathbb{Z}$ . Идеал  $\mathfrak{J}$  определяет коммутационные соотношения в факторалгебре, и мы называем его идеалом квантования. В конечно порожденном случае говорят, что алгебра  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{J}}$  обладает базисом Пуанкаре–Биркгофа–Витта.

Алгебра  $\mathfrak{A}$  имеет естественный автоморфизм, порождаемый оператором сдвига  $S(u_k) = u_{k+1}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Дифференцирования  $D_f$  алгебры  $\mathfrak{A}$ , коммутирующие с автоморфизмом  $S$ , называются эволюционными. Эволюционное дифференцирование достаточно задать на образующей  $D_f(u) = f \in \mathfrak{A}$ , и оно находится во взаимно однозначном соответствии с системой дифференциально-разностных уравнений

$$(u_k)_{t_f} := D_f(u_k) = S^k f, \quad f = f(\dots, u_{-1}, u, u_1, \dots) \in \mathfrak{A}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Симметрией уравнения (3) называется эволюционное дифференцирование  $D_g$ , коммутирующее с  $D_f$ , или, иными словами, эволюционная система уравнений  $u_{t_g} = g$ , совместная с (3). Симметрии  $D_{g_1}, D_{g_2}$  называются коммутирующими, если  $[D_{g_1}, D_{g_2}] = 0$ . Дифференцирование  $D_f$  алгебры  $\mathfrak{A}$ , переводящее двусторонний идеал  $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{A}$  в себя ( $D_f(\mathfrak{J}) \subseteq \mathfrak{J}$ ), канонически индуцирует дифференцирование  $\mathcal{D}_f$  на  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{J}}$ . Если  $S^\ell(\mathfrak{J}) \subseteq \mathfrak{J}$

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2020-1514) и EPSRC (грант EP/P012655/1).

для некоторого целого  $\ell > 0$ , то  $S^\ell$  является автоморфизмом алгебры  $\mathfrak{A}_3$ , коммутирующим с  $\mathcal{D}_f$ . Это позволяет ограничить систему (3) на  $\mathfrak{A}_3$ .

Начнем со случая неабелевой цепочки Вольтерра (1), (i), и ее симметрии

$$u_\tau = uu_{-1}u_{-2} + uu_{-1}u_{-1} + uuu_{-1} - u_1uu - u_1u_1u - u_2u_1u. \tag{4}$$

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.** Уравнение (4) ограничивается на алгебру  $\mathfrak{A}_{3_F}$  только в случаях (а)  $\omega_{n+1,n} = \alpha$ ,  $\omega_{n,m} = 1$ , (б)  $\omega_{n+1,n} = (-1)^n\alpha$ ,  $\omega_{n,m} = -1$ ;  $n - m \geq 2$ . Неабелево уравнение Вольтерра ограничивается на алгебру  $\mathfrak{A}_{3_F}$  только в случае (а).

Имеются основания утверждать, что все симметрии иерархии уравнения Вольтерра допускают квантование (а) и  $S(\mathfrak{J}_F) = \mathfrak{J}_F$ . Если ограничиться уравнениями иерархии нечетных степеней, то для них имеется альтернативное квантование (б), при котором  $S^2(\mathfrak{J}_F) = \mathfrak{J}_F$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.** Неабелева  $N$ -цепочка (1), (ii), допускает  $\mathfrak{J}_F$ -квантование только в случае, когда  $\omega_{n+k,n} = \alpha$ , где  $1 \leq k \leq N$ ,  $\alpha \neq 0$ , и  $\omega_{n,m} = 1$  при  $n - m > N$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.** Имеет место модифицированная неабелева 2-цепочка Богоявленского вида

$$u_t = u_2u_1uu + u_1uu_{-1}u - uu_1uu_{-1} - uuu_{-1}u_{-2}. \tag{5}$$

Система (5) допускает  $\mathfrak{J}_F$ -квантование только в случае  $\omega_{3n+1,3m} = \alpha$ ,  $\omega_{3n+2,3m} = \beta$ ,  $\omega_{3n+3,3m} = \alpha^{-1}\beta^{-1}$ ,  $\alpha, \beta \neq 0$ ,  $n \geq m$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}$ .

Квантование цепочки (5) определяется двумя независимыми параметрами “деформации”  $\alpha, \beta$ . С увеличением  $N$  число независимых параметров также увеличивается. В случае  $N = 3$  квантование соответствующей модифицированной цепочки задается четырьмя независимыми параметрами.

Периодические замыкания цепочек  $u_{k+M} = u_k$  с периодом  $M$  приводят к неабелевым системам обыкновенных дифференциальных уравнений на функции со значениями в конечно порожденной свободной алгебре  $\mathfrak{A}^M = \mathbb{K}\langle u_1, \dots, u_M \rangle$  с единицей. В этом случае система может допускать неоднородные идеалы квантования вида  $\mathfrak{J}_G = \{ \{ G_{p,q} = u_q u_p - \omega_{p,q} u_p u_q + \sum_{r=1}^M \sigma_{p,q}^r u_r + \eta_{p,q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, p > q, \omega_{p,q} \neq 0, \omega_{p,q}, \sigma_{p,q}^r, \eta_{p,q} \in \mathbb{K} \} \}$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.** Неабелева периодическая цепочка Вольтерра (1), (i), с периодом  $M$  допускает  $\mathfrak{J}_G$ -квантование тогда и только тогда, когда выполнены коммутационные соотношения (константы  $\alpha, \beta, \gamma, \eta \in \mathbb{K}$ ,  $\alpha \neq 0$ , являются произвольными):

$$\begin{aligned} M = 2: & \quad uu_1 = \alpha u_1 u + \beta u_1 + \gamma u + \eta; \\ M = 3: & \quad u_n u_{n+1} = \alpha u_{n+1} u_n + \beta(u + u_1 + u_2) + \eta, \quad n \in \mathbb{Z}_3; \\ M = 4: & \quad u_1 u_2 = \alpha u_2 u_1 + \beta u_2 + \gamma u_1 - \beta \gamma, \quad u_1 u_3 = u_3 u_1 - \beta u_2 + \beta u_4, \\ & \quad u_4 u_1 = \alpha u_1 u_4 + \beta u_4 + \gamma u_1 - \beta \gamma, \quad u_2 u_3 = \alpha u_3 u_2 + \beta u_2 + \gamma u_3 - \beta \gamma, \\ & \quad u_2 u_4 = u_4 u_2 - \gamma u_3 + \gamma u_1, \quad u_3 u_4 = \alpha u_4 u_3 + \beta u_4 + \gamma u_3 - \beta \gamma; \\ M \geq 5: & \quad u_{n+1} u_n = \alpha u_n u_{n+1}, \quad u_n u_m = u_m u_n, \quad |n - m| > 1, \quad n, m \in \mathbb{Z}_M. \end{aligned}$$

Автор благодарен В. М. Бухштаберу и В. В. Соколову за полезное обсуждение.

### Список литературы

[1] P. Etingof, I. Gelfand, V. Retakh, *Math. Res. Lett.*, **5**:1-2 (1998), 1–12. [2] A. V. Mikhailov, V. V. Sokolov, *Comm. Math. Phys.*, **211**:1 (2000), 231–251. [3] О. И. Богоявленский, *УМН*, **46**:3(279) (1991), 3–48.

**А. В. Михайлов** (A. V. Mikhailov)  
 University of Leeds, Leeds, UK;  
 Центр интегрируемых систем, ЯрГУ им. П. Г. Демидова  
 E-mail: a.v.mikhailov@leeds.ac.uk

Представлено С. П. Новиковым  
 Принято редколлегией  
 05.08.2020