

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

P. B. Zatitskiy, P. Ivanishvili, D. M. Stolyarov, Bellman vs Beurling: sharp estimates of uniform convexity for  $L^p$  spaces, *Algebra i Analiz*, 2015, Volume 27, Issue 2, 218–231

<https://www.mathnet.ru/eng/aa1431>

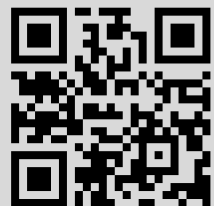
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.169

April 21, 2025, 08:42:21



**БЕЛЛМАН ПРОТИВ БЁРЛИНГА:  
ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ РАВНОМЕРНОЙ ВЫПУКЛОСТИ  
ПРОСТРАНСТВ  $L^p$**

© П. Б. ЗАТИЦКИЙ, П. ИВАНИСВИЛИ, Д. М. СТОЛЯРОВ

С помощью метода функции Беллмана мы получаем точные оценки модулей равномерной выпуклости пространств Лебега  $L^p$ , найденные ранее Кларксоном и Бёрлингом. Простые идеи дифференциальной геометрии позволяют нам найти соответствующую этой задаче функцию Беллмана без „волшебных догадок“ и громоздких вычислений.

§1. Классические результаты

В работе [4] 1936 г. Кларксон ввел понятие равномерной выпуклости нормированного пространства.

**Определение 1.** Нормированное пространство  $(X, \|\cdot\|)$  называется равномерно выпуклым, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что если  $x, y \in X$ ,  $\|x\| = \|y\| = 1$  и  $\|x - y\| \geq \varepsilon$ , то  $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta$ .

В той же работе было доказано, что классические пространства Лебега  $L^p$  равномерно выпуклы при  $p \in (1, +\infty)$ . Это утверждение является элементарным следствием следующих неравенств, доказанных Кларксоном. Здесь и далее все нормы — нормы пространства  $L^p$ , если не указано иное.

**Теорема 1** (Неравенства Кларксона, 1936). Пусть  $\varphi, \psi \in L^p$ . Если  $p \in [2, +\infty)$ , то  $2^{p-1}(\|\varphi\|^p + \|\psi\|^p) \geq \|\varphi + \psi\|^p + \|\varphi - \psi\|^p$ . Если  $p \in (1, 2]$ , то  $2(\|\varphi\|^p + \|\psi\|^p)^{q/p} \geq \|\varphi + \psi\|^q + \|\varphi - \psi\|^q$ , где  $q = p/(p-1)$  — сопряженный с  $p$  показатель.

---

*Ключевые слова:* функция Беллмана, равномерная выпуклость, кручение.

Первый автор — работа поддержана Лабораторией им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант правительства РФ 11.G34.31.0026; ОАО “Газпром Нефть”; грантом президента РФ для молодых исследователей МК-6133.2013.1; грантами РФФИ 13-01-12422 офи\_m2, 14-01-00373\_A; грантом СПбГУ (тематический проект 6.38.223.2014).

Второй автор — работа была выполнена во время посещения программы математического института Хаусдорфа, “Гармонический анализ и уравнения в частных производных”, автор благодарен институту Хаусдорфа за гостеприимство.

Третий автор — работа поддержана Лабораторией им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант правительства РФ 11.G34.31.0026; ОАО “Газпром Нефть”; грантом РФФИ 11-01-00526.

Позже возник вопрос о точной зависимости наибольшего возможного значения  $\delta$  от параметра  $\varepsilon$  в определении равномерной выпуклости. Функция  $\delta(\varepsilon)$  называется модулем равномерной выпуклости пространства. Оказалось, что неравенство Кларксона дает ответ на этот вопрос только при  $p \geq 2$ , а при  $p < 2$  — нет. Точную зависимость  $\delta(\varepsilon)$  впервые нашел Бёрлинг, сделавший об этом устный доклад в Уппсале в 1945 г. Его доказательство было позже записано и опубликовано Ханнером (см. [6]).

**Теорема 2** (Бёрлинг, 1945; Ханнер, 1956, Неравенства Ханнера). Пусть  $\varphi, \psi \in L^p$ . Если  $p \in [2, +\infty)$ , то

$$(\|\varphi\| + \|\psi\|)^p + \|\|\varphi\| - \|\psi\|\|^p \geq \|\varphi + \psi\|^p + \|\varphi - \psi\|^p.$$

Если  $p \in [1, 2]$ , то

$$(\|\varphi\| + \|\psi\|)^p + \|\|\varphi\| - \|\psi\|\|^p \leq \|\varphi + \psi\|^p + \|\varphi - \psi\|^p.$$

Воспользовавшись этими неравенствами, легко (см. [6]) получить оценку на  $\delta(\varepsilon)$ , которая является точной.

**Теорема 3.** 1) (Кларксон, 1936). Если  $p \in [2, +\infty)$ , то наилучшая константа  $\delta(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \leq 2$  задается равенством  $\delta(\varepsilon) = 1 - (1 - (\varepsilon/2)^p)^{1/p}$ .

2) (Бёрлинг, 1945; Ханнер, 1956). Если  $p \in [1, 2]$ , то наилучшая константа  $\delta(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \leq 2$  задается уравнением  $(1 - \delta + \varepsilon/2)^p + |1 - \delta - \varepsilon/2|^p = 2$ .

Доказательство Бёрлинга, записанное в работе [6], элементарно и отличается краткостью и изяществом. Сложность его, на наш взгляд, заключается в том, чтобы угадать подходящие неравенства. Цель настоящей работы — показать, как, используя метод функции Беллмана, получить ответ без „угадывания“, а следуя простым и естественным геометрическим соображениям.

Идея применения методов оптимального управления к задачам на стыке математического анализа и теории вероятностей принадлежит Буркхольдеру, который в работе [2] вычислил норму мартингального преобразования. Вольберг, Назаров и Трейль привнесли аналогичные методы (уже называемые функцией Беллмана) в гармонический анализ (историю развития см. в [8]). Работа Васюнина [10] по вычислению точных констант в обратном неравенстве Гёльдера для классов Макенхаупта положила начало вычислению точных функций Беллмана применительно к задачам гармонического анализа. Начиная с работы [9], метод стал получать теоретические основания (пока что на примере неравенств на пространстве ВМО), в работе [11] была разработана теория функций Беллмана, объединяющая

довольно широкий класс задач (см. также [7]). Стало ясно, что вычисление функции Беллмана — задача не только аналитическая или алгебраическая, важную роль играет геометрия графика функции Беллмана (его выпуклость, кручение кривой граничных данных и проч.).

## §2. Метод функции Беллмана

**2.1. Постановка.** Так как все бесконечномерные пространства  $L^p$  конечно-представимы друг в друге (см. [5, теорема 3.2]), модули равномерной выпуклости для них одинаковы; мы будем обсуждать равномерную выпуклость пространства  $L^p([0, 1])$  при  $p \in (1, +\infty)$ . Рассмотрим чуть более общую задачу, а именно будем искать максимум нормы  $\|\varphi + \psi\|$  при фиксированных  $\|\varphi\|, \|\psi\|, \|\varphi - \psi\|$ , где  $\varphi, \psi \in L^p$ . Для фиксированной точки  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  рассмотрим множество

$$T(x) = \{(\varphi, \psi) \in L^p \times L^p : \|\varphi\|^p = x_1, \|\psi\|^p = x_2, \|\varphi - \psi\|^p = x_3\}.$$

Определим функцию Беллмана  $B_3$  формулой

$$B_3(x) = \sup\{\|\varphi + \psi\|^p : (\varphi, \psi) \in T(x)\}.$$

Отметим, что множество  $T(x)$  пар функций  $(\varphi, \psi)$ , по которым берется супремум, непусто тогда и только тогда, когда  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$  и тройка чисел  $(x_1^{\frac{1}{p}}, x_2^{\frac{1}{p}}, x_3^{\frac{1}{p}})$  удовлетворяет неравенству треугольника. Таким образом, естественная область определения функции  $B_3$  — это замкнутый выпуклый конус

$$\Omega_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \geq 0, (x_1^{\frac{1}{p}}, x_2^{\frac{1}{p}}, x_3^{\frac{1}{p}}) \text{ удовлетворяет неравенству треугольника}\}.$$

Отметим, что искомый модуль равномерной выпуклости  $\delta(\varepsilon)$  выражается через функцию  $B_3$  следующим образом:

$$2^p(1 - \delta(\varepsilon))^p = \sup_{t \in [\varepsilon^p, 2^p]} B_3(1, 1, t). \quad (1)$$

Из определения очевидна однородность первой степени функции  $B_3$ :  $B_3(kx) = kB_3(x)$  для любого  $k \geq 0$  и  $x \in \Omega_3$ .

Отметим, что значения функции  $B_3$  на границе множества  $\Omega_3$  легко вычислить. Действительно, если  $\varphi, \psi \in L^p$  и  $x = (\|\varphi\|^p, \|\psi\|^p, \|\varphi - \psi\|^p) \in \partial\Omega_3$ , то неравенство Минковского для функций  $\varphi, \psi, \varphi - \psi$  обращается в равенство. Возможны три случая:

- 1)  $x_1^{\frac{1}{p}} = x_2^{\frac{1}{p}} + x_3^{\frac{1}{p}}$ , в этом случае  $B_3(x) = (x_1^{\frac{1}{p}} + x_2^{\frac{1}{p}})^p$ ;
- 2)  $x_2^{\frac{1}{p}} = x_1^{\frac{1}{p}} + x_3^{\frac{1}{p}}$ , в этом случае  $B_3(x) = (x_1^{\frac{1}{p}} + x_2^{\frac{1}{p}})^p$ ;

3)  $x_3^{\frac{1}{p}} = x_1^{\frac{1}{p}} + x_2^{\frac{1}{p}}$ , в этом случае  $\mathbf{B}_3(x) = |x_1^{\frac{1}{p}} - x_2^{\frac{1}{p}}|^p$ .

**2.2. Свойства функции Беллмана.** Одним из важнейших свойств функции Беллмана  $\mathbf{B}_3$  является вогнутость.

**Предложение 1.** *Функция  $\mathbf{B}_3$  вогнута на области  $\Omega_3$ .*

**Доказательство.** Нужно доказать, что для любых двух точек  $x^{(1)}, x^{(2)} \in \Omega_3$  и любого  $\alpha \in (0, 1)$  выполнено неравенство

$$\mathbf{B}_3(\alpha x^{(1)} + (1 - \alpha)x^{(2)}) \geq \alpha \mathbf{B}_3(x^{(1)}) + (1 - \alpha)\mathbf{B}_3(x^{(2)}).$$

Для любого  $\theta > 0$  для  $i = 1, 2$  найдем пару функций  $(\varphi_i, \psi_i) \in T(x^{(i)})$  таких, что  $\|\varphi_i + \psi_i\|^p \geq \mathbf{B}_3(x^{(i)}) - \theta$ . Рассмотрим конкатенацию  $\varphi$  функций  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  с весами  $\alpha$  и  $1 - \alpha$  соответственно, т.е. функцию

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(\frac{t}{\alpha}), & t \in [0, \alpha]; \\ \varphi_2(\frac{t-\alpha}{1-\alpha}), & t \in (\alpha, 1]. \end{cases}$$

Аналогично определим конкатенацию  $\psi$  функций  $\psi_1$  и  $\psi_2$  с весами  $\alpha$  и  $1 - \alpha$  соответственно. Ясно, что  $(\varphi, \psi) \in T(\alpha x^{(1)} + (1 - \alpha)x^{(2)})$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_3(\alpha x^{(1)} + (1 - \alpha)x^{(2)}) &\geq \|\varphi + \psi\|^p \\ &= \alpha \|\varphi_1 + \psi_1\|^p + (1 - \alpha) \|\varphi_2 + \psi_2\|^p \geq \alpha \mathbf{B}_3(x^{(1)}) + (1 - \alpha)\mathbf{B}_3(x^{(2)}) - \theta. \end{aligned}$$

В силу произвольности  $\theta$  получаем требуемую вогнутость функции  $\mathbf{B}_3$ .  $\square$

Оказывается, что функция  $\mathbf{B}_3$  является минимальной в классе вогнутых функций на  $\Omega_3$  с данными граничными значениями.

**Предложение 2.** *Если  $G: \Omega_3 \rightarrow \mathbb{R}$  — вогнутая функция и  $G(x) \geq \mathbf{B}_3(x)$  для всех  $x \in \partial\Omega_3$ , то  $G(x) \geq \mathbf{B}_3(x)$  для всех  $x \in \Omega_3$ .*

**Доказательство.** Фиксируем любую точку  $x \in \Omega_3$  и произвольную пару функций  $(\varphi, \psi) \in T(x)$ . Тогда по неравенству Йенсена

$$\begin{aligned} G(x) &= G\left(\int_0^1 |\varphi(t)|^p dt, \int_0^1 |\psi(t)|^p dt, \int_0^1 |\varphi(t) - \psi(t)|^p dt\right) \\ &\geq \int_0^1 G(|\varphi(t)|^p, |\psi(t)|^p, |\varphi(t) - \psi(t)|^p) dt \\ &\geq \int_0^1 \mathbf{B}_3(|\varphi(t)|^p, |\psi(t)|^p, |\varphi(t) - \psi(t)|^p) dt \\ &= \int_0^1 |\varphi(t) + \psi(t)|^p dt. \end{aligned}$$

Переходя к супремуму по всем парам  $(\varphi, \psi) \in T(x)$ , получаем неравенство  $G(x) \geq B_3(x)$ .  $\square$

Таким образом,  $B_3$  — минимальная среди вогнутых на  $\Omega_3$  функций с фиксированными граничными значениями.

**2.3. Понижение размерности.** Однородность функции  $B_3$  позволяет понизить размерность задачи.

**Замечание 1.** Пусть  $C$  — выпуклый конус в  $\mathbb{R}^3$  с вершиной в нуле. Пусть  $L$  — плоскость в  $\mathbb{R}^3$  такая, что для любого ненулевого  $x \in C$  существует  $k > 0$  такое, что  $kx \in L \cap C$ . Пусть  $G: C \rightarrow \mathbb{R}$  — функция первой степени однородности. В таком случае вогнутость функции  $G$  на  $C$  равносильна вогнутости  $G$  на  $C \cap L$ .

**Доказательство.** Ясно, что если  $G$  вогнута на  $C$ , то она вогнута и на  $C \cap L$ . Докажем обратное утверждение.

Пусть  $x_1, x_2 \in C$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  и  $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ . Найдем числа  $k, k_1, k_2 > 0$  такие, что  $kx, k_1x_1, k_2x_2 \in L$ . Отметим, что  $kx = \alpha \frac{k}{k_1} k_1x_1 + (1 - \alpha) \frac{k}{k_2} k_2x_2$ . Воспользуемся вогнутостью  $G$  на  $L \cap C$ :

$$G(xk) \geq \alpha \frac{k}{k_1} G(k_1x_1) + (1 - \alpha) \frac{k}{k_2} G(k_2x_2).$$

Однородность первой степени функции  $G$  влечет требуемое неравенство

$$G(x) \geq \alpha G(x_1) + (1 - \alpha)G(x_2). \quad \square$$

В качестве конуса  $C$  в нашем случае возьмем  $\Omega_3$ , в качестве плоскости  $L$  выберем плоскость  $\{x \in \mathbb{R}^3: x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ . В соответствии с замечанием 1 сужение функции  $B_3$  на  $\Omega_3 \cap L$  является вогнутой функцией и, более того, минимальной среди вогнутых с тем же граничным значением на  $\partial(\Omega_3 \cap L)$ .

Таким образом, исходная трехмерная задача на поиск минимальной вогнутой функции сводится к следующей двумерной задаче. Рассмотрим выпуклое множество

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: (x_1, x_2, 1 - x_1 - x_2) \in \Omega_3\} \quad (2)$$

— проекцию множества  $\Omega_3 \cap L$  и функцию

$$B(x_1, x_2) = B_3(x_1, x_2, 1 - x_1 - x_2) \quad (3)$$

на нем. Функция  $B$  вогнута на  $\Omega$  и минимальна в классе вогнутых с фиксированными граничными значениями, т.е. если  $G: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  вогнута и  $G(x) \geq B(x)$  на  $\partial\Omega$ , то  $G(x) \geq B(x)$  на всем  $\Omega$ .

Выпишем явно значения функции  $B$  на  $\partial\Omega$ . Граница  $\partial\Omega$  состоит из трех частей, соответствующих трем случаям вырождения неравенства треугольника, а именно  $\partial\Omega = \gamma^{[1]} \cup \gamma^{[2]} \cup \gamma^{[3]}$ , где

$$\gamma^{[1]}(s) = \left( \frac{1}{s^p + (1-s)^p + 1}, \frac{s^p}{s^p + (1-s)^p + 1} \right), \quad s \in [0, 1]; \quad (4)$$

$$\gamma^{[2]}(s) = \left( \frac{(1-s)^p}{s^p + (1-s)^p + 1}, \frac{1}{s^p + (1-s)^p + 1} \right), \quad s \in [0, 1]; \quad (5)$$

$$\gamma^{[3]}(s) = \left( \frac{s^p}{s^p + (1-s)^p + 1}, \frac{(1-s)^p}{s^p + (1-s)^p + 1} \right), \quad s \in [0, 1]. \quad (6)$$

Значения функции  $B$  на  $\partial\Omega$  задаются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} B(\gamma^{[1]}(s)) &= \frac{(1+s)^p}{s^p + (1-s)^p + 1}; \\ B(\gamma^{[2]}(s)) &= \frac{(2-s)^p}{s^p + (1-s)^p + 1}; \\ B(\gamma^{[3]}(s)) &= \frac{|1-2s|^p}{s^p + (1-s)^p + 1}. \end{aligned} \quad (7)$$

### §3. Минимальные вогнутые функции на выпуклых компактах

В этом параграфе мы обсудим свойства минимальных вогнутых функций на выпуклых компактах. Пусть  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  — строго выпуклый компакт с непустой внутренностью (строгая выпуклость означает, что граница не содержит отрезков). Пусть  $f: \partial\omega \rightarrow \mathbb{R}$  — фиксированная непрерывная функция. Символом  $\Lambda_{\omega, f}$  обозначим множество всевозможных вогнутых функций  $G$  на  $\omega$  таких, что  $G(x) \geq f(x)$  для всех  $x \in \partial\omega$ . Определим для  $x \in \omega$  поточечный инфимум формулой

$$\mathfrak{B}_{\omega, f}(x) = \inf\{G(x) : G \in \Lambda_{\omega, f}\}.$$

Очевидно, что  $\mathfrak{B}_{\omega, f} \in \Lambda_{\omega, f}$ , поэтому  $\mathfrak{B}_{\omega, f}$  является минимальной вогнутой функцией на  $\omega$ , мажорирующей  $f$  на  $\partial\omega$ . Отметим, что  $\mathfrak{B}_{\omega, f} = f$  на  $\partial\omega$ , так как в противном случае мы могли бы уменьшить значения  $\mathfrak{B}_{\omega, f}$  на  $\partial\omega$ , сохранив вогнутость, что противоречило бы минимальности.

Вогнутость функции равносильна выпуклости ее подграфика, а поточечная минимальность равносильна минимальности подграфика по включению. Это простое соображение позволяет сделать следующий вывод.

**Предложение 3.** Пусть  $\text{Sg}(f) = \{(x, y) \in \partial\omega \times \mathbb{R} : y \leq f(x)\}$ ,  $\text{Sg}(\mathfrak{B}_{\omega, f}) = \{(x, y) \in \omega \times \mathbb{R} : y \leq \mathfrak{B}_{\omega, f}(x)\}$  — подграфики функций  $f$  и  $\mathfrak{B}_{\omega, f}$  соответственно. Тогда  $\text{Sg}(\mathfrak{B}_{\omega, f}) = \text{conv}(\text{Sg}(f))$ , где  $\text{conv}$  — выпуклая оболочка.

**Доказательство.** Отметим, что подграфик  $\text{Sg}(\mathfrak{B}_{\omega,f})$  вогнутой функции  $\mathfrak{B}_{\omega,f}$  есть выпуклое множество,  $\mathfrak{B}_{\omega,f} \geq f$  на  $\partial\omega$ , поэтому  $\text{Sg}(\mathfrak{B}_{\omega,f}) \supset \text{conv}(\text{Sg}(f))$ .

Функция  $f$  непрерывна,  $\omega$  — компакт, поэтому множество  $\text{conv}(\text{Sg}(f))$  замкнуто. Определим функцию  $G$  на  $\omega$  так, что ее подграфик  $\text{Sg}(G)$  совпадает с  $\text{conv}(\text{Sg}(f))$ . Очевидно,  $G \in \Lambda_{\omega,f}$ , поэтому  $G \geq \mathfrak{B}_{\omega,f}$  на  $\omega$ . Но тогда  $\text{Sg}(\mathfrak{B}_{\omega,f}) \subset \text{Sg}(G) = \text{conv}(\text{Sg}(f))$ .  $\square$

**Следствие 1.** Для любой точки  $x_0 \in \omega$  найдется  $k \leq d + 1$  и точки  $x_1, \dots, x_k \in \partial\omega$  такие, что  $x_0 \in \text{conv}(x_1, \dots, x_k)$ , а функция  $\mathfrak{B}_{\omega,f}$  линейна на  $\text{conv}(x_1, \dots, x_k)$ .<sup>1</sup>

**Доказательство.** Отметим, что случай  $x_0 \in \partial\omega$  тривиален. В противном случае  $x_0 \in \text{int}(\omega)$ . Пусть  $P_0 = (x_0, \mathfrak{B}_{\omega,f}(x_0))$ . По предположению  $3$   $P_0 \in \text{Sg}(\mathfrak{B}_{\omega,f}) = \text{conv}(\text{Sg}(f))$ , поэтому по теореме Каратеодори о выпуклой оболочке точка  $P_0$  лежит в выпуклой оболочке не более чем  $d + 2$  точек множества  $\text{Sg}(f)$ . Отметим, что  $P_0 \in \partial\text{Sg}(\mathfrak{B}_{\omega,f})$ , поэтому  $P_0$  не может лежать во внутренней выпуклой оболочке  $d + 2$  точек множества  $\text{Sg}(f)$ , следовательно, найдется  $k \leq d + 1$  и точки  $P_i = (x_i, y_i) \in \text{Sg}(f)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , такие, что  $P_0 \in \text{conv}(P_1, \dots, P_k)$ . Мы можем считать, что число  $k$  наименьшее среди возможных, т.е. для любого  $k' < k$  точка  $P_0$  не лежит в выпуклой оболочке никаких  $k'$  точек множества  $\text{Sg}(f)$ . Тогда найдутся числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in (0, 1)$  такие, что  $\sum \alpha_i = 1$  и  $P_0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i P_i$ . Отметим, что функция  $\mathfrak{B}_{\omega,f}$  вогнута на  $\text{conv}(x_1, \dots, x_k)$ ,  $\mathfrak{B}_{\omega,f}(x_i) \geq f(x_i) \geq y_i$ , но  $\mathfrak{B}_{\omega,f}(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i$ . В силу положительности чисел  $\alpha_i$  отсюда следует, что  $\mathfrak{B}_{\omega,f}(x_i) = f(x_i) = y_i$  для всех  $i = 1, \dots, k$ , и функция  $\mathfrak{B}_{\omega,f}$  линейна на  $\text{conv}(x_1, \dots, x_k)$ .  $\square$

#### §4. Кручение и фолиация

Вернемся теперь к области  $\Omega$  в  $\mathbb{R}^2$ , определенной равенством (2). Пусть  $F: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  есть сужение функции  $\mathbf{B}$ , заданной формулой (3), на  $\partial\Omega$ . Формула (7) вместе с формулами (4), (5), (6) задает функцию  $F$  явно. Прежде всего, отметим, что функция  $F$  непрерывна на  $\partial\Omega$ . В обозначениях предыдущего параграфа  $\mathbf{B} = \mathfrak{B}_{\Omega,F}$ .

Прямые вычисления показывают, что при  $p \in (1, +\infty)$  кусочная параметризация (4), (5), (6) границы  $\partial\Omega$  оказывается  $C^1$ -гладкой. Кроме того, функция  $F$ , заданная на  $\partial\Omega$ , также  $C^1$ -гладкая в этой параметризации.

Если  $p = 2$ , то функция  $F$  есть просто сужение линейной функции на  $\partial\Omega$ , поэтому функция  $\mathbf{B}$  есть линейная функция. В случае  $p \neq 2$  ситуация

<sup>1</sup>Это фольклорное утверждение (см., например, лемму 2 работы [3]), мы приводим его доказательство для полноты.



более сложная. По следствию 1 все множество  $\Omega$  покрывается треугольниками и отрезками (далее мы будем называть такие отрезки хордами), концы которых лежат на  $\partial\Omega$ , на каждом из которых функция  $\mathbf{B}$  линейна. Наша задача — понять, как устроено это покрытие отрезками и треугольниками. В этом нам поможет следующая ключевая лемма (необходимые сведения из дифференциальной геометрии см., например, в [12]).

**Лемма 1.** Пусть  $\omega \subset \mathbb{R}^2$  — строго выпуклое замкнутое множество. Пусть  $a_1, a_2 \in \partial\omega$  и касательные к  $\omega$  в точках  $a_1$  и  $a_2$  пересекаются в точке  $b$ . Пусть  $I \subset \mathbb{R}$  — некоторый открытый интервал, а  $\gamma: I \rightarrow \partial\omega$  — параметризация части  $\partial\omega$ , содержащей дугу между  $a_1$  и  $a_2$ , лежащую в треугольнике  $a_1ba_2$ . Пусть  $t_1, t_2 \in I$  таковы, что  $\gamma(t_i) = a_i$ ,  $i = 1, 2$ . Предположим, что кривая  $\gamma$  обходит  $\partial\omega$  в положительном направлении и  $t_2 > t_1$ .

Пусть  $G$  — вогнутая функция на  $\omega$ , линейная на отрезке, соединяющем  $a_1$  и  $a_2$ . Пусть кривая  $(\gamma, G(\gamma))$  принадлежит классу  $C^1$  на  $I$ . Тогда не выполнено ни одно из следующих условий:

- 1) кривая  $(\gamma, G(\gamma))$  принадлежит классу  $C^3$  на  $I$ , ее кручение положительно на  $(t_1, t_2)$ ;
- 2) кривая  $(\gamma, G(\gamma))$  принадлежит классу  $C^3$  на  $I$ , ее кручение отрицательно на  $(t_1, t_2)$ ;
- 3) найдется  $t_0 \in (t_1, t_2)$  такое, что кривая  $(\gamma, G(\gamma))$  принадлежит классу  $C^3$  на  $I \setminus \{t_0\}$ , ее кручение на  $(t_1, t_0)$  отрицательно, а на  $(t_0, t_2)$  положительно.

**Доказательство.** Повернем первые две координаты и сделаем перепараметризацию, если понадобится, так, чтобы выполнялось условие  $\gamma'_1(t) > 0$  при  $t \in [t_1, t_2]$ , где  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ . При этих преобразованиях условия леммы не меняются.

Воспользуемся вогнутостью функции  $G$  на выпуклом множестве  $\omega$ . Мы можем найти линейную функцию  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  такую, что  $G \leq L$  на  $\omega$  и  $G = L$  на отрезке  $[a_1, a_2]$ . Не умаляя общности, мы можем считать, что  $L \equiv 0$  (если это не так, мы можем рассмотреть функцию  $G - L$  вместо  $G$ , сохранив условия леммы).

Введем обозначение  $f(t) = G(\gamma(t))$ ,  $v(t) = \frac{\gamma'_2(t)}{\gamma'_1(t)}$ ,  $u(t) = \frac{f'(t)}{\gamma'_1(t)}$ . Отметим, что функция  $v$  монотонно возрастает в силу выпуклости  $\omega$ . Прямые вычисления показывают, что знак кручения кривой  $(\gamma(t), f(t))$  определяет выпуклость (или вогнутость) кривой  $(v(t), u(t))$ :

$$u''v' - v''u' = \frac{1}{(\gamma'_1)^3} \begin{vmatrix} \gamma'_1 & \gamma'_2 & f' \\ \gamma''_1 & \gamma''_2 & f'' \\ \gamma'''_1 & \gamma'''_2 & f''' \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Функция  $f$ , заданная на  $I$ , удовлетворяет неравенству  $f \leq 0$  и равенствам  $f(t_1) = f(t_2) = 0$ , поэтому точки  $t_1$  и  $t_2$  являются точками локального максимума функции  $f$ . Следовательно,  $f'(t_1) = f'(t_2) = 0$  и  $f''(t_1) \leq 0$ ,  $f''(t_2) \leq 0$ . Отсюда следует, что

$$u(t_1) = u(t_2) = 0, \quad u'(t_1) \leq 0, \quad u'(t_2) \leq 0. \quad (9)$$

Перейдем непосредственно к разбору трех случаев. В первом случае кривая  $(\gamma, f)$  принадлежит классу  $C^3$  на  $I$  и ее кручение положительно на  $(t_1, t_2)$ . Тогда согласно формуле (8) кривая  $(v(t), u(t))$  строго выпукла при  $t \in (t_1, t_2)$ . Но это несовместимо с условиями (9). Аналогично во втором случае кривая должна быть строго вогнутой, что также противоречит условию (9).

В третьем случае кривая  $(v(t), u(t))$  строго вогнута при  $t \in (t_1, t_2)$ ,  $u(t_1) = 0 \geq u'(t_1)$ , поэтому  $u(t_2) < 0$ . С другой стороны, строгая выпуклость  $(v(t), u(t))$  при  $t \in (t_0, t_2)$  и условия  $u(t_2) = 0 \geq u'(t_2)$  влекут неравенство  $u(t_0) > 0$ , противоречие. Лемма доказана.  $\square$

Мы хотим применить лемму 1 к вогнутой функции  $\mathbf{B}$  на строго выпуклом множестве  $\Omega$  для того, чтобы понять, как могут быть расположены хорды. Нам необходимо вычислить кручения  $\tau_i(s)$  кривых  $(\gamma^{[i]}(s), \mathbf{B}(\gamma^{[i]}(s)))$ :

$$\begin{aligned} \tau^{[1]}(s) &= -\frac{2(p-2)(p-1)^2 p^3 ((1-s)s(1+s))^{p-3}}{(s^p + (1-s)^p + 1)^4}, \quad s \in (0, 1); \\ \tau^{[2]}(s) &= \frac{2(p-2)(p-1)^2 p^3 ((1-s)s(2-s))^{p-3}}{(s^p + (1-s)^p + 1)^4}, \quad s \in (0, 1); \\ \tau^{[3]}(s) &= -\operatorname{sign}(1-2s) \frac{2(p-2)(p-1)^2 p^3 ((1-s)s|1-2s|)^{p-3}}{(s^p + (1-s)^p + 1)^4}, \\ & \quad s \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right). \end{aligned}$$

Эти формулы позволяют нам с легкостью понять, где кручение графика функции  $F$  на  $\partial\Omega$  положительно, а где отрицательно. При  $p > 2$  выполнены неравенства  $\tau^{[1]}(s) < 0$ ,  $\tau^{[2]}(s) > 0$  при  $s \in (0, 1)$ ,  $\tau^{[3]}(s) < 0$  при  $s \in (0, \frac{1}{2})$  и  $\tau^{[3]}(s) > 0$  при  $s \in (\frac{1}{2}, 1)$ . При  $p < 2$  все знаки в этих неравенствах меняются на противоположные. На рис. 1 изображена область  $\Omega$ , знаки кручения соответствующих кривых и точки их смены.

Простым, но важным дополнением к лемме 1 служит следующее замечание.

**Замечание 2.** Пусть  $I$  — отрезок с концами на  $\partial\Omega$ , на котором функция  $\mathbf{B}$  линейна. Тогда для любого  $\rho > 0$  для каждой из двух замкнутых дуг  $\partial\Omega$ ,

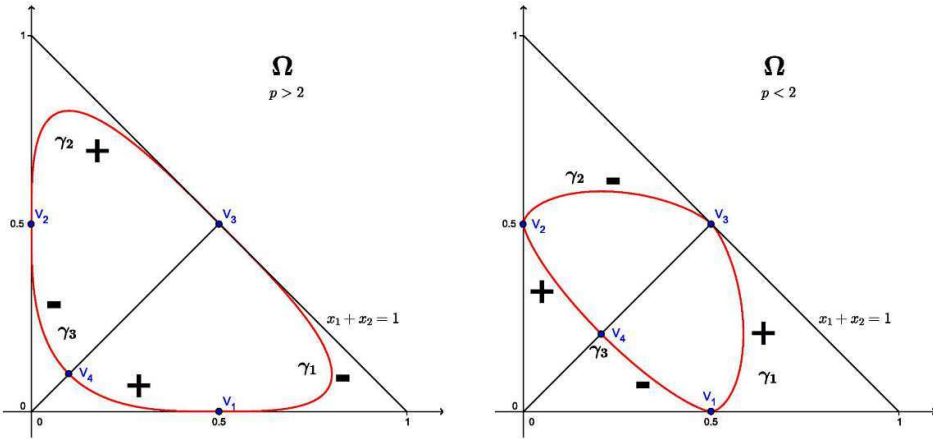


Рис. 1. Область  $\Omega$  и знаки кручения.

стягиваемых хордой  $I$ , найдется отрезок  $I_1$  с концами на ней такой, что  $0 < |I_1| < \rho$ , и функция  $\mathbf{B}$  линейна на  $I_1$ .

**Доказательство.** Пусть это неверно для одной из двух замкнутых дуг, стягиваемых хордой  $I$ . Выберем хорду  $I_1$  с концами на этой дуге так, что функция  $\mathbf{B}$  линейна на ней, и хорда  $I_1$  стягивает кратчайшую дугу при этом условии (таковая имеется в силу компактности области  $\Omega$  и непрерывности функции  $\mathbf{B}$ ). Выберем любую точку  $x_0 \in \text{int}(\Omega)$ , отделенную хордой  $I_1$  от  $I$ . По следствию 1 мы можем найти отрезок или треугольник с концами на  $\partial\Omega$ , содержащий точку  $x_0$ , на котором функция  $\mathbf{B}$  линейна. В силу минимальности стягиваемой хордой  $I_1$  дуги этот отрезок или треугольник должен пересекать хорду  $I_1$  по внутренним точкам. Таким образом, мы нашли хорду  $I_2$ , на которой функция  $\mathbf{B}$  линейна, такую, что  $I_1 \cap I_2 \cap \text{int}(\Omega) \neq \emptyset$ . Но тогда вогнутая функция  $\mathbf{B}$  должна быть линейна на  $\text{conv}(I_1 \cup I_2)$ , что опять же позволяет найти хорду, на которой  $\mathbf{B}$  линейна, стягивающую более короткую дугу, нежели  $I_1$ . Противоречие.  $\square$

Вместе с леммой 1 это замечание сразу влечет следствие.

**Следствие 2.** Если  $I$  — отрезок с концами на  $\partial\Omega$ , на котором функция  $\mathbf{B}$  линейна, то с каждой из сторон относительно  $I$  найдется точка смены знака кручения графика функции  $F$  с  $+$  на  $-$ , считая в положительном направлении.

Так как в случае  $p \neq 2$  есть всего две точки смены знака кручения с  $+$  на  $-$ , не существует треугольника с вершинами на  $\partial\Omega$ , на котором функция

$\mathbf{B}$  была бы линейной. Следовательно, через любую точку множества  $\Omega$  проходит хорда с концами на  $\partial\Omega$ , на которой  $\mathbf{B}$  линейна. Кроме того, эти хорды не могут пересекаться по внутренним точкам, так как в противном случае функция  $\mathbf{B}$  была бы линейной сразу на выпуклой оболочке этих хорд. Замощение множества  $\Omega$  этими непересекающимися по внутренним точкам хордами мы называем фолиацией.

Воспользуемся теперь симметрией задачи. Множество  $\Omega$  и граничная функция  $F$  сохраняются при перестановке первых двух координат, стало быть, функция  $\mathbf{B}$  и фолиация тоже. Выберем любую точку  $x \in \Omega$  такую, что  $x_1 = x_2$ , и найдем хорду, ее содержащую. В силу симметрии она пересекается с симметричной хордой, стало быть, она симметрична сама себе. То есть эта хорда либо лежит на оси симметрии, либо перпендикулярна ей. Так как с каждой из сторон от хорды должна быть точка смены знака кручения с  $+$  на  $-$ , мы понимаем, что при  $p > 2$  она лежит на оси симметрии, а при  $p < 2$  она перпендикулярна оси симметрии.

Таким образом, мы установили, что фолиация выглядит, как показано на рис. 2.

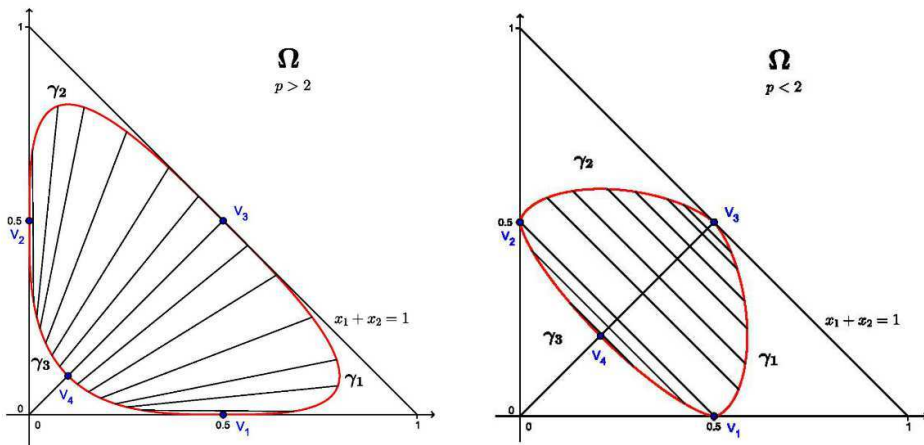


Рис. 2. Фолиация.

## §5. Вычисления и ответ

Теперь мы можем вычислить значения функции  $\mathbf{B}$  на прямой  $x_1 = x_2$ . В случае  $p > 2$  она линейна на этой прямой, поэтому, воспользовавшись граничными значениями (7), находим  $\mathbf{B}(x_1, x_1) = (2 + 2^p)x_1 - 1$ . Вернувшись

к однородной функции  $\mathbf{B}_3$ , находим

$$\mathbf{B}_3(1, 1, t) = (t+2)\mathbf{B}_3\left(\frac{1}{t+2}, \frac{1}{t+2}, \frac{t}{t+2}\right) = (t+2)\mathbf{B}\left(\frac{1}{t+2}, \frac{1}{t+2}\right) = 2^p - t,$$

что при помощи равенства (1) и дает формулу из первого пункта теоремы 3. В случае  $p < 2$  не удастся явно выписать значения функции  $\mathbf{B}$  на отрезке прямой  $x_1 = x_2$ . Так как функция  $\mathbf{B}$  линейна на хорде, проходящей через точку  $(\tau, \tau)$ , и симметрична на ней, то она постоянна на ней и совпадает с граничным значением. Если  $2\tau \in [\frac{1}{2}, 1]$ , то концы этой хорды лежат на кривых  $\gamma_1^{[1]}$  и  $\gamma_2^{[2]}$ , поэтому существует единственное решение  $s \in [0, 1]$  уравнения  $\gamma_1^{[1]}(s) + \gamma_2^{[1]}(s) = 2\tau$ , и

$$\mathbf{B}(\tau, \tau) = F(\gamma_1^{[1]}(s)) = F(\gamma_2^{[2]}(1-s)) = \frac{(1+s)^p}{1+s^p+(1-s)^p}. \quad (10)$$

Если же  $2\tau \in [\frac{1}{2^{p-1}+1}, \frac{1}{2}]$ , то концы этой хорды лежат на кривой  $\gamma^{[3]}$ , поэтому существует единственное решение  $s \in [\frac{1}{2}, 1]$  уравнения  $\gamma_1^{[3]}(s) + \gamma_2^{[3]}(s) = 2\tau$ , и

$$\mathbf{B}(\tau, \tau) = F(\gamma^{[3]}(s)) = F(\gamma^{[3]}(1-s)) = \frac{(2s-1)^p}{1+s^p+(1-s)^p}. \quad (11)$$

Как и раньше, эти равенства позволяют найти модуль равномерной выпуклости  $\delta(\varepsilon)$  из равенства (1):

$$\begin{aligned} 2^p(1-\delta(\varepsilon))^p &= \sup_{t \in [\varepsilon^p, 2^p]} \mathbf{B}_3(1, 1, t) \\ &= \sup_{t \in [\varepsilon^p, 2^p]} (t+2)\mathbf{B}\left(\frac{1}{t+2}, \frac{1}{t+2}\right) = (\varepsilon^p+2)\mathbf{B}\left(\frac{1}{\varepsilon^p+2}, \frac{1}{\varepsilon^p+2}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Последнее равенство в (12) выполнено в силу возрастания функции  $\mathbf{B}(\tau, \tau)/\tau$ , проверить которое помогает следующее простое соображение. Функция  $b: \tau \mapsto \mathbf{B}(\tau, \tau)$  задана на отрезке  $[\frac{1}{2^{p+2}}, \frac{1}{2}]$ , неотрицательна и вогнута на нем, обращается в нуль на левом конце. Поэтому функция  $b(\tau)/\tau$  сначала возрастает (до момента, когда касательная в точке  $(\tau, b(\tau))$  пройдет через 0), а потом убывает. Проверим, что она возрастает вплоть до точки  $\tau = \frac{1}{2}$ . Это следует из неравенства  $b(\tau)/\tau \leq b(\frac{1}{2})/\frac{1}{2}$ , что, в свою очередь, равносильно неравенству  $b(\tau) \leq 2^p\tau$ . Это неравенство легко доказывается с помощью минимальности функции  $\mathbf{B}$  — воспользовавшись формулами (7) и (4), (5), (6), легко проверить, что линейная функция  $G(x_1, x_2) = 2^{p-1}(x_1 + x_2)$  мажорирует  $\mathbf{B}$  на  $\partial\Omega$ , стало быть, и на всей  $\Omega$ . Таким образом, доказана формула (12), которая вместе с формулами (10) и (11) влечет вторую часть теоремы 3.

## §6. Более общие результаты

Для решения исходной задачи нам достаточно было вычислить значения функции  $\mathbf{B}$  на оси симметрии. В случае  $p < 2$  все хорды перпендикулярны оси симметрии, что позволяет вычислить значение функции  $\mathbf{B}$  в любой точке — для этого достаточно найти концы хорды, проходящей через эту точку. В случае  $p > 2$  ситуация более сложная, и для вычисления значений функции  $\mathbf{B}$  вне оси симметрии нужно привлекать дополнительные соображения. Соответствующая техника частично развита в [11], позже доработана и будет полностью изложена в одной из последующих работ.

Применение аналогичных рассуждений позволяет вычислить, насколько большой может быть величина  $\|\theta\varphi + (1-\theta)\psi\|$  при фиксированных  $\|\varphi\|$ ,  $\|\psi\|$  и  $\|\varphi - \psi\|$  (тут  $\theta$  — фиксированное число) или любая другая „приличная“ функция от  $\varphi$  и  $\psi$  (под вычислением мы понимаем, что ответ может быть представлен в виде, пусть и неявной, функции, выражающей  $\delta$  через  $\varepsilon$ , например, как в теореме 3).

**Благодарности.** Авторы благодарны Н. К. Никольскому, который в своей лекции в Лаборатории им. П. Л. Чебышева обратил их внимание на данную проблематику, в частности на работу [1]; эта работа послужила отправным пунктом наших исследований. Мы также благодарны Ф. В. Петрову и Д. С. Челкаку за полезные комментарии и замечания.

Мы выражаем благодарность своему учителю В. И. Васюнину.

## Список литературы

- [1] Ball K., Carlen E., Lieb E., *Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms*, Invent. Math. **115** (1994), no. 3, 463–482.
- [2] Burkholder D. L., *Boundary value problems and sharp inequalities for martingale transforms*, Ann. Probab. **12** (1984), no. 3, 647–702.
- [3] Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J., *The Dirichlet problem for the degenerate Monge–Ampère equation*, Rev. Mat. Iberoamericana **2** (1986), no. 1-2, 19–27.
- [4] Clarkson J. A., *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), no. 3, 396–414.
- [5] Diestel J., Jarschow H., Tonge A., *Absolutely summing operators*, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 43, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [6] Hanner O., *On the uniform convexity of  $L^p$  and  $l^p$* , Ark. Mat. **3** (1956), 239–244.

- [7] Ivanishvili P., Osipov N. N., Stolyarov D. M., Vasyunin V. I., Zatitskiy P. B., *On Bellman function for extremal problems in BMO*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **350** (2012), no. 11-12, 561–564.
- [8] Nazarov F., Treil S., Volberg A., *A Bellman function in stochastic control and harmonic analysis*, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 393–423.
- [9] Slavin L., Vasyunin V., *Sharp  $L^p$  estimates on BMO*, Indiana Univ. Math. J. **61** (2012), no. 3, 1051–1110.
- [10] Васюнин В. И., *Точные константы в обратном неравенстве Гёльдера для весов Макенхаупта*, Алгебра и анализ **15** (2003), 1, 73–117.
- [11] Иванишвили П., Осипов Н. Н., Столяров Д. М., Васюнин В. И., Затицкий П. Б., *Функция Беллмана для экстремальных задач в пространстве BMO*, Препринт ПОМИ, 19, 2011.  
<http://arxiv.org/abs/1205.7018> (to appear in Trans. Amer. Math. Soc.)
- [12] Погорелов А. И., *Дифференциальная геометрия*, 6-е изд., Наука, М., 1974.

С.-Петербургское отделение  
Математического института

им. В. А. Стеклова РАН  
191023, Санкт-Петербург  
наб. р. Фонтанки, 27

Лаборатория им. П. Л. Чебышева СПбГУ  
Россия  
*E-mail:* paха239@yandex.ru

Поступило 21 сентября 2014 г.

Michigan State University  
USA

*E-mail:* ivanishvili.paата@gmail.com

С.-Петербургское отделение  
Математического института

им. В. А. Стеклова РАН  
191023, Санкт-Петербург  
наб. р. Фонтанки, 27

Лаборатория им. П. Л. Чебышева СПбГУ  
Россия  
*E-mail:* dms@pdmi.ras.ru