О. А. Синкевич, О характере дисперсии звука в плазме, *ТВТ*, 1972, том 10, выпуск 2, 243–247

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР

Том 10 *1972* *№ 2*

УДК 533.951

О ХАРАКТЕРЕ ДИСПЕРСИИ ЗВУКА В ПЛАЗМЕ

О. А. Синкевич

Показано, что наряду с обычной дисперсией фазовой скорости, вызванной эффектами вязкости и теплопроводности, зависящей от частоты колебаний, в плазме существует добавка к фазовой скорости, не зависящая от частоты. Эта добавка зависит от плотности электрического тока и отражает влияние джоулева нагрева. При наличии магнитного поля появляется дополнительная дисперсия, которая наиболее существенна при малых частотах.

Рассмотрим распространение акустических колебаний в плазме, когда магнитное число Рейнольдса мало и характерное время задачи превосходит время установления термодинамического равновесия в волне (т. е. ограничимся случаем не слишком высоких частот колебаний).

Характер дисперсии звука в газах, обусловленный эффектами вязкости и теплопроводности, изучен достаточно хорошо как теоретически, так и экспериментально [1]. В плазме, через которую протекает электрический ток, наряду с названными выше эффектами будет сказываться влияние джоулевой диссипации.

Система уравнений, описывающих распространение малых возмущений в неподвижной плазме, имеет вид, приведенный в работе [2]. Решение линеаризованной системы уравнений ищется в виде плоских волн.

В отличие от работы [2] не будем учитывать поток тепла, переносимый электрическим током. В [2] приведено дисперсионное уравнение для акустических колебаний (многочлен второй степени относительно ω). Общее дисперсионное уравнение наряду с акустическими волнами содержит энтропийную волну и имеет вид:

$$\begin{aligned}&\omega^3 + i\omega^2[\xi_0 + {}^4/_3\eta_0 + (\beta j_0^2 / \sigma_0 T_0 \rho_0 c_{v0} K^2) \times \\ &\times \cos 2\theta] K^2 - \omega\{a_0^2 + (\xi_0 + 4\eta_0 / 3)[\varkappa_0 K^2 + \\ &+ (\beta j_0^2 / \sigma_0 c_{v0} \rho_0 T) \cos 2\theta]\} K^2 - \\ &- i[\varkappa_0 K^2 + (\beta j_0^2 / \sigma_0 c_{v0} \rho_0 T_0) \cos 2\theta](a_T K)^2 = 0.\end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь ω — частота колебаний; K — волновое число; a — невозмущенная адиабатическая скорость звука; η — кинематическая линейная вязкость; ξ — объемная вязкость; σ — коэффициент электропроводности; $\varkappa$ — коэффициент температуропроводности; ρ — плотность среды; c_v — теплоемкость среды при постоянном объеме; T — температура, $\beta = \partial \ln \sigma_0 / \partial \ln T_0$; j — плотность электрического тока; a_T — изотермическая скорость звука $a_T^2 = a_0^2 / \gamma$; γ — показатель адиабаты; θ — угол между направлением распространения колебаний и направлением электрического тока.

Не будем останавливаться на декременте (инкременте) колебаний, он совпадает с результатами работ [3, 4] при отсутствии магнитного поля в плазме. Покажем, что имеет место анизотропия скорости звука и ее зависимость от плотности электрического тока, протекающего через плазму.

Если провести в уравнении (1) замену

$$\varkappa_э = \varkappa_\rho + \beta(j_0^2 / \sigma_0 c_{v0} K^2 \rho_0 T_0) \cos 2\theta, \tag{2}$$

то (1) будет по внешнему виду совпадать с дисперсионным уравнением в обычной газовой динамике. При рассмотрении влияния электрического тока на фазовую скорость акустических колебаний, остановимся вначале на случае, когда эффектами вязкости можно пренебречь. Учитывая замену (2), можно сказать, что рассматривается влияние квазитеплопроводности на характер акустических колебаний. Уравнение (1) содержит энтропийную волну, фазовая скорость которой равна нулю (среда покоится) и аку-

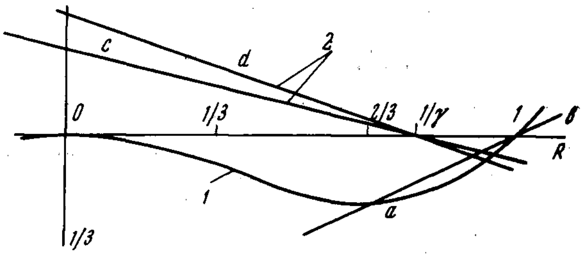

Рис. 1. Решение уравнения (4):
$1 - f_2(R)$; $2 - -f_1(R)$, $c - \varkappa_э$ (2), $d - \varkappa_э$ (1) $> \varkappa_э$ (2)

стические волны, фазовые скорости которых различаются только знаком. Введем модуль корня акустических колебаний

$$\rho^2 \equiv |\omega_a|^2 = \omega_{ra}^2 + \omega_{ia}^2. \tag{3}$$

Тогда из (1) получаем

$$R^3 - R^2 + (\varkappa^2 / \gamma)(R - 1/\gamma) = 0, \tag{4}$$

где

$$R = (\rho / a_0 K)^2, \quad \varkappa = \varkappa_э K / a_0.$$

Найдем приближенное решение уравнения (4), которое имеет один положительный корень — пересечение кубичной параболы $f_2(R) = R^2(R-1)$ с прямой $-f_1(R) = -(\varkappa^2/\gamma)(R - 1/\gamma)$. Из (4) следует, что корень этого уравнения принадлежит отрезку $[1/\gamma, 1]$, при изменении коэффициента $\varkappa$ от бесконечности до нуля. Аппроксимируя на участке пересечения кубичную параболу f_2 прямой ab (рис. 1), получим

$$\rho^2 = (Ka_0)^2 \frac{1 + (3\varkappa/2\gamma)^2}{1 + (3\varkappa)^2/4\gamma}. \tag{5}$$

Декременты энтропийной и акустических волн соответственно

$$\omega_{iэ} = \varkappa(a_T K^2)^2/\gamma = \varkappa_э K^2 \frac{1 + (3\varkappa)^2/4\gamma}{\gamma + (3\varkappa)^2/4\gamma}, \tag{6}$$

$$\omega_{ia} = \varkappa_э K^2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + (3\varkappa)^2/4\gamma}. \tag{7}$$

Фазовая скорость акустических колебаний

$$V_ф^2 = (\omega_{ra}/K)^2 = (\rho^2 - \omega_{ia}^2)/K^2,$$

может быть представлена в виде

$$V_ф^2 = a_0^2 \frac{1 + (3\varkappa/2\gamma)^2}{1 + (3\varkappa)^2/4\gamma} - \frac{(\varkappa_э K)^2}{4[1 + (3\varkappa/2\gamma)^2]}. \tag{8}$$

Из уравнения (8) следует, что при изменении коэффициента квазитеплопроводности от нуля до бесконечности фазовая скорость акустических колебаний изменяется от адиабатической скорости звука до изотермической. Декремент акустических колебаний равен нулю в двух предельных случаях ($\varkappa_э = 0$, $\varkappa_э = \infty$) и достигает максимума в промежуточном случае $\varkappa = 2\gamma / 3$.

При $\varkappa \to \infty$ энтропийная волна, имеющая апериодическое решение, не взаимодействует с акустическими колебаниями. На рис. 2 представлена зависимость фазовой скорости акустических колебаний от плотности электрического тока, протекающего через плазму, когда влиянием теплопроводности (малые частоты) по сравнению с электрическим током можно пренебречь. Из уравнения (8) следует, что фазовая скорость распространения акустических колебаний зависит от величины угла между направлением распространения колебаний и плотностью электрического тока (максимальное воздействие достигается для колебаний коллинеарных с электрическим током и для $\theta = \pi / 2$).

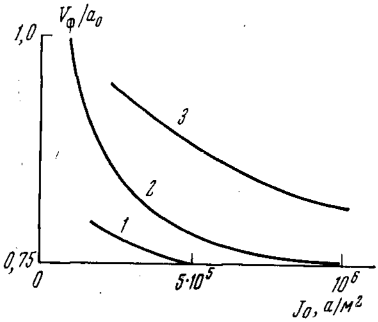

Рис. 2. Зависимость фазовой скорости акустических колебаний от плотности электрического тока в невязкой плазме (гелий, $T = 5 \cdot 10^3$ °К):

1 — 40 $м^{-1}$; 2 — 10^2; 3 — 400

При учете эффектов вязкости не всегда удается получить аналитическое выражение, пригодное во всем диапазоне частот колебаний. Это связано с тем, что при наличии вязкости для достаточно малых длин волн, как это следует из (1), акустические колебания будут затухающими ($\omega_i > 0$), и фазовая скорость колебаний обращается в нуль. Можно показать, что при наличии вязкости фазовая скорость акустических колебаний может быть больше и меньше адиабатической. Если же остановиться на случае, когда

$$0 \leqslant \varkappa < \delta, \tag{9}$$

где

$$\delta = \gamma K (\xi_0 + 4\eta_0 / 3) / a_0,$$

то для фазовой скорости имеет место следующее выражение:

$$V_ф^2 \cong a_0^2 + (\xi_0 + 4\eta_0 / 3)\varkappa_0 K^2 + + (\xi_0 + 4\eta_0 / 3)(\beta j_0^2 / \sigma_0 \rho_0 c_{v0} T_0) \cos 2\theta. \tag{10}$$

Второй член, стоящий в правой части уравнения (10), представляет обычную дисперсию звука, обусловленную эффектами вязкости (объемной и линейной) и теплопроводности, и проявляется лишь при больших частотах (больших K, малых длинах волн). Третий член правой части (10) отражает влияние джоулевой диссипации и проявляется во всем диапазоне частот колебаний. При высоких частотах колебаний и больших плотностях тока (с учетом эффектов вязкости) уравнение (1) решается численно, хотя, строго говоря, при высоких частотах колебаний необходимо учитывать эффекты, связанные с возбуждением внутренних степеней свободы плазмы, и соотношение (1) может быть некорректным. При $\varkappa > \delta$ фазовая скорость начинает уменьшаться. В случае, когда присутствует магнитное поле, перпендикулярное электрическому току, направление распространения колебаний коллинеарно электрическому току ($\theta = 0$), и выполнено условие

$$\varkappa_э < \gamma(\xi_0 + 4(\eta_0 / 3) + \sigma_0 B_0^2 / \rho_0 K^2). \tag{11}$$

Приходим к следующей зависимости для фазовой скорости акустических колебаний:

$$\begin{aligned} V_\text{ф}^2 = a_0^2 + (\xi_0 + 4\eta_0/3)\varkappa_0 K^2 + \\ + (\xi_0 + 4\eta_0/3)(\beta j_0^2/\sigma_0\rho_0 c_{v0} T_0) + \\ + \beta(j_0 B_0)^2/\rho_0^2 c_{v0} T_0 K^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Можно показать, что воздействие магнитного поля аналогично эффектам объемной вязкости. Действительно, если наряду с заменой (2) провести замену

$$\xi_\text{э} = \xi_0 + \sigma_0 B_0^2/\rho_0 K^2, \tag{13}$$

то дисперсионное уравнение (для колебаний распространяющихся коллинеарно электрическому току) будет совпадать с дисперсионным уравнением, получаемым в газовой динамике. Последний член в правой части уравнения (12) зависит от магнитного поля и электрического тока, протекающего через плазму. Физически этот член выражает воздействие магнитного поля на расширение среды, вызванное неадиабатическим джоулевым нагревом. Этот член представляет аномальную дисперсию и проявляется при больших длинах волн (малых частотах колебаний). Наличие аномальной дисперсии может давать основной вклад в фазовую скорость звука. При наличии магнитного поля и произвольных углах между направлением распространения колебаний и электрическим током фазовая скорость звука становится анизотропной (появляются члены, зависящие от $\sin\theta$). Интересно отметить, что при наличии магнитного поля для $\theta \neq 0$ фазовая скорость энтропийной волны отлична от нуля и зависит от величины магнитного поля, электрического тока и угла между направлением распространения колебаний и электрическим током.

Если не выполняется условие (11), то для фазовой скорости акустических колебаний ($\theta = 0$) имеем следующее приближенное выражение:

$$\begin{aligned} V_\text{ф}^2 \cong a_0^2\chi - K^2/4(\xi_0 + 4\eta_0/3)[(\xi_0 + \\ + 4\eta_0/3) + 2(\gamma-\chi)\varkappa_0/\gamma] - [(\gamma-\chi)\varkappa_0 K/\gamma]^2 - \\ - (\gamma-\chi)(\xi_0 + 4\eta_0/3)(\beta j_0^2/\sigma_0 c_{v0} T_0 \rho_0)(K^2/2\gamma) - \\ - (\gamma-\chi)^2(\beta j_0^2/\sigma_0 c_{v0}\rho_0 T_0\gamma)^2 - \\ - (\sigma_0 B_0^2/4\rho_0)[(\xi_0 + 4\eta_0/3) + 2(\gamma-\chi)\varkappa_0/\gamma] - \\ - (B_0 j_0/\rho_0)^2(\beta/2\gamma\sigma_0 c_{v0}\rho_0 T_0 K^2)(\gamma-\chi) - \\ - (\sigma_0 B_0^2/2\rho_0 K)^2, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\chi = \frac{1 + (3\varkappa/2\gamma)^2}{1 + (3\varkappa)^2/4\gamma}. \tag{15}$$

При отсутствии магнитного поля в невязкой среде из уравнения (14) с учетом (15) приходим к уравнению (8).

В рассматриваемой работе предполагалось, что тяжелые частицы и электроны находятся при одинаковой температуре, если это условие не выполнено, то необходим учет эффектов, отмеченных в [5]. Кроме того, если колебания распространяются через области, в которых невозмущенные параметры среды изменяются, то приведенные выражения справедливы лишь для длин волн много меньших характерного размера неоднородности. При проведении экспериментального исследования скорости распространения акустических колебаний в плазме необходимо учитывать, что для колебаний, распространяющихся перпендикулярно электрическому току, в системе возникает перегревная неустойчивость, поэтому время измерений не должно превышать время развития неустойчивости.

Проведенный анализ показывает, что фазовая скорость распространения акустических колебаний в плазме зависит от величины джоулева нагрева. При учете эффектов вязкости существует поправка к фазовой скорости, не зависящая от длины волны колебаний и приводящая в некоторых случаях к увеличению фазовой скорости для колебаний, распространяющихся в направлении электрического тока (или против него), и уменьшению фазовой скорости для колебаний, распространяющихся в направлении, перпендикулярном электрическому току в плазме. Для колебаний, направление распространения которых составляет 45° с направлением электрического тока в плазме ($B_0 = 0$), фазовая скорость звуковых колебаний полностью совпадает с выражением, которое имеет место в обычных газах. При наличии магнитного поля, для колебаний, распространяющихся в плоскости, перпендикулярной магнитному полю (электрический ток также перпендикулярен магнитному полю), возникает аномальная дисперсия, которая наиболее существенна при больших длинах волн ($\sim 1/K^2$). Эффекты влияний джоулева нагрева на характер дисперсии звука в плазме существенно зависят от характера связи коэффициента электропроводности плазмы и термодинамических параметров. Аномальная дисперсия может существенно сказываться на учете нелинейных эффектов при распространении звука в плазме.

Достаточно подробное исследование акустических колебаний в плазме рассмотрено в работе [6], в которой, однако, дисперсия звука не обсуждается.

Институт высоких температур
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
19 VIII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Физическая акустика (под ред. У. Мэзона), ч. А. «Мир», 1968.
2. О. А. Синкевич. Теплофизика высоких температур, 7, № 2, 1969.
3. Б. В. Елисеев. Теплофизика высоких температур, 2, № 2, 1964.
4. О. А. Синкевич. Сб. трудов МЭИ, Секция теплофизическая, ч. 2, 175, 1969.
5. Л. Д. Цендин. Ж. техн. физ., 35, 11, 1972, 1965.
6. И. С. Глушков, Ю. А. Кареев. Теплофизика высоких температур, 9, № 1, 1971.