Д. В. Прохоров, Линии уровня функций, выпуклых в направлении оси,
Матем. заметки, 1988, том 44, выпуск 4, 523–527

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 44, № 4 (1988)

ЛИНИИ УРОВНЯ ФУНКЦИЙ, ВЫПУКЛЫХ В НАПРАВЛЕНИИ ОСИ

Д. В. Прохоров

Одной из геометрических характеристик плоских областей является свойство выпуклости в некоторых направлениях. Оно заключается в том, что дополнение области до плоскости можно представить в виде объединения непересекающихся лучей, имеющих одно из заданных направлений. Области, выпуклые в двух противоположных направлениях, называются *выпуклыми в направлении оси*. В частности, области, выпуклые в направлении мнимой оси, можно определить иначе как области, пересечение которых с произвольной вертикальной прямой связно. Интегральное представление голоморфных в единичном круге $D = \{z: |z| < 1\}$ функций, однолистно отображающих D на области, выпуклые в нескольких направлениях, было получено в работе [1]. Будем в дальнейшем через CJA обозначать класс областей, выпуклых в направлении мнимой оси, а также класс голоморфных в D функций f, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, таких, что $f(D) \in CJA$.

В 1967 г. У. Хейман опубликовал список нерешенных задач в теории функций, представляющих научный интерес. Это издание было продолжено в последующие годы с сохранением порядка нумерации задач. В третьем выпуске [2] этого списка помещена проблема 6.53. В ней говорится: недавно установлено, что если $f \in CJA$, то область $B_r = \{w: w = f(z), |z| < r\}$, $0 < r < 1$, не обязательно принадлежит классу CJA для всех r, начиная с некоторой константы. Ставится задача найти максимальное значение $r \in (0, 1)$, для которого $B_r \in CJA$ при всех $f \in CJA$.

В заметке дается ответ на поставленный в проблеме 6.53 [2] вопрос.

ТЕОРЕМА. *Если функция f принадлежит классу CJA, то для всех $r \in (0, \sqrt{2} - 1]$ область B_r принадлежит классу CJA. Для всякого $r \in (\sqrt{2} - 1, 1)$ существует функция f класса CJA, для которой область B_r не принадлежит классу CJA.*

Доказательство. Пусть для функции f класса CJA существует такое $r \in (0, 1)$, для которого область B_r не принадлежит классу CJA. Тогда найдется максимальное число $r_f \in (0, 1)$ такое, что $B_r \in CJA$, при всех $r \in (0, r_f]$. Так как $B_{r_f} \in CJA$, то для некоторых φ_1, φ_2, $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_1 + 2\pi$, функция

$$u_r(\varphi) = \frac{\partial}{\partial\varphi} \operatorname{Re} f(re^{i\varphi}) = \operatorname{Im}\{re^{i\varphi} f'(re^{i\varphi})\}$$

при $r = r_f$ не меняет знака на отрезках $\Delta_1 = [\varphi_1, \varphi_2]$, $\Delta_2 = [\varphi_2, \varphi_1 + 2\pi]$. Это равносильно тому, что при $r = r_f$ функция

$$v_r(\varphi) = \arg\{re^{i\varphi} f'(re^{i\varphi})\}$$

на отрезках Δ_k $(k = 1, 2)$, удовлетворяет неравенству $\pi(k-1) \leqslant v_r(\varphi) \leqslant \pi k$. Здесь и в дальнейшем под $v_r(\varphi)$ понимается непрерывная ветвь многозначной функции такая, что $v_{r_f}(\varphi_k) = \pi(k-1)$ $(k = 1, 2)$.

В силу максимальности числа r_f для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся $r \in (r_f, r_f + \varepsilon)$, для которых $u_r(\varphi)$ имеет не менее трех точек смены знака на отрезке длины 2π. Следовательно, существует φ_0, для которого $u_{r_f}(\varphi_0) = u'_{r_f}(\varphi_0) = 0$, что при обозначении $z_0 = r_f e^{i\varphi_0}$ равносильно системе уравнений

$$\operatorname{Im}\{z_0 f'(z_0)\} = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)}\right\} = 0. \tag{2}$$

Вместе с функцией f функция g, определяемая равенством

$$g(z) = \frac{e^{-i\varphi_0}\left[f\left(\frac{e^{i\varphi_0}z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z e^{i\varphi_0}}\right) - f(z_0)\right]}{f'(z_0)(1 - r_f^2)} = z + b_2 z^2 + \ldots, \tag{3}$$

принадлежит классу CJA. Действительно, $g(D) = Af(D) + B$ с вещественным коэффициентом $A = e^{-i\varphi_0}/(f'(z_0)(1 - r_f^2))$. Поэтому области $g(D)$ и $f(D)$ одновременно принадлежат классу CJA. Система уравнений (1)—(2) преобразуется в систему

$$\operatorname{Im}\{e^{-i\varphi_0}g'(-r_f)\} = 0, \tag{4}$$

$$\operatorname{Re}\{1 + r_f^2 + 2b_2 r_f\} = 0, \tag{5}$$

в которой уравнение (5) не зависит от уравнения (4).

Найдем нижнюю оценку величины $\operatorname{Re} b_2$ в классе CJA. Функция g имеет интегральное представление

$$g(z) = \int_0^z \frac{p(t)\,dt}{(1 - \bar z_1 t)(1 - \bar z_2 t)}, \tag{6}$$

в котором функция p, $p(0) = 1$, голоморфна в D и удовлетворяет условию $\operatorname{Re}\{e^{-i\gamma}p(z)\} > 0$ с некоторым фиксированным $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$, а точки z_1, z_2, $|z_1| = |z_2| = 1$, расположены так, что граничные точки образа D при отображении $w = z[(1 - \bar z_1 z)(1 - \bar z_2 z)]^{-1}$ лежат на прямой $\operatorname{Re}\{e^{i\gamma}w\} = 0$. Отсюда тотчас следуют оценки

$$\operatorname{Re} b_2 = \frac{\operatorname{Re}\{p'(0) + \bar z_1 + \bar z_2\}}{2} \geqslant -\cos\gamma - |\sin\gamma| \geqslant -\sqrt{2}. \tag{7}$$

Из неравенства (7) и уравнения (5) выводим неравенство $r_f \geqslant \sqrt{2} - 1$, которое доказывает первую часть утверждения теоремы.

Для доказательства второй части утверждения теоремы рассмотрим неравенства

$$\frac{\partial}{\partial r}\arg\{re^{i\varphi_0}f'(re^{i\varphi_0})\}\Big|_{r=r_f} \neq 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\arg\{r_f e^{i\varphi}f'(r_f e^{i\varphi})\}\Big|_{\varphi=\varphi_0} \neq 0, \tag{9}$$

которые вместе с уравнениями (1), (2) являются достаточными условиями максимальности значения r_f. Действительно, неравенство (9) вместе с равенством (2) означают, что функция $v_{r_f}(\varphi)$ имеет локальный экстремум в точке φ_0. Так как точки φ_1, φ_2 являются точками роста этой функции, то точка φ_0 должна быть внутренней точкой одного из отрезков Δ_1, Δ_2. Учитывая равенство (1), заключаем, что если $\varphi_0 \in \Delta_k$, то значение локального экстремума $v_{r_f}(\varphi_0)$ совпадает со значением функции $v_{r_f}(\varphi)$

на одном из концов отрезка Δ_k, т. е. является абсолютным экстремумом этой функции на отрезке Δ_k.

При малом изменении r в окрестности r_f точки смены знака функции $u_r(\varphi)$ непрерывно изменяются, оставаясь в окрестности точек φ_1, φ_2. Взамен отрезков Δ_1, Δ_2 эти новые точки смены знака $u_r(\varphi)$ образуют концы новых отрезков, на концах которых функция $v_r(\varphi)$ принимает значения, кратные π. В то же время в силу неравенства (8) при малом изменении r в окрестности r_f происходит изменение величины локального экстремума функции $v_r(\varphi)$ в окрестности точки φ_0, выходящего за пределы отрезка $[\pi(k-1), \pi k]$. Таким образом, при малом одностороннем изменении r образуется не менее четырех точек смены знака функции $u_r(\varphi)$ на отрезке длины 2π, что нарушает условие принадлежности области B_r классу CJA. Это может случиться лишь при увеличении значения r, так как при $r < r_f$ область B_r принадлежит классу CJA. Следовательно, условия (1), (2), (8), (9) достаточны для максимальности значения r_f.

Вновь применив к функции f дробно-линейное преобразование (3), сводим неравенства (8), (9) к условиям

$$\operatorname{Im}\{1 + r_f^2 + 2b_2 r_f\} \neq 0, \tag{10}$$

$$\operatorname{Im}\{3r_f b_3 - 2r_f b_2^2 + (1 + r_f^2)\, b_2\} \neq 0, \tag{11}$$

которые в совокупности с условиями (4), (5) достаточны для максимальности значения r_f.

Рассмотрим зависящее от вещественного параметра α семейство функций, определяемых формулой

$$g_\alpha(z) = \int_0^z \frac{1 + e^{i3\alpha} z}{(1 + e^{i\alpha} z)^3}\, dz.$$

Все функции семейства принадлежат классу CJA, так как они образуют подмножество функций с интегральным представлением (6). Положим $\varphi_0(r) = \arg g'_\alpha(-r)$ и обозначим через f_α функцию, связанную с g_α обратным преобразованием (3), где $\varphi_0 = \varphi_0(r)$, r_f заменено на r, а z_0 на $re^{i\varphi_0(r)}$. Функции f_α и g_α одновременно принадлежат классу CJA.

Для любого $r \in (\sqrt{2}, -1, 1)$ найдется $\alpha = \alpha(r) \in \in (0, \pi/4)$, для которого

$$\operatorname{Re}\{1 + r^2 + g''_\alpha(0) r\} = 0.$$

Кроме того, для $\alpha(r)$ справедливы неравенства

$$\operatorname{Im} g_\alpha''(0) \neq 0,$$

$$\operatorname{Im}\{r g_\alpha'''(0) - r(g_\alpha''(0))^2 + (1 + r^2) g_\alpha''(0)\} \neq 0.$$

Перечисленные условия являются выражением достаточных условий (5), (10), (11), согласно которым функция f_α имела бы r максимальным числом, сохраняющим для областей B_ρ, $0 < \rho \leqslant r$, свойство выпуклости в направлении мнимой оси. Это заканчивает доказательство второй части утверждения теоремы.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Поступило 29.05.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Прохоров Д. В., Рахманов Б. Н. Об интегральном представлении одного класса однолистных функций // Математические заметки. 1976. Т. 19, вып. 1. С. 41—48.

[2] Anderson I. M., Barth K. F., Brannan D. A. Research problems in complex analysis // Bull. London Math. Soc. 1977. V. 9, Part 2, № 26. P. 123—162.