РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Задачи по элементарной математике

А. Задачи средней трудности

3. Доказать, что если луч отражается по одному разу от каждого из трех попарно перпендикулярных зеркал, то он меняет свое направление на обратное. Обратно, если произвольный луч после трехкратного отражения от трех плоских зеркал меняет свое направление на обратное, то плоскости этих зеркал попарно перпендикулярны. [Примечание. При отражении от плоского зеркала падающий и отраженный лучи лежат в одной плоскости с перпендикуляром к плоскости зеркала, восставленным в точке падения, и образуют с этим перпендикуляром равные углы.]

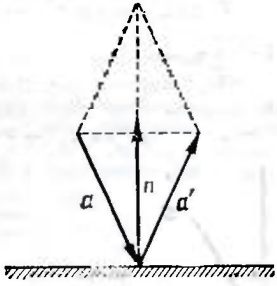

Рис. 1.

Первое решение. 1°. Если луч с направляющим вектором $\boldsymbol{a}$ падает на зеркало с нормальным вектором $\boldsymbol{n}$, то отраженный луч имеет направляющий вектор $\boldsymbol{a}'$, определяемый равенством (рис. 1; векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{a}'$ — единичные)

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - 2(\boldsymbol{a}\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}. \tag{1}$$

Если луч $\boldsymbol{a}$ последовательно отражается от зеркал с нормальными векторами $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$, то направляющие векторы отраженных лучей определяются по формуле (1):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1 &= \boldsymbol{a} - 2(\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_1)\boldsymbol{n}_1,\\
\boldsymbol{a}_2 &= \boldsymbol{a}_1 - 2(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{n}_2)\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{a} - 2(\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_1)\boldsymbol{n}_1 - 2(\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_2)\boldsymbol{n}_2 + 4(\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_1)(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2)\boldsymbol{n}_2,\\
\boldsymbol{a}_3 &= \boldsymbol{a}_2 - 2(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{n}_3)\boldsymbol{n}_3 = \boldsymbol{a} - 2(\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_1)\boldsymbol{n}_1 - 2(\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_2)\boldsymbol{n}_2 - 2(\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_3)\boldsymbol{n}_3 +\\
&\quad + 4(\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_1)(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2)\boldsymbol{n}_2 + 4(\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_1)(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_3)\boldsymbol{n}_3 + 4(\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_3)(\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_3)\boldsymbol{n}_3 -\\
&\quad - 8(\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_1)(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2)(\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_2)\boldsymbol{n}_3.
\end{aligned} \tag{2}$$

Если векторы $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ попарно перпендикулярны, то (2) переходит в

$$\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a} - 2(\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_1)\boldsymbol{n}_1 - 2(\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_2)\boldsymbol{n}_2 - 2(\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_3)\boldsymbol{n}_3. \tag{3}$$

Положив $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{n}_1 + y\boldsymbol{n}_2 + z\boldsymbol{n}_3$, будем иметь:

$$x = \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_1,\ y = \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_2,\ z = \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_3$$

и

$$\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a} - 2x\boldsymbol{n}_1 - 2y\boldsymbol{n}_2 - 2z\boldsymbol{n}_3 = \boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}. \tag{4}$$

2°. Обратно: пусть при любом векторе a имеет место $a_3 = -a$. Заметим, что векторы n_1, n_2, n_3 не компланарны (иначе условие $a_3 = -a$ нарушалось бы уже для лучей a, компланарных с n_1, n_2, n_3). Пусть $a = xn_1 + yn_2 + zn_3$. Тогда, подставив в тождество $a + a_3 = 0$ выражение (2) и приравняв нулю коэффициенты при n_1, n_2, n_3, получим

$$2x - 2(an_1) = 0, \quad 2y - 2(an_2) + 4(an_1)(n_1n_2) = 0, \tag{5}$$

$$2z - 2(an_3) + 4(an_1)(n_1n_3) + 4(an_2)(n_2n_3) - 8(an_1)(n_1n_2)(n_2n_3) = 0. \tag{6}$$

Подставив сюда снова $a = xn_1 + yn_2 + zn_3$ и учитывая, что $n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 = 1$, получим из равенств (5)

$$n_1n_2 = n_2n_3 = n_1n_3 = 0 \tag{7}$$

[равенство (6) в силу (7) превращается в тождество]. Итак, векторы n_1, n_2, n_3 попарно перпендикулярны.

Л. Н. Бескин (Москва)

Второе решение. Докажем сначала три леммы.

Лемма 1. *Если прямая a двукратно отражается от сторон угла φ, то отраженная прямая a_2 будет параллельна a в том и только в том случае, когда угол φ прямой.*

Доказательство видно из рис. 2: $\alpha + \delta = (\pi - 2\beta) + (\pi - 2\gamma) = \pi$, $\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Рассматривая рис. 2 как ортогональную проекцию двугранного угла и последовательно отраженных плоскостей a, a_1, a_2 в направлении, перпендикулярном к ребру угла, получаем аналогичное утверждение относительно двукратного отражения плоскости от сторон двугранного угла.

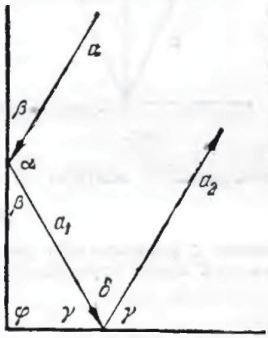

Рис. 2.

Лемма 2. Пусть прямые a и a_1, лежащие в плоскости α, ортогонально проектируются на плоскость α' в прямые a' и a_1' (рис. 3). Проведем через точки $M = a \times a_1$ и $M' = a' \times a_1'$ плоскость μ, перпендикулярную к α и α', и обозначим прямые $\alpha \times \mu$ и $\alpha' \times \mu$ соответственно через m и m'. Тогда *a' и a_1' будут взаимно отраженными* (т. е. симметричными) *прямыми относительно прямой m' (и плоскости μ) в том и только в том случае, когда a и a_1 — взаимно отраженные прямые относительно прямой m (и плоскости μ).*

Доказательство. Если A и A_1 — точки, лежащие соответственно на прямых a и a_1 и одинаково удаленные от плоскости μ, — проектируются на плоскость α' в точки A' и A_1', то равнобедренный треугольник AMA_1 проектируется в равнобедренный же треугольник $A'M'A_1'$. Действительно, если $AN = A_1N$, то $A'N' = A_1'N'$ ($MN \perp \mu$, $M'N' \perp \mu$). Если же $AN \neq A_1N$, то и $A'N' \neq A_1'N'$.

Лемма 3. *Пусть прямые a и a_1 и плоскости α и α_1 взаимно отражены от плоскости μ. Тогда из того, что a принадлежит α, следует, что и a_1 принадлежит α_1.*

Доказательство следует из определения взаимно отраженных (т. е. симметричных) прямых и плоскостей.

Доказательство прямой теоремы. Пусть α, β, γ — попарно перпендикулярные плоскости, $OA = \beta \times \gamma$, $OB = \gamma \times \alpha$, $OC = \alpha \times \beta$, ломаная $aa_1a_2a_3$ — путь луча, последовательно отраженного от этих плоскостей (рис. 4). Спроектируем эту ломаную на плоскость α. Тогда проекции прямых

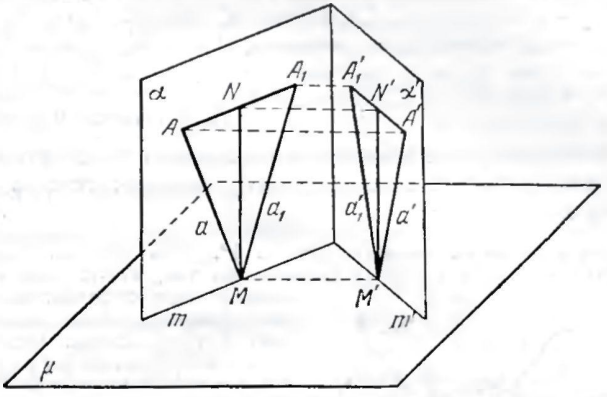

Рис. 3.

a и a_1 будут продолжением одна другой, проекции прямых a_1 и a_2 будут (по лемме 2) взаимно отраженными от OC и проекции прямых a_2 и a_3 (по той же лемме) — взаимно отраженными от OB. Поэтому в силу леммы 1 проекция a будет параллельна проекции a_3. Заменив в этом рассуждении плоскость α

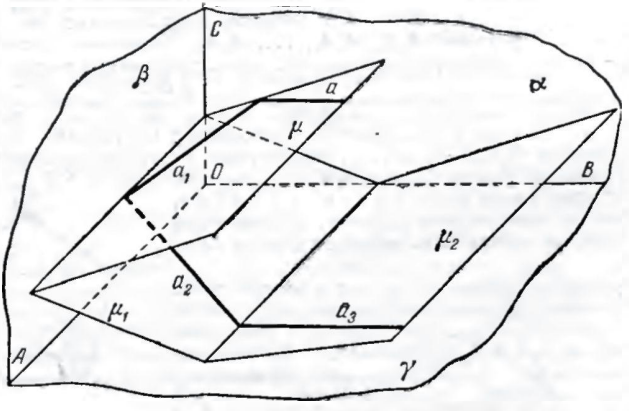

Рис. 4.

плоскостью γ, получим, что проекции прямых a и a_3 на плоскость γ также будут параллельны. Поэтому $a_3 \parallel a$.

Доказательство обратной теоремы. Пусть при последовательном отражении от трех плоскостей α, β, γ падающий и отраженный лучи a и a_3 всегда параллельны (рис. 4); требуется доказать, что α, β и γ попарно перпендикулярны. Проведем через a и a_1 плоскость μ и отразим ее после-

довательно от плоскостей β и γ, получим плоскости μ_1 и μ_2. В силу леммы 3 μ_1 содержит a_2, μ_2 содержит a_3; заменив луч a иным лучом a', также лежащим в плоскости μ, мы получим отраженный от α луч a_1', лежащий в той же плоскости μ, затем отраженный от β луч a_2' — в плоскости μ_1 и отраженный от γ луч a_3' — в плоскости μ_2. Следовательно, плоскости μ и μ_2, содержащие соответственно параллельные прямые a, a' и a_3, a_3', параллельны между собой. На основании леммы 1 заключаем, что угол между β и γ прямой. Аналогично доказываем, что $\alpha \perp \beta$ и $\alpha \perp \gamma$.

А. В. Лузанов (Орехово-Зуево)

11. Какие правильные многоугольники можно начертить на бумаге в клетку так, чтобы все вершины многоугольников лежали в узлах сетки квадратов?

Первое решение (геометрическое). 1°. Если отрезок, соединяющий два узла сетки квадратов, сдвинуть параллельно так, чтобы один его конец снова совпал с узлом, то и другой конец перенесенного отрезка совпадает с узлом сетки. Воспользуемся этим для доказательства того, что *при $n > 6$ правильный n-угольник не может быть начерчен с соблюдением условий задачи.*

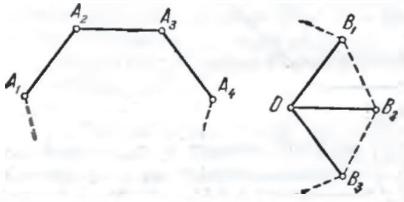

Рис. 5.

Допустим противное, и пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — правильный n-угольник с вершинами в узлах сетки квадратов (рис. 5). Из произвольного узла O сетки отложим отрезки OB_1, OB_2, ..., OB_n, равные, параллельные и одинаково направленные с отрезками A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1. Нетрудно убедиться, что $B_1B_2\ldots B_n$ — снова правильный n-угольник, удовлетворяющий условиям задачи. При этом коэффициент подобия $k = \frac{B_1B_2}{A_1A_2} = 2\sin\frac{\angle B_1OB_2}{2} = 2\sin\frac{\pi}{n}$, откуда следует, что $k < 1$, если $n > 6$. Проводя аналогичное построение по отношению к n-угольнику $B_1B_2\ldots B_n$ и т. д., мы получим последовательность удовлетворяющих условию задачи правильных n-угольников, стороны которых неограниченно убывают, что, разумеется, невозможно (отрезок, соединяющий два узла сетки, не может быть меньше стороны квадрата сетки).

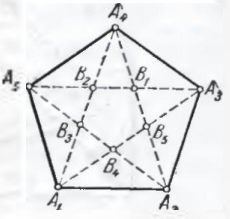

Рис. 6.

2°. Аналогично можно убедиться в *отсутствии удовлетворяющего условию задачи пятиугольника*: для этого достаточно заметить, что если бы такой пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ существовал, то условию задачи удовлетворял бы и (меньший!) правильный пятиугольник $B_1B_2B_3B_4B_5$, изображенный на рис. 6 (B_1 есть узел сетки квадратов, ибо отрезки A_1A_2 и A_5B_1 равны, параллельны и одинаково направлены, поскольку $A_1A_5B_1A_2$ — параллелограмм: $A_1A_2 \parallel A_5B_1$ и $A_1A_5 \parallel A_2B_1$; нетрудно подсчитать, что в этом случае коэффициент подобия $k = \frac{B_1B_2}{A_2A_1} = \frac{A_4B_2}{A_4A_1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$).

3°. То, что *на сетке квадратов нельзя расположить правильный треугольник так, чтобы вершины его совпали с узлами сетки*, хорошо известно

(см., например, Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 2, М., 1952, решение задачи 37 а). Отсюда вытекает, что и *при* $n=6$ *построение удовлетворяющего условию задачи n-угольника невозможно.*

Итак, *задача имеет решения лишь при* $n=4$ (причем стороны квадрата могут и не совпадать с линиями сетки; см. рис. 7).

Второе решение (аналитическое). Известно, что *если угол* φ *соизмерим с* π *и отличен от* $n\frac{\pi}{2}$ *и* $\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}$ *(где n целое), то* $\operatorname{tg}\varphi$ *иррационален* (см., например, Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избр. задачи и теоремы элементарной математики, ч. 1, М., 1959, задача 239б). Внутренний угол правильного n-угольника $\varphi_n=\frac{\pi(n-2)}{n}$. Если такой n-угольник удовлетворяет условию задачи, то $\operatorname{tg}\varphi_n$ не может быть иррациональным:

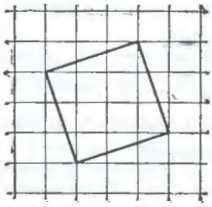

Рис. 7.

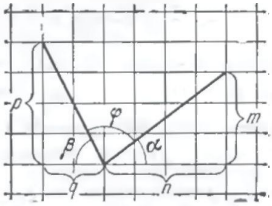

Рис. 8.

в самом деле, если φ — угол между двумя произвольными отрезками, соединяющими узлы сетки, то (рис. 8) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{m}{n}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{p}{q}$ и $\operatorname{tg}\varphi=-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=$ $=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ рациональны. Таким образом, $\frac{\pi(n-2)}{n}$ может равняться лишь $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{4}$, откуда $n=4$ или $n=8$.

Заметим теперь, что у равнобедренного треугольника, образованного двумя соседними сторонами правильного n-угольника, удовлетворяющего условию задачи, и соединяющей их концы диагональю, квадраты всех сторон целые (они являются гипотенузами прямоугольных треугольников с целочисленными катетами; здесь за единицу мы принимаем сторону квадрата сетки). Отсюда по теореме косинусов имеем

$$b^2=a^2+a^2-2a^2\cos\varphi_n \quad \text{или} \quad \cos\varphi_n=\frac{b^2-2a^2}{2a^2},$$

где b^2 и a^2 — целые числа; таким образом, $\cos\varphi_n$ *должен быть рационален.* Но значение $n=8$ не удовлетворяет этому условию; таким образом, $n=4$ *является единственным возможным значением n.*

В. Л. Рабинович (Петропавловск-Казахстанский)

Дополнительный список лиц, приславших решения задач

Задача 1 — *У. Асекритов* (Ярославль) — геометрическое решение.
Задача 8 — *Э. Г. Кирьяцкий* (Вильнюс).
Задача 12 — *Е. Н. Ламбина* (Минск), *В. В. Малинин* (Ленинград).
Задача 14 — *С. Б. Аблялимов* (Уральск), *Е. Н. Ламбина* (Минск), *В. В. Малинин* (Ленинград), *З. А. Чантурия* (Тбилиси), *С. Шушбаев* (Ташкент).
Задача 15 — *С. Б. Аблялимов* (Уральск), *Е. Н. Ламбина* (Минск), *В. В. Малинин* (Ленинград), *З. А. Чантурия* (Тбилиси).
Задача 16 — *Ю. И. Кузьмин* (Москва), *Е. Н. Ламбина* (Минск), *П. С. Марголите* (Ярославль), *С. Шушбаев* (Ташкент).
Задача 17 — *Н. В. Аршава* (Харьковская обл.), *Е. Н. Ламбина* (Минск), *В. В. Малинин* (Ленинград), *З. А. Чантурия* (Тбилиси).
Задача 18 — *П. С. Марголите* (Ярославль), *Н. Малютина* (Чита).

Б. Задачи повышенной трудности

1. Найти n треугольников наименьшей возможной общей площади, которыми можно полностью покрыть окружность радиуса 1.

Решение задачи доставляется системой равных равнобедренных треугольников, основания которых пересекают ограниченный окружностью круг по сторонам правильного вписанного n-угольника, а боковые стороны касаются окружности в своих серединах (ср. Л. Фейеш Тот, Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, М., 1958, стр. 81 и примечание [43]).

3. Оптический прибор, называемый *трипельпризмой*, состоит из трех плоских зеркал, образующих прямой трехгранный угол. Этот набор зеркал отражает каждый падающий на него луч света в направлении, строго противоположном первоначальному, что позволяет, например, заменить в некоторых случаях осветительную систему маяка трипельпризмой (которую в этом случае требуется отыскать прожектором с судна). Найти все возможные системы плоских зеркал, отражающие каждый падающий луч в строго противоположном направлении.

Подобные системы зеркал были в 1953 г. перечислены И. Б. Келлером (США); ниже излагаются его рассуждения.

1°. Условимся прежде всего каждый луч l заменять такой точкой L единичной сферы Σ с центром O, что направление луча задается вектором $\overline{LO}$. Плоскому зеркалу π будет отвечать большой круг p сферы, плоскость которого параллельна π; лучам l, падающим на зеркало с отражающей стороны, отвечают точки L, заполняющие одну из ограниченных p полусфер, которую будем называть «отмеченной». Если луч l отражается от зеркала π, то отраженному лучу l_1 отвечает точка L_1 сферы, симметричная точке L относительно большого круга p.

2°. Пусть π и ρ — два плоских зеркала нашей системы зеркал, которым отвечают большие круги p и r сферы; через D обозначим «двуугольник», образованный пересечением «отмеченных» полусфер, отвечающих зеркалам π и ρ (рис. 9). Пусть отраженный от π луч l_1 падает на ρ с отражающей стороны; при этом, выбрав l так, чтобы точка его падения на π была достаточно

близка к линии s пересечения π и ρ, мы можем добиться, чтобы луч l_1 не был задержан до падения на ρ никаким другим зеркалом нашей системы. Если отраженный от ρ луч l_2 падает на π с отражающей стороны, то мы также можем добиться, чтобы он был отражен именно этим зеркалом (заметим, что если точка падения l на π очень близка к s, то и точка падения l_1 на ρ будет близка к s). Таким образом, мы можем найти луч данного направления $\overline{LO}$ (где L — произвольная точка двуугольника D), который будет последовательно отражаться от зеркал π и ρ, пока не окажется падающим на эти зеркала

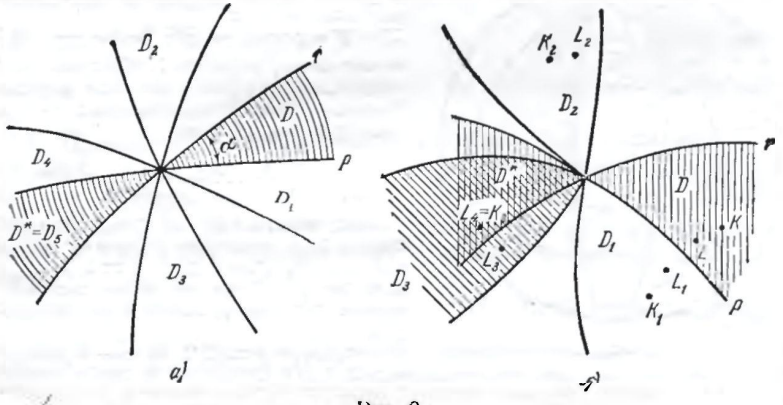

Рис. 9.

с неотражающей стороны, т. е. пока отвечающая последнему лучу l_n точка L_n (полученная из точки L n-кратным отражением от p и r), не попадет в симметричный D двуугольник D^*.

Заметим теперь, что если точка L принадлежит двуугольнику D, то точка L_1, отвечающая отраженному от π лучу l_1, принадлежит двуугольнику D_1, полученному из D отражением от стороны p двуугольника; точка L_2, отвечающая лучу l_2, полученному из l_1 отражением от ρ, принадлежит двуугольнику D_2, симметричному D_1 относительно r; точка L_3, отвечающая лучу l_3, полученному из l_2 отражением от π, принадлежит двуугольнику D_3, симметричному D_2 относительно p и т. д. Рассмотрим все получающиеся таким образом двуугольники D_1, D_2, D_3, ... и пусть D_n — первый из них, имеющий общие точки с D^*. А priori возможны два случая:

а) Двуугольник D_n совпадает с D^*. При этом, как нетрудно видеть (см. рис. 9, *а*), *угол α двуугольника равен целой части* π $\left(\text{т. е. } \alpha=\frac{\pi}{n}\right)$.

б) Пересекающийся с D^* двуугольник D_n не совпадает с D^* (рис. 9, *б*). Покажем, что если система зеркал удовлетворяет условиям задачи, то *случай* б) *не может иметь места.* В самом деле, пусть этот случай имеет место и пусть L_n — точка двуугольника D_n, не принадлежащая двуугольнику D^*, но весьма близкая к его стороне; в таком случае еще одно отражение переведет ее в точку $L_{n+1}=K_n$, принадлежащую пересечению D_n с D^*. Таким образом, найдутся два таких луча k и l направлений $\overline{KO}$ и $\overline{LO}$, что n-кратное отражение одного из них и $(n+1)$-кратное отражение второго приводят к лучам k_n и l_{n+1} одного направления. Если теперь последующие m отражений от зеркал нашей системы (теперь уже не обязательно лишь от зеркал π и ρ) переводят луч k_n в луч, по направлению противо-

положный k (так что луч k после $n+m$ отражений меняет направление на противоположное), то эти же m отражений переведут луч l_{n+1} в луч, по направлению противоположный направлению k, что противоречит нашему условию, согласно которому каждый луч должен отражаться системой зеркал в противоположном ему направлении.

3°. Пусть наша система зеркал содержит q зеркал. Им отвечают q «отмеченных» полусфер, в пересечении которых образуется сферический q-угольник M. Согласно предыдущему пункту, q углов этого многоугольника равны $\frac{\pi}{n_1}, \frac{\pi}{n_2}, \ldots, \frac{\pi}{n_q}$, где $n_1, n_2, \ldots, n_q$ — целые числа, большие 1. Но сумма углов сферического q-угольника, как известно, больше суммы углов плоского q-угольника [1]); таким образом,

$$\frac{\pi}{n_1}+\frac{\pi}{n_2}+\ldots+\frac{\pi}{n_q}>\pi(q-2). \quad (*)$$

Неравенство (*) не удовлетворяется при $q>3$ никакими целыми числами $n_1, n_2, \ldots, n_q$ (где $n_i \geqslant 2$, $i=1, 2, \ldots, q$); если же $q=3$, то мы имеем следующие четыре системы решений этого неравенства:

$(n_1, n_2, n_3)=(2, 2, n)$, n — произвольно; (2, 3, 3); (2, 3, 4) и (2, 3, 5).

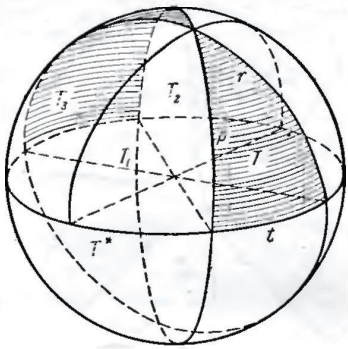

Рис. 10.

Таким образом, *искомая система плоских зеркал может лишь образовывать трехгранный угол, двугранные углы которого равны*

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right) \text{ или } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}\right).$$

4°. Рассмотрим равнобедренный сферический треугольник T, углы которого равны $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}$ (рис. 10). Последовательно отражая этот треугольник n раз относительно равных его сторон p и r, мы придем к противоположному T треугольнику T_n «отмеченной» полусферы, задаваемой третьей стороной t; отразив затем T_n относительно t, мы получим треугольник $T_{n+1}=T^*$, противоположный T (симметричный T относительно центра O сферы). Однако если n нечетно, то сторона p треугольника T после $n+1$ огражений совместится со стороной r^* треугольника T^*, симметричной стороне r; таким образом, точка L треугольника T в результате этих $n+1$ отражений, вообще говоря, не перейдет в диаметрально противоположную ей точку L^* сферы и, значит, отвечающий L луч l после $n+1$ отражений не изменит направления на противоположное. Напротив, если n четно, то треугольник T в результате $n+1$ отражений (выполненных в любом порядке, однако так, чтобы каждое отражение от p, r или t переводило треугольник с отмеченной плоскости, отвечающей этому большому кругу, на неотмеченную) совместится с противоположным ему треугольником T^* так, что каждая точка T перейдет в диаметрально ей противоположную. Таким образом, система трех плоских зеркал, образующих двугранные углы $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2m}$, удовлетворяет условию задачи,

[1]) См., например, Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. 2, М., Учпедгиз, 1948.

в то время как система зеркал, образующих углы $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2m+1}$, этому условию не удовлетворяет.

Подобным же образом можно доказать, что система зеркал, образующих углы $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$, не удовлетворяет условию задачи; две же другие системы зеркал ему удовлетворяют.

Итак, *все решения задачи даются трехгранными «зеркальными» углами с двугранными углами:* $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2m}\right)$ (число отражений $2m+1$); $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$ (число отражений 9) и $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}\right)$ (число отражений 15).

9. Правильным n-угольником (на плоскости или в пространстве) называется замкнутая ломаная, состоящая из n равных звеньев и такая, что углы между соседними звеньями все равны между собой. Известно, что на плоскости правильные n-угольники существуют при любом n. При каких n существуют неплоские правильные многоугольники?

В. И. Арнольд (Москва)

Имеет место теорема: *правильный пространственный n-угольник существует при $n=4$ и при $n \geqslant 6$ и не существует при $n=5$.* Доказательство ее проведем в несколько шагов.

1°. *Существует правильный пространственный четырехугольник* — такой четырехугольник можно получить перегибом ромба по меньшей диагонали.

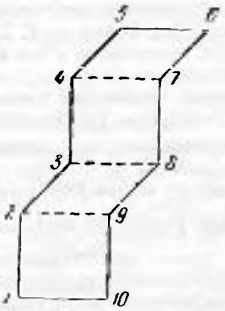

Рис. 11.

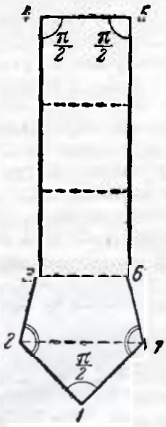

Рис. 12.

2°. *Существует правильный пространственный $2k$-угольник, где $k \geqslant 3$,* — такой $2k$-угольник (все углы которого прямые) можно получить, перегнув $k-2$ раз плоский прямоугольник, бо́льшая сторона которого в $k-1$ раз больше меньшей (рис. 11).

3°. *Существует правильный $(2k+1)$-угольник, где $k \geqslant 3$.* Такой многоугольник (все углы которого также прямые) можно получить из изображенного на рис. 12 плоского семиугольника *1234567* с тремя прямыми углами

$\left(\angle 1=\angle 4=\angle 5=\frac{\pi}{2}\right)$, пятью равными сторонами ($\overline{12}=\overline{23}=\overline{45}=\overline{67}=\overline{71}$) и двумя сторонами, в k—2 раз бо́льшими остальных [$\overline{34}=\overline{56}=(k-2)\,\overline{12}$], перегнув этот семиугольник k—1 раз по пунктирным линиям.

4°. Так как совершенно ясно, что нет неплоского треугольника, то остается показать, что *не существует неплоского правильного пятиугольника.*

Допустим, что такой пятиугольник *12345* существует. Докажем, что в таком случае *четыре его вершины* (или *три последовательные стороны*) *лежат в одной плоскости.* Действительно, из пяти точек *1, 2, 3, 4, 5,* не лежащих в одной плоскости, всегда найдутся три такие, что остальные две точки лежат по одну сторону от задаваемых этими тремя точками плоскости. При этом могут иметь место два случая.

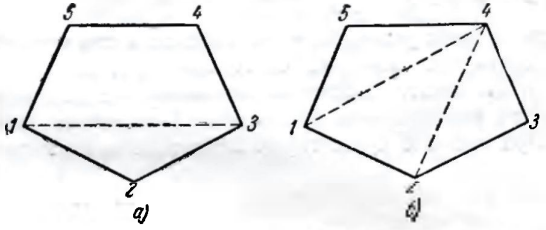

Рис. 13.

а) Три точки, определяющие указанную плоскость, суть последовательные вершины пятиугольника, скажем, вершины *1, 2, 3,* (рис. 13, *а*). Тогда в силу равенства трехгранных углов с вершинами *1* и *3* (по трем плоским углам; $\angle 315=\angle 134$ в силу равенства по трем сторонам треугольников *315* и *134*) точки *1, 5, 4, 3* лежат в одной плоскости.

б) Три точки, определяющие указанную плоскость, не являются последовательными вершинами пятиугольника; скажем, это вершины *1, 2, 4* (рис. 13, *б*). Тогда в силу равенства трехгранных углов с вершинами *1* и *2* точки *1, 2, 3, 5* лежат в одной плоскости.

Пусть четырьмя вершинами пятиугольника, лежащими в одной плоскости, будут вершины *1, 2, 3, 4.* В таком случае, повернув треугольник *145* вокруг диагонали $\overline{14}$ пятиугольника, мы сможем получить плоский пятиугольник *12345* с равными сторонами и тремя равными углами *2, 3, 5'*, величину которых мы обозначим через α. При этом a priori могут иметь место три случая.

а) $\alpha>\frac{\pi}{2}$ (рис. 14, *а*). Так как $\overline{24}=\overline{14}$ (из равенства треугольников *15'4* и *234*), то $\angle 421=\angle 412$, $\angle 423=\angle 415'$ и, значит, пятиугольник *12345'* правильный. Но из правильного плоского пятиугольника перегибом по диагонали *14* нельзя получить правильный пространственный пятиугольник (не будут равными углы между сторонами). Значит, этот случай отпадает.

б) $\alpha=\frac{\pi}{2}$. Здесь треугольник *15'4* должен быть одновременно равносторонним (ибо $\overline{14}=\overline{23}=\overline{15'}$) и прямоугольным; поэтому случай б) также отпадает.

в) $\alpha<\frac{\pi}{2}$. Здесь пятиугольник *12345* может иметь такой вид, как это изображено на рис. 14 *б, в.* Однако в случае рис. 14, *б* мы в точности так же, как и выше, убеждаемся, что $\angle 1=\angle 4=\alpha$, т. е. что α — это угол правильного пятиугольника, и следовательно, тупой. В случае же рис. 14, *в* также

имеем $\overline{24}=\overline{14}$ $(=\overline{13})$, при этом $\overline{23}\parallel\overline{41}$, $\angle 421=\angle 412=\angle 123=\alpha$ и (из $\triangle$ *423*) $\alpha+2\alpha+2\alpha=\pi$, $\alpha=\frac{\pi}{5}$; $\angle 245'$ $(=\angle 315')=2\alpha+\alpha+2\alpha=\pi$, т. е. *235'* — это треугольник с углами $2\alpha=\frac{2\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}$, а *4* и *1* — две точки на его равных сторонах, такие, что $\overline{5'4}=\overline{5'1}=\overline{23}$. Но из такого треугольника

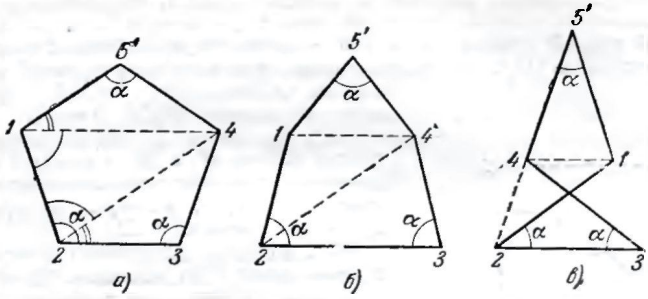

Рис. 14.

перегибом вокруг $\overline{14}$ также нельзя получить неплоский правильный пятиугольник: для того чтобы углы *4* и *1* стали равны величине $\alpha=\frac{\pi}{5}$, надо повернуть $\triangle$ *145'* вокруг $\overline{14}$ на 180°, что снова приводит нас к плоскому (звездчатому) правильному пятиугольнику.

А. П. Гарбер, В. И. Гарвацкий, В. Я. Ярмоленко (Винница)

Несколько более сложно решение автора задачи *Л. Н. Бескина* (Москва), содержащее, однако, одно простое соображение, позволяющее с самого начала исключить случай, приводящий в решении А. П. Гарбера, В. И. Гарвацкого и В. А. Ярмоленко к случаю рис. 14, *в*. А именно, В. И. Арнольд и Л. Н. Бескин замечают, что если у правильного пространственного пятиугольника *12345* диагонали $\overline{14}$ или $\overline{24}$ короче сторон (именно этот случай и соответствует рис. 14, *в*), то диагонали этого пятиугольника образуют также правильный пятиугольник *13524*, у которого уже диагональ $\overline{12}$ длиннее стороны (и мы возвращаемся к случаю рис. 14, *а*).

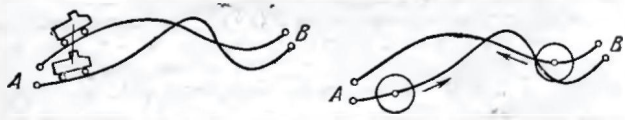

Рис. 15.

12. Из города *A* в город *B* ведут две дороги, каждая из которых не имеет самопересечений. Докажите, что если две машины M_1 и M_2 могут выехать одновременно из *A* по этим дорогам и проехать в *B* так, что расстояние между машинами ни в какой момент пути не будет превосходить 20 *м* (рис. 15, слева), то две круглые

платформы радиусом в 11 *м* не смогут выехать одновременно из A в B и из B в A и проехать по этим дорогам, не столкнувшись (рис. 15, справа)[1]).

Н. Н. Константинов (Москва)

Приводим решение автора задачи.

1°. Пусть положение машины на первой дороге l_1 изображается точкой X оси x, а положение машины на второй дороге l_2 — точкой Y оси y (OX — путь, пройденный точкой, считая от A, OB_1 — длина первой дороги; аналогичный смысл имеют OY и OB_2). Тогда положение двух этих машин (одной на l_1, другой на l_2) изобразится точкой Z замкнутого прямоугольника OB_1CB_2 (рис. 16).

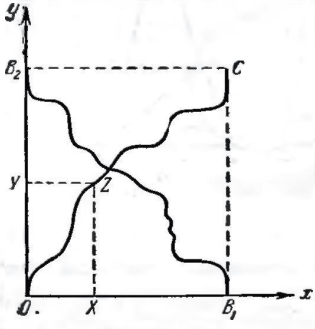

Рис. 16.

2°. Все точки Z, изображающие положения машин M_1 и M_2 в каждый момент t движения, образуют некоторую непрерывную кривую $x=\varphi_1(t)$, $y=\psi_1(t)$, которая проходит через точки O и C.

3°. Вопреки требованию условия задачи, предположим, что каким-то образом можно осуществить указанное передвижение платформ. Тогда аналогично получим кривую $x=\varphi_2(t)$, $y=\psi_2(t)$, соединяющую B_2 и B_1. Но две непрерывные кривые OC и B_1B_2, соединяющие противоположные вершины прямоугольника OB_1CB_2, обязательно должны пересечься в некоторой точке Z (это — непосредственное следствие непрерывности наших кривых). Точке Z отвечают такие точки на дорогах l_1 и l_2, что расстояние между этими точками не превосходит 20 *м* (ибо эта точка принадлежит линии OC, изображающей движение машин). Но это значит, что еще до того, как платформы (движение которых изображается линией B_1B_2) достигнут положения, изображаемого точкой Z, они неминуемо столкнутся (ибо расстояние между центрами платформ должно превышать 22 *м*).

13. Если многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ (с вещественными коэффициентами) принимают целые значения в одних и тех же точках, то либо сумма $P(x)+Q(x)$, либо разность $P(x)-Q(x)$ постоянна.

Пусть, для определенности, $\lim\limits_{x\to\infty} P(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} Q(x)=+\infty$, т. е. старшие коэффициенты многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ положительны (в других случаях решение аналогично). Пусть, далее, при $x>x_0$ оба многочлена монотонно возрастают и при некотором $x_1>x_0$ имеем $P(x_1)=p$, $Q(x_1)=q$, где p и q — целые. В таком случае, если $P(x_2)=p+1$, то $Q(x_2)=q+1$. В самом деле, допустим, что это не так, т. е. что $Q(x_2)=q+m$, где $m>1$. Тогда для некоторого $\tilde{x}$, где $x_1<\tilde{x}<x_2$, будем иметь $Q(\tilde{x})=q+1$. Но в этом случае $p<P(\tilde{x})<p+1$, что противоречит тому, что и многочлен $P(x)$ должен при $x=\tilde{x}$ иметь целочисленное значение.

Аналогично доказывается, что если $P(x_i)=p+i-1$ (где $x_i>x_0$), то $Q(x_i)=q+i-1$. Следовательно, многочлены $P(x)-P(x_1)$ и $Q(x)-Q(x_1)$

[1]) Условие этой задачи, приведенное в вып. 2 «Математического просвещения», содержало опечатку.

принимают одинаковые значения при бесчисленном множестве значений x_i (где $i=1, 2, \ldots$) и, значит,

$$P(x)-P(x_1)\equiv Q(x)-Q(x_1)$$

или

$$P(x)-Q(x)\equiv \text{const}.$$

Ф. Л. Варпаховский (Москва)

Близко к этому и решение *Л. Н. Бескина* (Москва).

14. Построить треугольник по высоте h_a, разности $b-c$ боковых сторон и радиусу r вписанной окружности.

Первое решение. Рассмотрим вписанный и вневписанный (касающийся стороны длины a) круги. Легко показать, что $BM=CL_1=p-b$ (обозначения см. на рис. 17); действительно, $BK=BM=\frac{1}{2}(BA+BC-AK-CM)=$ $=\frac{1}{2}(BA+BC-AN-CN)=\frac{1}{2}(c+a-b)$; $AQ=AP=p$, ибо $AQ=AP=$ $=\frac{1}{2}(AB+AC+BP+CQ)=\frac{1}{2}(AB+AC+BL_1+CL_1)=\frac{1}{2}(a+b+c)$; $CL_1=CQ=AQ-AC=p-b$. Поэтому

$$ML_1=a-2(p-b)=a-(a+c-b)=b-c,$$

и, стало быть, отрезок ML_1 нам известен. Отрезок $ML=2r$ также известен. Точка A является центром гомотетии рассматриваемых кругов; точки L и L_1, как точки касания кругов с параллельными касательными, отвечают друг другу в этой гомотетии; поэтому LL_1 проходит через A.

Построение. Строим $\triangle LML_1$ по катетам $2r$ и $b-c$; LL_1 продолжаем до пересечения в точке A с прямой,

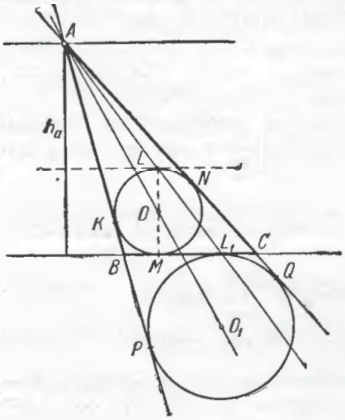

Рис. 17.

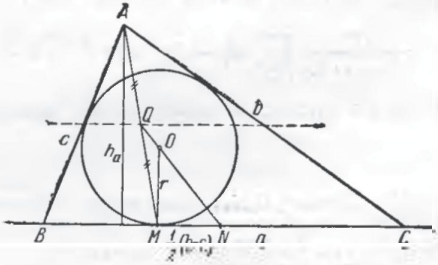

Рис. 18.

параллельной ML_1 и удаленной от ML_1 на расстояние h_a; из точки A проводим касательные AB и AC к кругу с диаметром ML.

Второе решение. Расстояние точки M до середины N стороны BC (рис. 18) равно $BN-BM=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}(a+c-b)=\frac{1}{2}(b-c)$. Далее, для каждого описанного четырехугольника (в том числе и для вырожденного) имеет место теорема Ньютона: *центр вписанной окружности лежит на*

прямой, соединяющей середины диагоналей [1]). Применив эту теорему к (вырожденному) четырехугольнику $ABMC$, мы найдем, что середина Q отрезка AM лежит на прямой NO.

Построение. По катетам $\frac{1}{2}(b-c)$ и r строим треугольник OMN; на расстоянии $\frac{h_a}{2}$ от MN проводим среднюю линию треугольника и получаем в пересечении ее с прямой NO точку Q; на прямой MQ находим вершину A ($QA = QM$), из которой проводим две касательные к окружности с центром O и радиусом r.

З. А. Скопец (Ярославль)

Алгебраические решения задачи прислали *Л. Н. Бескин* (Москва), *Э. Г. Готман* (Печера), *В. Л. Рабинович* (Петропавловск-Казахстанский).

В. Проблемы

3 [2]). Рассмотрим схему типа изображенной на рис. 19, состоящую из произвольного числа k строк, содержащих соответственно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ клеток; $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k$ (на рис. 19 $k=6$ и $\lambda_1=7$, $\lambda_2=\lambda_3=5$, $\lambda_4=\lambda_5=4$, $\lambda_6=2$). Обозначим общее число клеток схемы (равное $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k$) через N и зададимся задачей расставить в этих N клетках числа от 1 до N так, чтобы в каждой строке схемы числа возрастали слева направо и в каждом столбце — сверху вниз. Спрашивается, сколькими способами это можно сделать.

1	2	4	7	11	15	21
3	5	6	16	22		
8	9	12	17	26		
10	13	19	23			
14	18	25	27			
20	24					

Рис. 19.

Используя косвенные соображения, связанные с теорией представлений групп, автор нашел, что ответ в этой задаче равен

$$\frac{N!}{l_1!\,l_2!\ldots l_k!}\prod_{i<j}(l_i-l_j),\ \text{где}\ l_i=\lambda_i+k-i;\ i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k;$$

было бы интересно подтвердить этот результат прямым подсчетом.

Ф. А. Березин (Москва)

1°. Пусть $r_k(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ — число, указанное в условии задачи; $R_k(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ — искомое число расстановок; нам надо доказать, что $R_k(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)=r_k(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ при любых $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$.

Заметим, что выражение r_k определено для любых неотрицательных $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$, а выражение R_k — только в случае $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\ldots\geqslant\lambda_k>0$. Расширим область определения R_k.

[1]) См., например, Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 2, М., 1952, задача **115**.

[2]) Условие задачи, напечатанное в вып. 2 «Математического просвещения», содержало ошибку.

а) Пусть $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_a > 0$ и $\lambda_{a+1} = 0, \cdots, \lambda_k = 0$. Положим в этом случае

$$R_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = R_a(\lambda_1, \ldots, \lambda_a).$$

б) Если для некоторого i $\lambda_i = \lambda_{i+1} - 1$, то положим $R_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = 0$. (Легко видеть, что в этом случае r_k также равно нулю.)

2°. Доказательство проведем индукцией по k и по N. При $k = 1$ и любом λ_1 $R_1(\lambda_1) = r_1(\lambda_1)$ $(=1)$. Допустим, что равенство $R_k = r_k$ справедливо для всех $k \leqslant k_0 - 1$. Докажем, что оно остается верным и для $k = k_0$.

При $N = k_0$ $R_{k_0} = r_{k_0}$ $(=1)$. Пусть теперь равенство $R_{k_0} = r_{k_0}$ справедливо для всех $N \leqslant N_0 - 1$. Нужно показать, что $R_{k_0} = r_{k_0}$ и при $N = N_0$.

3°. Пусть $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{k_0}$ и $\lambda_1 + \ldots + \lambda_{k_0} = N_0$. Число N_0 может занимать в каждой строке лишь крайнюю правую клетку (причем последующие строки должны содержать меньше клеток). Если N_0 занимает последнюю клетку i-й строки, то общее число таких (допустимых) размещений равно $R_{k_0}, (\lambda_1, \ldots, \lambda_i - 1, \ldots, \lambda_{k_0})$. Значит, общее число всех размещений

$$R_{k_0}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k_0}) = \sum_{i=1}^{k_0} R_{k_0}(\lambda_1, \ldots, \lambda_i - 1, \ldots, \lambda_{k_0}), \tag{1}$$

или, в силу предположения индукции,

$$R_{k_0}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k_0}) = \frac{(N_0 - 1)! \prod\limits_{i<j} (l_i - l_j)}{l_1!\, l_2! \ldots l_{k_0}!} \sum_{i=1}^{k_0} l_i \prod_{j \neq i} \frac{l_i - l_j - 1}{l_i - l_j}. \tag{2}$$

4°. Обозначим $(x - l_1) \ldots (x - l_{k_0})$ через $F(x)$. Тогда

$$\prod_{j \neq i} \frac{l_i - l_j - 1}{l_i - l_j} = -\frac{F(l_i - 1)}{F'(l_i)},$$

и сумма в правой части (2) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{k_0} l_i \prod_{j \neq i} \frac{l_i - l_j - 1}{l_i - l_j} = -\sum_{i=1}^{k_0} l_i \frac{F(l_i - 1)}{F'(l_i)}. \tag{3}$$

Учитывая, что $F(l_i - 1) = \sum\limits_{p=1}^{k_0} \frac{F^{(p)}(l_i)}{p!}(-1)^p$ (по формуле Тэйлора), преобразуем правую часть (3) к виду

$$-\sum_{i=1}^{k_0} l_i \frac{F(l_i - 1)}{F'(l_i)} = -\sum_{i=1}^{k_0} \sum_{p=1}^{k_0} (-1)^p l_i \frac{F^{(p)}(l_i)}{p!\, F'(l_i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k_0} l_i - \sum_{i=1}^{k_0} l_i \frac{F''(l_i)}{F'(l_i)\, 2!} - \sum_{p=3}^{k_0} \sum_{i=1}^{k_0} (-1)^p l_i \frac{F^{(p)}(l_i)}{p!\, F'(l_i)}. \tag{4}$$

Воспользуемся теперь формулой Эйлера[1]), согласно которой для любого многочлена $F(x)$ k-й степени с различными корнями $l_1, \ldots, l_k$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{l_i^p}{F'(l_i)} = \begin{cases} 0 & \text{при } p < k-1, \\ 1 & \text{при } p = k-1. \end{cases}$$

Отсюда, если $P(x) = a_0 x^n + \ldots + a_n$, то

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{P(l_i)}{F'(l_i)} = \begin{cases} 0 & \text{при } n < k-1, \\ a_0 & \text{при } n = k-1. \end{cases}$$

Теперь легко преобразовать выражение (4) к окончательному виду

$$\sum_{i=1}^{k_0} l_i - \frac{k_0(k_0-1)}{2} = \sum_{i=1}^{k_0} \lambda_i = N_0,$$

откуда, наконец, следует [см. (1), (2)], что

$$R_{k_0}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k_0}) = \frac{N_0! \prod\limits_{i<j} (l_i - l_j)}{l_1! \ldots l_{k_0}!}.$$

Л. А. Гутник (Москва)

М. Тер-Мкртачан (Ереван), также решивший эту задачу, указывает наряду с решением, опирающимся на рекуррентное соотношение (1), также и другое решение, исходящее из эквивалентности поставленной задачи следующей: *из урны, содержащей N шаров k разных цветов, последовательно извлекаются все шары; найти вероятность того, что в каждый момент число извлеченных шаров i-го цвета (где $i = 1, 2, \ldots, k-1$) будет не меньше числа извлеченных шаров $(i+1)$-го цвета.* Впрочем, это решение, подробно проведенное Тер-Мкртачаном для случая $k = 2$, в общем случае приводит к весьма громоздким выкладкам и поэтому уступает приведенному выше.

М. Тер-Мкртачан указывает также, что решение более общей задачи о вероятности такого извлечения из урны N шаров k разных цветов, при котором число извлеченных шаров i-го цвета все время превосходило бы число извлеченных шаров $(i+1)$-го цвета не меньше чем на a_i (где $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ — заданные неотрицательные числа) представляло бы известный интерес для статистики; он же ставит задачу об определении всех вообще функций $R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ от k целочисленных аргументов, удовлетворяющих уравнению (1).

В проблеме 4 предлагалось найти такое число k, что любое число n попарно пересекающихся выпуклых фигур «можно проткнуть k иглами»; другими словами, число k такое, что можно найти k точек, хоть одну из которых задевает каждая из n фигур. При этом отдельно предлагалось решить задачу для окружностей; для произвольных равных выпуклых фигур; для каких

---

[1]) См., например, В. А. Кречмар, Задачник по алгебре, М., 1959, задача 79.

угодно выпуклых фигур; в последнем случае оговаривалась необходимость ограничить как-то изменение диаметра и ширины фигур. Подобная оговорка явно необходима и в случае *равных* фигур; в самом деле, достаточно рассмотреть сетку из n^2 узких и длинных прямоугольников (рис. 20), для которых потребуется n «игл», чтобы убедиться в необходимости ограничить отношение диаметра фигуры к ее ширине (от этого отношения, по-видимому, должно зависеть число k).

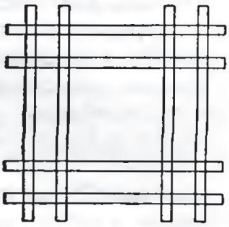

Рис. 20.

Редакция получила несколько писем, указывающих на это обстоятельство. В частности, *А. Хеппес* (Будапешт, Венгрия) считает, что эту задачу вообще нельзя перенести с кругов на произвольные выпуклые фигуры, поскольку здесь существенную роль играет то обстоятельство, что *круг остается связным множеством, если из него удалить пересечение с любым другим кругом*, а для произвольных выпуклых фигур это уже не будет верно. В этой связи он указывает на следующее предложение, в условии которого оказывается существенной оговорка подобного рода: *если A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 — такие попарно пересекающиеся связные множества на плоскости, что удаление из каждого из них его пересечения с любым другим оставляет его связным, то найдутся три из этих множеств, имеющие общую точку* (три множества, которые «можно проткнуть одной иглой»).