

Л. М. Котляр, О. В. Троепольская

## ИСТЕЧЕНИЕ СТРУИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СТЕНКЕ ПРИ НАЛИЧИИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Исследуются две задачи об истечении тяжелой идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной сверху свободной поверхностью, из щели в горизонтальном дне и через сток. Задачи решаются в точной нелинейной постановке методом, предложенным Биркгофом [1], который дал решение задачи об истечении из отверстия для безграничной жидкости. Конвей [2] применил метод Биркгофа для случая, когда жидкость ограничена сверху твердой стенкой.

1°. Рассмотрим истечение струи тяжелой жидкости из отверстия ширины  $2l$  в горизонтальном дне, на бесконечности в потоке скорость равна  $V_\infty$ , толщина слоя жидкости —  $H$ . Вектор ускорения силы тяжести  $\bar{g}$  направлен вдоль оси  $Ox$ , относительно которой течение симметрично, ось  $Oy$  совпадает с горизонтальной стенкой.

Для решения задачи введем вспомогательную комплексную переменную  $u$ , изменяющуюся в области  $G_u$  — прямоугольнике со сторонами  $\pi/2$  и  $\pi|\tau|/2$ ,  $\tau = i|\tau|$ , и будем искать функцию  $z(u)$ , конформно отображающую область  $G_u$  на область течения так, чтобы свободные поверхности перешли в горизонтальные стороны прямоугольника, а полигоны — в вертикальные. Схема течения и соответствие точек в физической и параметрической областях указаны на рис. 1.

Производная комплексного потенциала течения  $w$  в плоскости  $u$  строится по известным особенностям. В области  $G_u \frac{dw}{du}(u)$  имеет простые нули в точках  $D$  и  $B$  и полюсы первого порядка

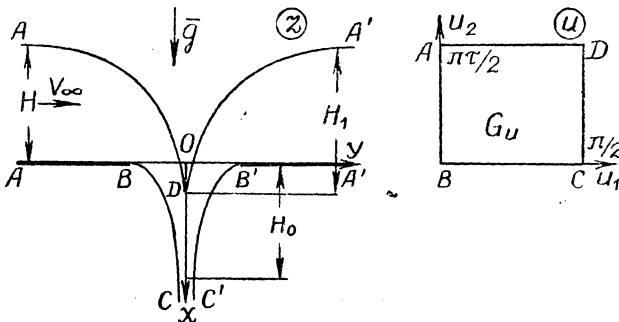


Рис. 1.

в точках  $A$  и  $C$  (источник и сток). Учитывая, что  $\operatorname{Re} \frac{dw}{du}(u) = 0$  на  $DC$  и  $AB$ , а  $\operatorname{Im} \frac{dw}{du}(u) = 0$  на  $AD$  и  $BC$ , получаем

$$\frac{dw}{du}(u) = N \frac{\theta_1(u) \theta_3(u)}{\theta_2(u) \theta_4(u)}, \quad (1)$$

где  $N$  — некоторая вещественная константа, которую найдем, определяя вычет функции  $\frac{dw}{du}(u)$  в точке  $A$

$$iV_\infty H = \frac{Ni\pi}{2} \frac{\theta_2(0) \theta_4(0)}{\theta_1(0) \theta_3(0)},$$

откуда

$$N = \frac{2}{\pi} V_\infty H \theta_3^2(0). \quad (2)$$

Рассмотрим комплексную скорость течения  $\zeta(u) = \frac{1}{V_\infty} \frac{dw}{dz}(u)$ .

Так как струя в свободном падении становится на бесконечности бесконечно тонкой, то вблизи точки  $C$  имеем асимптотически  $\zeta \sim \sqrt{2gz}$ , откуда  $z \sim (3w/\sqrt{8g})^{2/3}$ . Кроме того, поскольку  $w|_C \sim \ln \theta_2(u)$ , то приходим к заключению, что

$$\zeta(u)|_C \sim [\ln \theta_2(u)]^{1/3}.$$

Следуя [1] и исходя из анализа особенностей функции  $\zeta(u)$ , будем искать  $\zeta(u)$  в виде

$$\zeta(u) = \zeta_0(u) \zeta_1(u) \exp[\Omega(u)]. \quad (3)$$

Здесь  $\zeta_0(u)$  — комплексная скорость соответствующего течения невесомой жидкости с различными скоростями на разных участках свободной поверхности

$$\zeta_0(u) = \exp\left(iu + \frac{\pi|\tau|}{2} - i\frac{\pi}{2}\right). \quad (4)$$

Функция  $\zeta_1(u)$  учитывает особенность  $\zeta(u)$  в точке  $C$ . Так как на  $AB$  и  $DC$   $\operatorname{Im} \zeta_1(u)$  должна быть равна нулю, можем записать

$$\zeta_1(u) = [-\ln Ce^{iu} \theta_2(u)]^{1/3}, \quad (5)$$

если  $0 < C < 1/\theta_2(0)$ . Регулярную в области  $G_u$  функцию  $\Omega(u)$  ищем в виде ряда

$$\Omega(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(2iun), \quad (6)$$

где  $c_n$  — неизвестные действительные коэффициенты.

Из формул (1) — (6) найдем

$$\begin{aligned} \frac{dz}{du}(u) &= \frac{2H}{\pi} \theta_3^2(0) \frac{\theta_1(u) \theta_3(u)}{\theta_2(u) \theta_4(u)} [-\ln C e^{iu} \theta_2(u)]^{-1/3} \times \\ &\times \exp \left\{ -iu + i \frac{\pi}{2} - \frac{\pi |\tau|}{2} - c_0 - \right. \\ &\left. - \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \exp(2iun) + c_{-n} \exp(-2iun)] \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

В решение задачи (1), (3), (7) входят неизвестные коэффициенты  $c_0$ ,  $c_n$ ,  $c_{-n}$  ( $n = 1 \div \infty$ ) и параметр  $|\tau|$ .

Для определения коэффициентов  $c_n$ ,  $c_{-n}$  используем уравнение Бернулли на свободных поверхностях  $V^2 - 2gx = \text{const}$ . В дифференциальной форме оно имеет вид

$$\frac{V^2}{V_\infty^2} \frac{d}{du} \left( \frac{V}{V_\infty} \right) = \frac{g \cos \theta(u)}{V_\infty^3} \frac{d\varphi}{du}. \quad (8)$$

Здесь  $\theta$  — угол наклона скорости на струе к оси  $Ox$ ,  $\varphi$  — потенциал скорости.

Полагаем на струях  $u = u_1 + k\pi\tau/2$  ( $k = 0; 1$  — соответственно на  $BC$  и  $AD$ ) и вводим обозначения

$$\rho = \exp(-\pi|\tau|), \quad r_k(u_1) = \ln [C \theta_{2+k}(u_1)] - \frac{k\pi|\tau|}{4},$$

$$\begin{aligned} \theta_{1k}(u_1) &= u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \rho^{kn} - c_{-n} \rho^{-kn}) \sin 2nu_1 + \frac{1}{3} \arctg \frac{(k-1)u_1}{-r_k(u_1)}, \\ g_k(u_1) &= r_k^2(u_1) + (1-k)u_1^2, \\ f_{1k}(u_1) &= \frac{\theta_{3k+1}(u_1) \theta_{3-k}(u_1)}{\theta_{2+k}(u_1) \theta_{4-3k}(u_1)}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$f_{2k}(u_1) = \exp \left[ \frac{\pi|\tau|}{2} (1-k) + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \rho^{kn} + c_{-n} \rho^{-kn}) \cos 2nu_1 \right],$$

$$f_{3k}(u_1) = \frac{1}{3} g_k^{-1}(u_1) \left[ (1-k)u_1 + r_k(u_1) \frac{\theta'_{2+k}(u)}{\theta_{2+k}(u)} \right] \quad (k = 0; 1).$$

Из (1) и (3) найдем

$$\frac{d\varphi}{du}(u_1) = \frac{2}{\pi} V_\infty H \theta_3^2(0) f_{1k}(u_1), \quad (10)$$

$$\frac{V}{V_\infty}(u_1) = f_{2k}(u_1) [g_k(u_1)]^{1/6}, \quad (11)$$

$$\frac{d}{du} \left( \frac{V}{V_\infty} \right) = f_{2k}(u_1) \left[ - \sum_{n=1}^{\infty} 2n (c_n \rho^{kn} + c_{-n} \rho^{-kn}) \sin 2nu_1 + f_{3k}(u_1) \right] \times \\ \times [g_k(u_1)]^{1/6}, \quad (12)$$

$$\Theta(u_1) = \frac{\pi}{2} - \Theta_{1k}(u_1). \quad (13)$$

Подставляя (10) – (13) в условие (8), получим систему двух уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n (c_n \rho^{kn} + c_{-n} \rho^{-kn}) \sin 2nu_1 = - \frac{2}{\pi Fr} \theta_3^2(0) f_{1k}(u_1) \times \\ \times [f_{2k}(u_1)]^{-3} [g_k(u_1)]^{-1/2} \sin \Theta_{1k}(u_1) + f_{3k}(u_1) \quad (k=0; 1), \quad (14)$$

где  $Fr = V_\infty^2/gH$  — число Фруда.

Доказательство разрешимости аналогичного нелинейного интегро-дифференциального уравнения для задачи об истечении струи без наличия свободной поверхности при достаточно больших числах Фруда приведено в работе [3].

Из соотношений (14) получим формулы для определения коэффициентов  $c_n, c_{-n}$ . Умножая (14) на  $\sin 2nu_1$  и интегрируя в пределах от 0 до  $\pi/2$ , будем иметь

$$c_m \rho^{km} + c_{-m} \rho^{-km} = \frac{2}{m\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ - \frac{2\theta_3^2(0)}{\pi Fr} \frac{f_{1k}(u) \sin \Theta_{1k}(u)}{f_{2k}^3(u) [g_k(u)]^{1/2}} + f_{3k}(u) \right] \times \\ \times \sin 2mu du = \frac{2}{m\pi} I_{mk} \quad (k=0; 1), \quad (m=1 \div \infty).$$

Отсюда найдем

$$c_m = \frac{2}{m\pi (1 - \rho^{2m})} (I_{m0} - \rho^m I_{m1}); \quad c_{-m} = \frac{2\rho^m}{m\pi (1 - \rho^{2m})} (I_{m1} - \rho^m I_{m0}). \quad (15)$$

Коэффициент  $c_0$  определяем из условия

$$\frac{1}{V_\infty} \frac{dw}{dz} \Big|_A = \exp \left( -i \frac{\pi}{2} \right), \\ c_0 = - \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \rho^n + c_{-n} \rho^{-n}) - \frac{1}{3} \ln [-r_1(0)]. \quad (16)$$

Используя обозначения (9), из соотношения (7) находим выражение для  $l/H$  (уравнение для определения параметра  $|\tau|$ ) и формулы для координат точек свободных поверхностей

$$\frac{l}{H} = Im \int_0^{\pi/2} \frac{dz}{du} du = \int_0^{\pi/2} R_0(u) \cos \theta_{10}(u) du, \quad (17)$$

$$\begin{cases} \frac{x_{jk}}{H} = \left(\frac{H_1}{H} - 1\right)k + (-1)^{k+1} \int_{k\pi/2}^{u_{jk}} R_k(u) \sin \Theta_{1k}(u) du, \\ \frac{y_{jk}}{H} = -\frac{l}{H}(1-k) + \int_{k\pi/2}^{u_{jk}} R_k(u) \cos \Theta_{1k}(u) du, \end{cases} \quad (18)$$

где

$$\frac{H_1}{H} = \int_0^{\pi/2} R_1(u) \sin \Theta_{11}(u) du;$$

$$R_k(u) = \frac{2}{\pi} \frac{\theta_3^2(0) f_{1k}(u)}{f_{2k}(u) [g_k(u)]^{1/6}}; \quad 0 \leq u_{jk} \leq \pi/2, \quad k=0; 1.$$

В случае истечения тяжелой жидкости можно ввести в рассмотрение коэффициент сжатия струи  $k_0$ , вычисляемый как отношение ширины струи при некотором  $x = H_0$  к ширине отверстия  $2l$ . Используя (7), получим следующую формулу:

$$k_0 = 1 - \frac{H}{l} \int_0^{u_0} R_0(u) \cos \Theta_{10}(u) du, \quad (19)$$

где  $u_0$  — корень уравнения

$$\frac{H_0}{H} = \int_0^{u_0} R_0(u) \sin \Theta_{10}(u) du.$$

Из уравнения Бернулли и формулы (3) можно найти коэффициент давления  $c_p = (P_\infty - P_0)/(\rho V_\infty^2/2)$

$$\begin{aligned} c_p &= \frac{V_B^2}{V_\infty^2} - 1 - \frac{2}{Fr} = [-\ln C\theta_2(0)]^{2/3} \times \\ &\times \exp\left(\pi|\tau| + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\right) - 1 - \frac{2}{Fr}, \end{aligned} \quad (20)$$

здесь  $P_\infty$  и  $P_0$  — давления на струях  $AD$  и  $BC$  соответственно,  $V_B$  — скорость в точке  $B$ .

Рассматриваемая задача решалась численно на ЭВМ ЕС-1033. В качестве исходных данных задавались параметры  $Fr$  и  $l/H$ . Для нахождения коэффициентов  $c_0, c_n, c_{-n}$  ( $n = 1 \div M$ ) и параметра  $|\tau|$  решалась система (15), (16) совместно с уравнением (17) методом простой итерации. При этом за нулевое приближение принимались  $c_n^{(0)} = 0$  ( $n = -M, M$ ). Процесс итераций

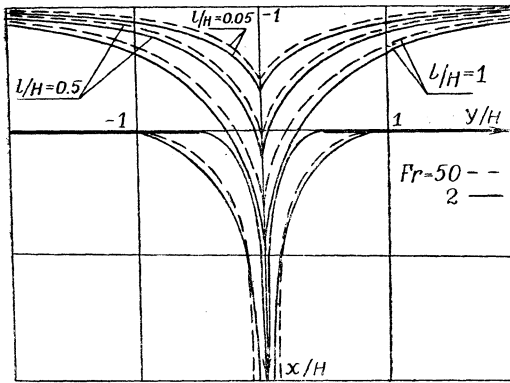


Рис. 2.

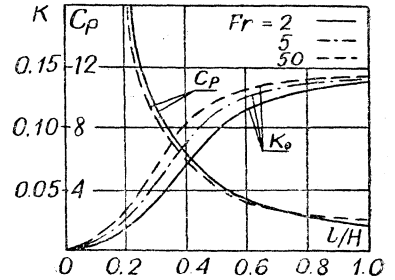


Рис. 3.

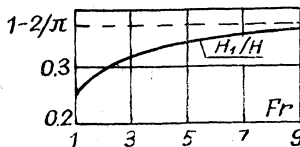
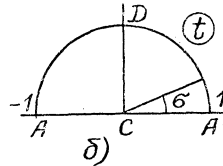
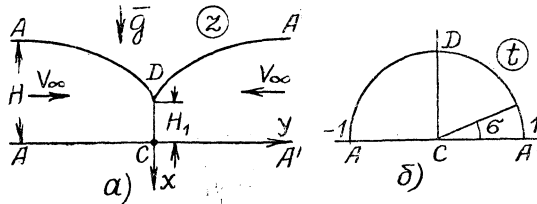
заканчивался, как только достигалась заданная точность

$$|c_k^{(m)} - c_k^{(m-1)}| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = 10^{-4} \quad (k = -M, M),$$

где  $m$  — номер итерации. Число коэффициентов  $M$  определялось из условия  $|c_{\pm(M+1)}| \leq \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ . Затем по формулам (18), (19) и (20) находились форма свободных границ при различных  $l/H$  и  $Fr$  и коэффициенты  $k_0$  и  $c_p$ .

Форма струи и свободной поверхности для  $l/H = 0,05, 0,5, 1,0$  и зависимости  $k_0(l/H)$  при  $H_0/H = 1$  и  $c_p(l/H)$  для различных значений числа  $Fr$  представлены на рис. 2–3. Численно установлено, что процесс последовательных приближений при нахождении коэффициентов  $c_n$  сходится при  $Fr > 1$ .

2°. Кратко изложим решение задачи об истечении тяжелой идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины  $H$  через сток, расположенный на дне в точке  $C$ . Скорость на бесконечности в потоке равна  $V_\infty$ . Схема течения изображена на рис. 4 а.



б)

Рис. 4.

Отобразим область течения в плоскости  $z$  на верхний полу-  
 круг единичного радиуса плоскости  $t$ ,  $|t| \leq 1$ ,  $\text{Im } t \geq 0$ , при  
 этом потребуем, чтобы точкам  $A$ ,  $C$  и  $D$  соответствовали точки  
 $t = -1$ ,  $0$  и  $i$  (рис. 4 б).

По известным особенностям в области  $G_t$  строим функции  
 $\frac{dw}{dt}(t)$  и  $\zeta(t) = \frac{1}{V_\infty} \frac{dw}{dz}(t)$  аналогично тому, как это было сделано  
 в 1°. Вместо формул (1) — (3) и (7) получим

$$\frac{dw}{dt}(t) = \frac{N(t^2 + 1)}{t(t^2 - 1)}; \quad N = \frac{2}{\pi} V_\infty H; \quad \zeta(t) = \frac{i}{t} \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} t^{2n}\right)$$

(в силу симметрии течения относительно оси  $x$  коэффициенты  
 $c_{2n+1} = 0$ ),

$$\frac{1}{H} \frac{dz}{dt}(t) = -\frac{2i}{\pi} \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} \exp\left(-\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} t^{2n}\right). \quad (21)$$

Из условия  $|\zeta| = 1$  при  $t = -1$  следует, что  $c_0 = -\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}$ ,  
 а для нахождения коэффициентов  $c_{2n}$  ( $n = 1 \div \infty$ ) из уравнения  
 Бернулли (9) на свободной поверхности ( $t = e^{i\sigma}$ ) после соответ-  
 ствующих преобразований получена следующая система:

$$c_{2n} = \frac{4}{n\pi^2 Fr} \int_0^{\pi/2} \text{ctg } \sigma \sin\left(-\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} \sin 2n\sigma\right) \times \\
 \times \exp\left(-3 \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \cos 2n\sigma\right) \sin 2n\sigma d\sigma, \quad (22)$$

где  $Fr = V_\infty^2 / gH$ .

Используя (21), найдем координаты точек свободной поверх-  
 ности

$$\begin{cases} \frac{x_j(\sigma_j)}{H} = -\frac{H_1}{H} + \int_{\pi/2}^{\sigma_j} f(\sigma) \sin \theta_1(\sigma) d\sigma, \\ \frac{y_j(\sigma_j)}{H} = -\int_{\pi/2}^{\sigma_j} f(\sigma) \cos \theta_1(\sigma) d\sigma, \end{cases}$$

здесь

$$f(\sigma) = \frac{2}{\pi} \operatorname{ctg} \sigma \exp\left(-\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \cos 2n\sigma\right), \quad \theta_1(\sigma) = \sigma - \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} \sin 2n\sigma,$$

$$\frac{H_1}{H} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2} \exp\left(-\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_{2n} t^{2n}\right) dt, \quad 0 \leq \sigma_j \leq \pi/2.$$

Система уравнений (22) решалась аналогично тому, как это было сделано в 1° (в этой задаче нулевое приближение коэффициентов  $c_n^{(0)} = 0$  соответствует течению невесомой жидкости). Расчетами было установлено, что решение задачи существует при  $Fr > 1$ . При этом оказалось, что форма свободной поверхности при равных числах  $Fr$  практически совпадает с полученной в задаче 1° при  $l/H < 0,05$ . На рис. 4 в показано, как меняется  $H_1/H$  в зависимости от числа  $Fr$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы, каверны.— М.: Мир, 1964.
2. Conway W. E. The two-dimensional vertical jet under gravity.— J. Math. Anal. Appl., 1967, v. 19, № 2.
3. Keady G., Norbury J. The jet from a horizontal slot under gravity.— Proc. Roy. Soc. London, 1975, A344, p. 471—487.

*Доложено на семинаре 2 февраля 1984 года.*