Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. II. – М.: Наука. – 1984. **3.** *Габриэлов А. М.* // Функц. анализ и его прил. – 1974. – Т. 8, вып. 2. – С. 7–12. **4.** *Гусейн-Заде С. М.* // Функц. анализ и его прил. – 1974. – Т. 8, вып. 4. – С. 23–30. **5.** *Милнор Дж.* Особые точки комплексных гиперповерхностей. – М.: Мир, 1971.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
17 декабря 1991 г.

УДК 517

О комплексах Весса–Зумино

© 1993. Е. Е. Демидов

Не так давно Вессом и Зумино была предложена конструкция аналога комплекса де Рама (WZ-комплекс) для некоммутативных («квантовых») аффинных пространств [5]. Оказалось, что этот аналог тесно связан с решениями квантового уравнения Янга–Бакстера (YB). В настоящей заметке описаны простейшие свойства алгебры дифференциальных операторов, ассоциированной с WZ-комплексом (аналог алгебры Вейля); вычислены когомологии WZ-комплекса, построенного по R-матрице Садбери [4]. Определены «морфизмы Фробениуса и Картье в нулевой характеристике», возникающие, когда параметры деформации суть корни из 1.

1. Зафиксируем алгебраически замкнутое поле k, $\operatorname{char} k = 0$. Если $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ — семейство квадратичных алгебр с одинаковым количеством образующих n, то существует универсальная квадратичная алгебра $M(\mathcal{A})$, для которой каждая A_α является левым комодулем [2]. Эта алгебра $M(\mathcal{A})$ может быть представлена как $k\langle z_i^j \mid i, j = 1, \dots, n\rangle / I_{\mathcal{A}}$. Хопфову оболочку $M(\mathcal{A})$ обозначим $G(\mathcal{A})$ [3].

2. Определение WZ-комплексов. Исходные данные: квадратичные алгебры $A = k\langle x_1, \dots, x_n\rangle/(I_A)$, $B = k\langle \xi_1, \dots, \xi_n\rangle/(I_B)$; I_A, I_B — подпространства квадратичных соотношений, порождающие идеалы. WZ-комплексом, ассоциированным с A и B, называется квадратичная алгебра Ω такая, что

1. Ω порождена $x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n$ и содержит A и B в качестве подалгебр;
2. $\{\xi_i\}$ ($\{x_i\}$) линейно независимы над A (над B) справа;
3. существуют операторы $\Xi_{ij}\colon A \to A$, $X_{ij}\colon B \to B$ такие, что

$$f\xi_j = \sum_i \xi_i \Xi_{ij}(f), \quad f \in A; \qquad \varphi x_j = \sum_i x_i X_{ij}(\varphi), \quad \varphi \in B;$$

4. Ω является левым $M(A, B)$-комодулем, причем эта структура наследуется с A и B;
5. существует дифференциал $d\colon \Omega \to \Omega$, переводящий x_i в ξ_i, а ξ_i в 0 и действующий по градуированному правилу Лейбница $d(\varphi\psi) = d\varphi\,\psi + (-1)^{\widetilde{\varphi}}\varphi\, d\psi$ (градуировка определяется по B);
6. d является эндоморфизмом $M(A, B)$-комодуля Ω.

Таким образом, Ω как векторное пространство есть, вообще говоря, фактор $B \bigotimes_k A$, и для определения Ω фактически необходимы лишь соотношения вида $x_i \otimes \xi_j = \sum_{k,\ell} T_{ij}^{k\ell} \xi_k \otimes x_\ell$. Теорема существования WZ-комплексов содержится в [1]. Следующий способ их построения указан в [5]. Пусть R — невырожденное

решение (YB) и $(R-1)(R+c)=0$. Положим $I_A=\operatorname{Im}(R-1)$, $I_B=\operatorname{Im}(R+c)$, $T=c^{-1}R$. Эти данные определяют алгебры Ω_R, A_R, B_R. На самом деле так получаются все WZ-комплексы.

3. Пример Садбери [4]. Пусть c, p_{ij}, q_{ij} $(i,j=1,\dots,n)$ — параметры деформации, причем $p_{ii}=q_{ii}=p_{ij}p_{ji}=q_{ij}q_{ji}=1$, $p_{ij}q_{ij}=c^{\operatorname{sgn}(j-i)}$. Положим $(R_+)^{ii}_{ii}=1$, $(R_+)^{ij}_{ij}=1-c$, $(R_+)^{ji}_{ij}=p_{ij}$, $(R_+)^{ij}_{ji}=q_{ij}$, где $i<j$, а все остальные элементы — нули. Далее, $R_-=R_+^{-1}$. R_+ и R_- удовлетворяют (YB) и $(R_\pm-1)(R_\pm+c^{\pm1})=0$. Соответствующие комплексы обозначим $\Omega_{[\pm]}$; алгебры A и B не зависят от $[\pm]$.

4. Дифференциальные операторы. Пусть Ω — WZ-комплекс; введем $\partial_i\colon A\to A$, $\partial_i(x_j)=\delta_{ij}$ и $d=\sum_i\xi_i\partial_i$. Легко видеть, что $\partial_i(fg)=\partial_if\cdot g+\sum_j\Xi_{ij}(f)\partial_jg$ для $f,g\in A$. Обозначим через D алгебру, порожденную операторами ∂_i, и через $\mathcal{D}$ — алгебру, порожденную $\{\partial_i\}$ и операторами левого умножения на x_i. Имеем $\partial_ix_j=\delta_{ij}+\sum_{\alpha,\beta}T^{i\alpha}_{j\beta}x_\alpha\partial_\beta$. Тем самым $\mathcal{D}$ становится фильтрованной алгеброй; $\operatorname{gr}\mathcal{D}$ означает присоединенную алгебру.

Предложение. *$\mathcal{D}$ естественно наделяется структурой левого $G(A,B)$-комодуля, причем $x\mapsto Z\otimes x$ и $\partial\mapsto(Z^{-1})^t\otimes\partial$.*

Пусть $\mathcal{D}_{\check R}$ — алгебра, ассоциированная с $(\Omega^!_R)^{\mathrm{op}}$, порожденная $\check{x_i}$, $\check{\partial_j}=\partial_{\check{x_j}}$ $(\langle\check{x_i},\xi_j\rangle=\delta_{ij})$; $G(A,B)$ естественно действует на $\mathcal{D}_{\check R}$.

Предложение. *Существует изоморфизм алгебр и $G(A,B)$-комодулей $\Phi\colon\mathcal{D}_R\to\mathcal{D}_{\check R}$: («преобразование Фурье»), при котором $\Phi(x_i)=\check{\partial_i}$, $\Phi(\partial_i)=\check{x_i}$.*

Предложение. *Имеются изоморфизмы векторных пространств над k $\Omega_{[\pm]}=B\bigotimes_kA$, $\mathcal{D}_{[\pm]}=A\bigotimes_kD$. Алгебры $\mathcal{D}_{[\pm]}$ являются простыми, если либо $c=1$, либо c не есть корень из 1.*

5. Морфизмы Фробениуса. Пусть R — одна из матриц $R_\pm$, а c есть примитивный корень из 1 степени ℓ. Заменим теперь в R p_{ij}, q_{ij}, c на $p_{ij}^{\ell^2}$, $q_{ij}^{\ell^2}$, 1 соответственно; полученную матрицу обозначим $R^{(\ell)}$ и положим $\Omega_{(\ell)}:=\Omega_{R^{(\ell)}}$. Пусть, ради краткости, $M=M(A_R,B_R)$, $M_{(\ell)}=M(A_{(\ell)},B_{(\ell)})$, а образующие алгебр с индексом (ℓ) обозначим $x_i^{(\ell)},\xi_i^{(\ell)},(z^{(\ell)})^j_i,\dots$.

Теорема. *Корректно определены следующие гомоморфизмы:*

$$F_M\colon M_{(\ell)}\to M,\quad F_M((z^{(\ell)})^j_i)=(z^j_i)^\ell$$

(*продолжается до морфизма алгебр Хопфа $F_G\colon G_{(\ell)}\to G$*);

$$\begin{aligned}&F_\Omega\colon\Omega_{(\ell)}\to\Omega,&&F_\Omega(x_i^{(\ell)})=x_i^\ell,\quad F_\Omega(\xi_i^{(\ell)})=0;\\&F_{\mathcal{D}}\colon\operatorname{gr}\mathcal{D}_{(\ell)}\to\operatorname{gr}\mathcal{D},&&F_{\mathcal{D}}(x_i^{(\ell)})=x_i^\ell,\quad F_{\mathcal{D}}(\partial_i^{(\ell)})=\partial_i^\ell.\end{aligned}$$

Эти гомоморфизмы согласованы с надлежащими структурами на WZ-комплексах и алгебрах дифференциальных операторов.

6. Когомологии WZ-комплексов.

Теорема. *Пусть R есть решение (YB) (как в п. 2) и либо $c=1$, либо c не является корнем из единицы. Тогда $H^i(\Omega^\bullet_R)=0$ при $i>0$, $H^0(\Omega^\bullet_R)=k$.*

Доказательство проводится по аналогии с классическим доказательством леммы Пуанкаре, путем построения некоммутативного аналога стягивающей гомотопии.

Вычислим когомологии $\Omega = \Omega^\bullet_{[\pm]}$ для случая, когда c есть примитивный корень из единицы степени ℓ. Легко видеть, что $H^0(\Omega^\bullet) = \operatorname{Im} F_\Omega|_{A_{(\ell)}}$. Поэтому в данном случае разумно рассматривать $\Omega^\bullet_{(\ell)}$, $\Omega^\bullet$, $H^\bullet(\Omega^\bullet)$ как правые $A_{(\ell)}$-модули.

Теорема. *Правые $A_{(\ell)}$-модули $\Omega^k_{(\ell)}$ и $H^k(\Omega^\bullet)$ изоморфны ($k = 0, 1, \dots, n$), причем изоморфизм осуществляется «оператором Картье» $C^{-1}\colon \Omega^\bullet_{(\ell)} \to H^\bullet(\Omega^\bullet)$ таким, что $C^{-1}(\xi_i^{(\ell)}) = \xi_i x_i^{\ell-1}$ и $C^{-1}(\xi_{i_1} \dots \xi_{i_k} f) = C^{-1}(\xi_{i_1}) \dots C^{-1}(\xi_{i_k}) F_\Omega(f)$.*

Когда работа была закончена, автор получил препринт Ю. И. Манина [6], в котором, в частности, указан иной способ вычисления когомологий комплексов $\Omega^\bullet_{[\pm]}$.

Литература

1. *Мухин Е. Е.* // УМН. – 1991. – Т. 46, No. 4. – С. 165–166. **2.** *Demidov E. E., Manin Yu. I., Mukhin E. E., Zhdanovich D. V.* Non-standard quantum deformations of $\mathrm{GL}(n)$ and constant solutions of the Yang–Baxter equations. – Preprint./RIMS–701. – Kyoto, 1990. **3.** *Manin Yu. I.* // Comm. Math. Phys. – 1989. – V. 123, No. 2. – P. 163–175. **4.** *Sudbery A.* // J. Phys. – 1990. – A. 23. – P. 697–704. **5.** *Wess J., Zumino B.* Covariant differential calculus on the quantum hyperplane. – Preprint./CERN–TH–5697/90. – Geneva, 1990. **6.** *Manin Yu. I.* Notes on quantum groups and quantum de Rham complexes. – Preprint/MPI/91–60. – Bonn, 1991.

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
18 сентября 1991 г.

УДК 517.4

О комбинаторике коприсоединенных орбит

© 1993. А. А. Кириллов

1. Метод орбит в теории представлений групп Ли устанавливает соответствие между двумя типами множеств разной природы:

а) множеством $\widehat{G}$ классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы Ли G;

б) множеством $\mathfrak{g}^*/G$ орбит группы G в ее коприсоединенном представлении, действующем в пространстве $\mathfrak{g}^*$, дуальном к алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G.

Это обстоятельство делает актуальной задачу классификации коприсоединенных орбит групп Ли. Однако связь между орбитами и представлениями существует не только для групп Ли в их классическом понимании, но и для их обобщений и модификаций. В частности, интересные комбинаторные задачи возникают при рассмотрении алгебраических групп G над конечными полями. Этот аспект метода орбит до сих пор оставался в тени, и в этой заметке я хочу привлечь к нему внимание.

2. Пусть G_n — линейная алгебраическая группа всех верхних унитреугольных матриц порядка n, $G_n(K)$ — группа ее точек над полем K, $\mathfrak{g}_n(K)$ — соответствующая алгебра Ли, а $\mathfrak{g}_n^*(K)$ — дуальное K-линейное пространство. В случае когда $K = \mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов, мы используем обозначение $G_n(\mathbb{F}_q) =: G_{n,q}$. Задача о классификации коприсоединенных орбит для