В. Г. Мазья, А. А. Соловьев, Интегральные уравнения теории логарифмического потенциала на контурах с пиком в пространствах Гёльдера, *Алгебра и анализ*, 1998, том 10, выпуск 5, 85–142

Алгебра и анализ
Том 10 (1998), вып. 5

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА НА КОНТУРАХ С ПИКОМ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА

© В. Г. МАЗЬЯ, А. А. СОЛОВЬЕВ

В работе изучаются граничные интегральные уравнения теории логарифмического потенциала на контуре с пиком в пространствах типа Гёльдера. Доказывается разрешимость граничных уравнений и описываются ядра соответствующих операторов. Даются, в частности, условия тривиальности этих ядер.

§1. Введение

В статье доказывается однозначная разрешимость граничных интегральных уравнений краевых задач Дирихле

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \quad u|_\Gamma = \varphi \tag{1.1}$$

и Неймана

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \quad (\partial u/\partial n)|_\Gamma = \psi \tag{1.2}$$

в ограниченной плоской односвязной области Ω, имеющей пик на границе Γ. Здесь и везде мы предполагаем, что нормаль n является внешней. Мы предполагаем также, что точка заострения совпадает с началом координат O.

Пусть $\Gamma \setminus \{O\}$ принадлежит классу C^2. Будем говорить, что O является внешним (внутренним) пиком с касанием первого порядка, если область Ω (внешняя область Ω') задается вблизи пика неравенствами $\kappa_-(x) < y < \kappa_+(x)$, $0 < x < \delta$, где функции $\kappa_\pm$ таковы, что

$$x^{-2}\kappa_\pm(x) \in C^2[0,\delta], \qquad \lim_{x\to+0} x^{-2}\kappa_\pm(x) = \alpha_\pm \quad (\alpha_+ > \alpha_-).$$

Ключевые слова: граничные интегральные уравнения, логарифмический потенциал.

Символами $\Gamma_\pm$ мы будем обозначать дуги $\{(x, \kappa_\pm(x)) : x \in [0, \delta]\}$. Точки на Γ_+ и Γ_- с равными абсциссами будем обозначать через q_+ и q_-. В дальнейшем будем считать, что $\delta = 1$.

Если Ω имеет внешний пик, то решение задачи Дирихле (1.1) мы ищем в виде

$$u(z) = \big(W\sigma\big)(z), \quad z = x + iy \in \Omega,$$

где $W\sigma$ является потенциалом двойного слоя

$$\big(W\sigma\big)(z) = \int\limits_\Gamma \sigma(q) \frac{\partial}{\partial n_q} \log \frac{1}{|z-q|} ds_q, \quad z \notin \Gamma,$$

и в виде

$$u(z) = \big(W\sigma\big)(z) - t\,\mathcal{I}(z),$$

где $\mathcal{I}(z) = \operatorname{Im} z^{1/2}$ и t — вещественное число, если Ω имеет внутренний пик. В случае внешнего пика функция σ удовлетворяет уравнению

$$\pi\sigma - T\sigma = -\varphi \quad \text{на } \Gamma \setminus \{O\}, \tag{1.3}$$

где $(T\sigma)(z)$ — значение потенциала $(W\sigma)(z)$ в граничной точке z, и пара (σ, t) удовлетворяет на $\Gamma \setminus \{O\}$ уравнению

$$\pi\sigma - T\sigma + t\mathcal{I} = -\varphi \tag{1.4}$$

в случае внутреннего пика.

Если Ω имеет внешний пик, то решение задачи Неймана (1.2) ищется в виде

$$u(z) = \big(V\sigma\big)(z), \quad z \in \Omega,$$

где $V\sigma$ — потенциал простого слоя

$$\big(V\sigma\big)(z) = \int\limits_\Gamma \sigma(q) \log \frac{1}{|z-q|} ds_q, \quad z \notin \Gamma.$$

В случае внутреннего пика мы полагаем

$$u(z) = \big(V\sigma\big)(z) + t\,\mathcal{R}(z), \quad z \in \Omega,$$

где

$$\mathcal{R}(z) = \operatorname{Re}\Big(z^{1/2} + \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{4\pi} z^{3/2}(\log z - \pi i) + i\frac{\alpha_+ + \alpha_-}{4} z^{3/2}\Big), \quad z \in \Omega.$$

Здесь однозначные ветви функций $z^{1/2}$, $z^{3/2}$ и $\log z$ фиксируются условиями $\operatorname{Im} z^{1/2} > 0$, $\operatorname{Im} z^{3/2} < 0$ и $\operatorname{Im}\log z = \pi$ в точках $z = x + i0 \in \Omega$, $x < 0$. Тогда функция σ удовлетворяет на $\Gamma \setminus \{O\}$ уравнению

$$\pi\sigma + S\sigma = \psi \tag{1.5}$$

в случае внешнего пика, и пара (σ, t) является решением уравнения

$$\pi\sigma + S\sigma + t\frac{\partial}{\partial n}\mathcal{R} = \psi \quad \text{на } \Gamma \setminus \{O\} \tag{1.6}$$

в случае внутреннего пика. Здесь и везде

$$(S\sigma)(z) = \int_\Gamma \sigma(q)\frac{\partial}{\partial n_z}\log\frac{1}{|z-q|}ds_q, \quad z \in \Gamma \setminus \{O\}.$$

В наших предыдущих статьях [1–3], где мы также изучали граничные интегральные уравнения теории логарифмического потенциала на контурах с пиками, решения и граничные данные характеризовались асимптотическим поведением вблизи пиков. Здесь для каждого рассматриваемого интегрального уравнения мы находим пару функциональных пространств таких, что оператор, порождаемый уравнением, отображает одно из пространств на другое.

Присутствие пика делает невозможным применение теории Фредгольма (см. [4]). Поэтому мы использовали другой подход, предложенный одним из авторов (см. [5]), который основан на представлении решений граничных интегральных уравнений через решения некоторых вспомогательных краевых задач.

Символом $\Lambda_\beta^{1,\alpha}(0,d)$, $d > 0$ мы обозначаем весовое пространство Гёльдера непрерывно-дифференцируемых функций на $(0,d)$ с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{\Lambda_\beta^{1,\alpha}(0,d)} = \sup_{u,v\in(0,d)} \frac{|u^{\beta+\alpha}\varphi'(u) - v^{\beta+\alpha}\varphi'(v)|}{|u-v|^\alpha} + \sup_{u\in(0,d)} u^\beta|\varphi'(u)| + \sup_{u\in(0,d)} u^{\beta-1}|\varphi(u)|.$$

Пространство $\Lambda^\alpha_\beta(0,d)$ определяется как множество непрерывных функций на $(0,d)$ с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{\Lambda^\alpha_\beta(0,d)} = \sup_{u,v\in(0,d)} \frac{|u^{\beta+\alpha}\varphi(u) - v^{\beta+\alpha}\varphi(v)|}{|u-v|^\alpha} + \sup_{u\in(0,d)} u^\beta|\varphi(u)|.$$

Заметим, что любая функция φ из $\Lambda^{1,\alpha}_\beta(0,d)$ $\left(\Lambda^\alpha_\beta(0,d)\right)$ может быть аппроксимирована последовательностью гладких функций с компактными носителями в $(0,d]$ по норме пространства $\Lambda^{1,\alpha'}_{\beta'}(0,d)$ $\left(\Lambda^{\alpha'}_{\beta'}(0,d)\right)$ с показателями $\alpha' < \alpha$ и $\beta' > \beta$.

Сужения функции φ на Γ_+ и Γ_- в дальнейшем будем обозначать через φ_+ и φ_-. Введем пространство $\Lambda^\alpha_\beta(\Gamma)$ непрерывных функций φ на $\Gamma\setminus\{O\}$ с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{\Lambda^\alpha_\beta(\Gamma)} = \sum_\pm \|\varphi_\pm\|_{\Lambda^\alpha_\beta(0,d)} + \|\varphi\|_{\Lambda^\alpha(\Gamma\setminus(\Gamma_+\cup\Gamma_-))}.$$

Здесь и везде классы Гёльдера Λ^α и $\Lambda^{1,\alpha}$ на гладких кривых определяются как обычно.

Определим пространство $\mathcal{N}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)$ как множество функций φ на $\Gamma\setminus\{O\}$ с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{\mathcal{N}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)} = \|\varphi_+ - \varphi_-\|_{\Lambda^{1,\alpha}_{2-\beta}(0,1)} + \|\varphi_+ + \varphi_-\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(0,1)} + \|\varphi\|_{\Lambda^\alpha(\Gamma\setminus(\Gamma_+\cup\Gamma_-))}.$$

Пространство $\mathcal{M}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)$ функций на $\Gamma\setminus\{O\}$ наделим нормой

$$\|\varphi\|_{\mathcal{M}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)} = \|\varphi_+ + \varphi_-\|_{\Lambda^{1,\alpha}_{2-\beta}(0,1)} + \|\varphi_+ - \varphi_-\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(0,1)} + \|\varphi\|_{\Lambda^\alpha(\Gamma\setminus(\Gamma_+\cup\Gamma_-))}.$$

Далее, введем пространство $\mathfrak{Q}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)$ функций φ на $\Gamma\setminus\{O\}$ вида $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где $\varphi_1 \in \mathcal{N}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)$ и $\varphi_2 \in \Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)$. Мы полагаем

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{Q}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)} = \inf\left(\|\varphi_1\|_{\mathcal{N}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)} + \|\varphi_2\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)}\right),$$

где нижняя грань берется по всем допустимым представлениям функции φ. Подобным же образом вводится пространство $\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)$ функций φ на $\Gamma\setminus\{O\}$ вида $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где $\varphi_1 \in \mathcal{M}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)$ и $\varphi_2 \in \Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)$. Норма в $\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)$ определяется как

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)} = \inf\left(\|\varphi_1\|_{\mathcal{M}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)} + \|\varphi_2\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)}\right).$$

Пусть показатели α и β удовлетворяют условиям

$$0<\alpha,\beta<1\,,\quad \beta\neq 1/2\,.$$

Описание наших результатов мы начнем, предполагая, что Ω имеет внешний пик. В теоремах 2.1 и 3.1 мы доказываем непрерывность операторов

$$\mathfrak{Q}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathbb{R}\ni\sigma\longmapsto\pi\sigma-T\sigma\in\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathbb{R}\tag{1.7}$$

и

$$\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\ni\sigma\longmapsto\pi\sigma+S\sigma\in\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_1\,,\tag{1.8}$$

где $\mathcal{D}_1$ есть линейная оболочка функции $(\partial/\partial s)\operatorname{Re}z$, $z\in\Gamma\setminus\{O\}$. Как показано в теореме 5.2, область значений оператора (1.7) совпадает с пространством $\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathbb{R}$.

Символом $(\Lambda_0)^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)$ мы будем обозначать множество функций $\psi\in\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)$, удовлетворяющих соотношению $\int_\Gamma\psi ds=0$. Введем линейную оболочку $\mathcal{D}_2$ функций вида $(\partial/\partial s)\operatorname{Re}z$ и $\operatorname{Re}z^{-1/2}$, $z\in\Gamma\setminus\{O\}$. В теореме 5.4 мы доказываем, что оператор

$$\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_m\ni\sigma\longmapsto\pi\sigma+S\sigma\in(\Lambda_0)^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_1\,,\tag{1.9}$$

где целое m определяется неравенством $(m-1)/2<\beta<m/2$, сюръективен.

Как показано в теоремах 5.1 и 5.3, ядра $\operatorname{Ker}(\pi I-T)$ и $\operatorname{Ker}(\pi I+S)$ тривиальны, если $1/2<\beta<1$, и $\dim\operatorname{Ker}(\pi I-T)=\dim\operatorname{Ker}(\pi I+S)=1$, если $0<\beta<1/2$.

Предположим теперь, что Ω имеет внутренний пик. Непрерывность операторов

$$\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\ni\sigma\longmapsto\pi\sigma-T\sigma\in\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathbb{R}\,,\tag{1.10}$$

$$\mathfrak{Q}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\ni\sigma\longmapsto\pi\sigma+S\sigma\in\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_1\tag{1.11}$$

доказывается в теоремах 2.2 и 3.2. В теореме 6.1 изучаются операторы

$$\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\ni\sigma\xmapsto{\mathcal{W}_\beta}\pi\sigma-T\sigma\in\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathbb{R}\tag{1.12}$$

при $0 < \beta < 1/2$ и

$$\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma) \times \mathbb{R} \ni (\sigma, t) \xmapsto{\mathcal{W}_\beta} \pi\sigma - T\sigma + t\mathcal{I} \in \Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma) \dot{+} \mathbb{R} \tag{1.13}$$

при $1/2 < \beta < 1$, где $\mathcal{I}(z) = \operatorname{Im} z^{1/2}$, $z \in \Gamma \setminus \{O\}$, и доказывается их сюръективность. Инъективность операторов $\mathcal{W}_\beta$ проверяется в теореме 6.2.

Символом $\mathcal{B}_1$ мы обозначаем линейную оболочку функции $\operatorname{Re} z^{-1/2}$, $z \in \Gamma \setminus \{O\}$, и пусть $\mathcal{B}_0$ является пространством, состоящим из нулевой функции. В теореме 6.4 мы доказываем, что оператор

$$\left(\mathfrak{Q}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma) \dot{+} \mathcal{B}_{m-1}\right) \times \mathbb{R} \ni (\sigma, t) \longmapsto \pi\sigma + S\sigma + t\frac{\partial}{\partial n}\mathcal{R} \in (\Lambda_0)^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma) \dot{+} \mathcal{D}_1 \tag{1.14}$$

сюръективен. Как показано в теореме 6.3, ядро оператора (1.14) одномерно.

§2. Непрерывность оператора $\pi I - T$

2.1. Символом $\mathcal{E}^{1,\alpha}_\beta(\mathbb{R})$ мы обозначаем пространство непрерывно-дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$\begin{aligned}
&\|\varphi\|_{\mathcal{E}^{1,\alpha}_\beta(\mathbb{R})} \\
&\quad = \sup_{u,v\in\mathbb{R}} \frac{|(1+u^2)^{(\beta+\alpha)/2}\varphi'(u) - (1+v^2)^{(\beta+\alpha)/2}\varphi'(v)|}{|u-v|^\alpha} \\
&\quad + \sup_{u\in\mathbb{R}} |(1+u^2)^{\beta/2}\varphi'(u)| + \sup_{u\in\mathbb{R}} |(1+u^2)^{(\beta-1)/2}\varphi(u)| \\
&\quad < +\infty.
\end{aligned}$$

Пространство $\mathcal{E}^{\alpha}_\beta(\mathbb{R})$ определяется как множество непрерывных функций на $\mathbb{R}$ с конечной нормой

$$\begin{aligned}
&\|\varphi\|_{\mathcal{E}^{\alpha}_\beta(\mathbb{R})} \\
&\quad = \sup_{u,v\in\mathbb{R}} \frac{|(1+u^2)^{(\beta+\alpha)/2}\varphi(u) - (1+v^2)^{(\beta+\alpha)/2}\varphi(v)|}{|u-v|^\alpha} \\
&\quad + \sup_{u\in\mathbb{R}} |(1+u^2)^{\beta/2}\varphi(u)| \\
&\quad < +\infty.
\end{aligned}$$

Пространства $\mathcal{E}^{1,\alpha}_\beta(r,\infty)$ и $\mathcal{E}^{\alpha}_\beta(r,\infty)$, $r \geq 0$, вводятся тем же способом. Легко проверить, что норма в $\mathcal{E}^{\alpha}_\beta(r,+\infty)$, $r > 0$, эквивалентна

$$\langle\varphi\rangle_{\mathcal{E}^{\alpha}_\beta(r,+\infty)} = \sup_{\substack{u,v\in[r,+\infty) \\ 2|u-v|\leq\min(u,v)}} |u|^{\beta+\alpha}\frac{|\varphi(u)-\varphi(v)|}{|u-v|^\alpha} + \sup_{u\in[r,+\infty)} |u^\beta\varphi(u)|.$$

Заметим также, что оператор $S : S\varphi = \varphi \circ \kappa$, где $\kappa(u) = 1/u$ является биекцией пространства $\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta}(r, +\infty)$ на $\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(0, 1/r)$.

Следующие две леммы о непрерывности интегральных операторов в пространствах $\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta}(\mathbb{R})$ часто используются в дальнейшем. Пусть $K(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}
&(a)\ |K(x,t)||x-t| \le c < \infty,\\
&(b)\ |K(x,t) - K(y,t)| \le c\,\frac{|x-y|}{|x-t|^2} \text{ при } |x-y| < \frac{1}{2}\min(|x-t|, |y-t|),\\
&(c)\ \int_{\mathbb{R}} |K(x,x+t) + K(x,x-t)|dt \le c,\\
&(d)\ \left|\frac{d}{dx}\int_{\mathbb{R}} K(x,t)dt\right| \le c(1+|x|)^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь и везде символом c мы обозначаем различные положительные константы.

Лемма 2.1. *Интегральный оператор T вида*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)dy$$

непрерывен в $\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta}(\mathbb{R})$, если $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$.

Пусть $K(x,y)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{a})\ |K(x,t)|(1+|x-t|^2) \le c < \infty,\\
&(\mathrm{b})\ |K(x,t) - K(y,t)| \le c\,\frac{|x-y|}{(1+|x-t|^2)}\\
&\qquad \text{при } |x-y| < \tfrac{1}{2}\min(|x-t|, |y-t|),\\
&(\mathrm{c})\ \left|\frac{d}{dx}\int_{\mathbb{R}} K(x,t)dt\right| \le c(1+|x|)^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Лемма 2.2. *Интегральный оператор T вида*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)dy$$

непрерывен в $\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta}(\mathbb{R})$, *если* $0 < \alpha < 1$ *и* $0 < \beta < 1$.

Доказательства этих лемм основано на равенстве (см. [6])

$$\begin{aligned} &Tf(x) - Tf(y) \\ &\quad = T\{(f - f(x))\chi_r\}(x) - T\{(f - f(y))\chi_r\}(y) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} [K(x-t) - K(y-t)][f(t) - f(x)]\eta_r(t)dt \\ &\quad + [f(x) - f(y)]T\chi_r(y) + f(x)[T1(x) - T1(y)]. \end{aligned}$$

Здесь χ является C^{∞}-функцией на $\mathbb{R}$, равной 1 на $[-1/2, 1/2]$ и нулю вне $[-1, 1]$, и функции χ_r и η_r определяются соотношениями

$$\chi_r(t) = \chi\left(\frac{1}{r}\left(t - \frac{x+y}{2}\right)\right), \qquad \eta_r = 1 - \chi_r,$$

где $r = |x - y|$.

В следующих двух простых леммах говорится о непрерывности в пространстве $\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta}(0, +\infty)$ конкретных интегральных операторов.

Лемма 2.3. *Оператор T вида*

$$Tg(\tau) = \int_0^{\infty} \nu^{-1/2} \frac{1}{\nu^{1/2} + \tau^{1/2}} g(\nu)\, d\nu$$

непрерывен в $\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta}(0, +\infty)$, *если* $0 < \alpha < 1$ *и* $0 < \beta < 1/2$.

Лемма 2.4. *Оператор T вида*

$$Tg(\tau) = \tau^{-1/2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau^{1/2} + \nu^{1/2}} g(\nu)\, d\nu$$

непрерывен в $\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta}(0, +\infty)$, *если* $0 < \alpha < 1$ *и* $1/2 < \beta < 1$.

2.2. Основными результатами этого параграфа являются теоремы о непрерывности операторов (1.7) и (1.10).

Мы полагаем при $d \leq 1$, что $\varphi \in \Lambda^\alpha_\beta(\Gamma_\pm \cap \{x < d\})$, если сужения φ_+ и φ_- функции φ на Γ_+ и Γ_-, как функции переменной x, принадлежат пространству $\Lambda^\alpha_\beta(0, d)$.

Теорема 2.1. *Пусть* Ω *имеет внешний пик и пусть* $0 < \alpha, \beta < 1$. *Тогда оператор*

$$\Omega^{1,\alpha}_{2-\beta} \dot{+} \mathbb{R} \ni \sigma \longmapsto \pi\sigma - T\sigma \in \Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma) \dot{+} \mathbb{R} \tag{2.3}$$

непрерывен.

Доказательство. Пусть $\kappa \in C_0^\infty(\{|z| < 1\})$ и $\kappa(0) \neq 0$. Достаточно доказать, что

$$\|\kappa(\pi\sigma - T\sigma + T\sigma(0))\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)} \leq c\,\|\sigma\|_{\Omega^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)}\,.$$

Фиксируем малое положительное ε такое, что $|\kappa_\pm(x) - \kappa_\mp(u)| \geq c\,u^2$ для всех u, удовлетворяющих неравенству $|x - u| < 2\varepsilon\, x$. Дуги $\Gamma_\pm$, проектируемые на отрезки $[0, (1+\varepsilon)^{-1}x]$, $[(1+\varepsilon)^{-1}x, (1-\varepsilon)^{-1}x]$ и $[(1-\varepsilon)^{-1}x, 1]$, будем обозначать через $\Gamma^\ell_\pm(x)$, $\Gamma^c_\pm(x)$ и $\Gamma^r_\pm(x)$.

(i) Пусть $\sigma \in \Omega^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)$. Представим $(\pi I - T)\sigma(z) + T\sigma(0)$, $z = x + i\kappa_\pm(x) \in \Gamma_\pm$ в виде

$$\begin{aligned}
&\pi[\sigma(z_+) + \sigma(z_-)] - \int\limits_{\Gamma\setminus(\Gamma_+\cup\Gamma_-)} \sigma(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{|q|}{|z-q|}ds_q \\
&- \int\limits_{\Gamma^\ell_+(x)\cup\Gamma^\ell_-(x)} \sigma(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{|q|}{|z-q|}ds_q - \int\limits_{\Gamma^c_\pm(x)} \sigma(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{|q|}{|z-q|}ds_q \\
&- \Big[\int\limits_{\Gamma^c_\mp(x)} \sigma(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{|q|}{|z-q|}ds_q + \pi\sigma(z_\mp)\Big] - \int\limits_{\Gamma^r_+(x)\cup\Gamma^r_-(x)} \sigma(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{|q|}{|z-q|}ds_q \\
&= \sum_{k=1}^{6} I_k(z)\,.
\end{aligned}$$

Можем считать, что $z \in \Gamma_+$. Ясно, что I_1 и I_2 принадлежат $\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma_+ \cap \{x < 1/2\})$ и удовлетворяют неравенству

$$\|I_1\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma_+\cap\{x<1/2\})} + \|I_2\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma_+\cap\{x<1/2\})} \leq c\,\|\sigma\|_{\Omega^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)}\,.$$

Требуемые оценки для I_3 и I_4 следуют из неравенств

$$\left|\frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{|q|}{|z-q|}\right| = O(1), \quad q\in\Gamma^{\ell}_{\pm}(x)\cup\Gamma^{c}_{+}(x) \tag{2.4}$$

и

$$\left|\frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{|z_2-q|}{|z_1-q|}\right| \le c\,\frac{|z_1-z_2|}{|z_1|}, \tag{2.5}$$

где $q\in\Gamma^{\ell}_{\pm}(x)$, $z_1,z_2\in\Gamma^{\ell}_{+}(x)$ или z_1, z_2, $q\in\Gamma^{c}_{+}(x)$. В результате замены переменных $q=1/p$, $z=1/w$ в I_5 интеграл по $\Gamma^{c}_{-}(x)$ перепишется в виде

$$\int\limits_{S(w_-)}\sigma(1/p)\frac{\partial}{\partial n_p}\log\frac{1}{|p-w|}ds_p,$$

где через w_- обозначен прообраз точки z_- и через $S(w_-)$ — прообраз дуги $\Gamma^{c}_{-}(x)$. Так как изменение $\Delta_S(w)$ функции $\arg(p-w)$ вдоль кривой $S(w_-)$ допускает представление

$$\int\limits_{S(w_-)}\frac{\partial}{\partial s_p}\arg(p-w)ds_p = \int\limits_{S(w_-)}\frac{\partial}{\partial n_p}\log\frac{1}{|p-w|}ds_p = \pi + O\Big(\operatorname{Re}\frac{1}{w}\Big),$$

то $\sigma(1/p)[\pi-\Delta_S(w)]$, как функция переменной $\operatorname{Re}p$, принадлежит $\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta}(2,+\infty)$ и удовлетворяет требуемой оценке. Таким образом, достаточно рассмотреть

$$\int\limits_{S(w_-)}\big(\sigma(1/p)-\sigma(z_-)\big)\frac{\partial}{\partial n_p}\log\frac{1}{|p-w|}ds_p\,.$$

Интегрируя по частям, мы получаем

$$\int\limits_{S(w_-)}(\partial/\partial s_p)\sigma(1/p)\,K(w,p)ds_p\,, \tag{2.6}$$

где

$$K(w,p)=\begin{cases}-\Delta^{\ell}(p), & p\in S^{w_\ell}_{w},\\ \Delta^{r}(p), & p\in S^{w}_{w_r}\,.\end{cases}$$

Здесь w_ℓ, w_r являются концевыми точками дуги $S(w_-)$, $S_p^{w_\ell}$ и $S_{w_r}^p$ — дуги на $S(w_-)$, соединяющие точки p, w_ℓ и w_r, p, и символы $\Delta^\ell(p)$, $\Delta^r(p)$ обозначают приращения функции $p \to \arg(p-w)$ вдоль кривых $S_p^{w_\ell}$ и $S_{w_r}^p$.

Так как $K(w,p)$ удовлетворяет соотношениям (2.1), то в силу леммы 2.1 норма в пространстве $\mathcal{E}_\beta^\alpha(2,+\infty)$ интеграла (2.6) не превосходит $c\,\|\sigma\|_{\Omega^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)}$.

В заключение мы рассмотрим I_6. Так как

$$\left|\frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{|q|}{|z-q|}\right| \le c\,\frac{|z|}{|q|}, \quad q \in \Gamma^r_\pm(x), \tag{2.7}$$

и

$$\left|\frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{|z_2-q|}{|z_1-q|}\right| \le c\,\frac{|z_1-z_2|}{|q|}, \tag{2.8}$$

где z_1, $z_2 \in \Gamma^r_+(x)$ и $q \in \Gamma^r_\pm(x)$, то норма интеграла I_6 в пространстве $\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma_+ \cap \{x<1/2\})$ оценивается через $c\|\sigma\|_{\Omega^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)}$.

В результате получаем

$$\|\pi\sigma - T\sigma + T\sigma(0)\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)} \le c\,\|\sigma\|_{\Omega^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)}\,. \tag{2.9}$$

(ii) Предположим теперь, что $\sigma \in \Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)$. В п. (i) было доказано, что интеграл

$$\int\limits_{\Gamma_+} \sigma(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{|q|}{|z-q|}ds_q$$

принадлежит $\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma_+ \cap \{x<1/2\})$ и удовлетворяет требуемой оценке. Представим

$$\int\limits_{\Gamma_-} \sigma(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{|q|}{|z-q|}ds_q, \quad z \in \Gamma_+,$$

в виде суммы трех интегралов по дугам $\Gamma^\ell_-(x)$, $\Gamma^c_-(x)$ и $\Gamma^r_-(x)$. Обозначим их через J^ℓ, J^c и J^r соответственно. С помощью оценок (2.4), (2.5) и (2.7), (2.8) доказывается, что J^ℓ и J^r принадлежат $\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma_+ \cap \{x<1/2\})$ и удовлетворяют соотношению

$$\|J^\ell\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma_+\cap\{x<1/2\})} + \|J^r\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma_+\cap\{x<1/2\})} \le c\,\|\sigma\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)}\,.$$

В результате замены переменных $q = 1/p$, $z = 1/w$ интеграл J^c примет вид

$$\int\limits_{S(w_-)} \sigma(1/p)\frac{\partial}{\partial n_p}\log\frac{1}{|w-p|}ds_p\,. \tag{2.10}$$

Так как $(\partial/\partial n_p)\log|w-p|$ удовлетворяет условиям (2.2), то, согласно лемме 2.2, интеграл (2.10), как функция переменной $\operatorname{Re} p$, принадлежит пространству $\mathcal{E}^\alpha_\beta(2,\infty)$ и его норма в этом пространстве не превосходит $c\,\|\sigma\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)}$. Таким образом,

$$\|\pi\sigma - T\sigma + T\sigma(0)\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)} \le c\,\|\sigma\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)}\,.$$

Отсюда и из (2.9) следует непрерывность оператора (2.3). •

Теорема 2.2. *Пусть* Ω *имеет внутренний пик и пусть* $0 < \alpha, \beta < 1$. *Тогда оператор*

$$\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma) \ni \sigma \longmapsto \pi\sigma - T\sigma \in \Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathbb{R}$$

непрерывен.

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\|\kappa(\pi\sigma - T\sigma + T\sigma(0))\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)} \le c\,\|\sigma\|_{\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)}\,,$$

где функция κ такая же, как в теореме 2.1.

С этой целью представим $(\pi I - W)\sigma + W\sigma(0)$ на Γ_+ в виде

$$\begin{aligned}
&\pi[\sigma(z_+) - \sigma(z_-)] - \int\limits_{\Gamma\setminus(\Gamma_+\cup\Gamma_-)} \sigma(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{|q|}{|z-q|}ds_q \\
&- \int\limits_{\Gamma^\ell_+(x)\cup\Gamma^\ell_-(x)} \sigma(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{|q|}{|z-q|}ds_q - \int\limits_{\Gamma^c_+(x)} \sigma(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{|q|}{|z-q|}ds_q \\
&+ \Big[\pi\sigma(z_-) - \int\limits_{\Gamma^c_-(x)} \sigma(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{|q|}{|z-q|}ds_q\Big] - \int\limits_{\Gamma^r_+(x)\cup\Gamma^r_-(x)} \sigma(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{|q|}{|z-q|}ds_q \\
&= \sum_{k=1}^{6} I_k(z)\,.
\end{aligned}$$

Ясно, что I_1 принадлежит $\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma_+ \cap \{x < 1/2\})$ и удовлетворяет требуемой оценке. Вместе с тем в теореме 2.1 мы доказали, что $I_2 - I_6$ принадлежат $\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma_+ \cap \{x < 1/2\})$ и их нормы в этом пространстве не превосходят $c\|\sigma\|_{\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)}$. •

§3. Непрерывность оператора $\pi I + S$

Здесь κ такая же функция, как в теореме 2.1. Введем линейную оболочку $\mathcal{D}_1$ функции $(\partial/\partial s)\operatorname{Re} z$, $z \in \Gamma \setminus \{O\}$.

Теорема 3.1. *Пусть Ω имеет внешний пик и пусть $0 < \alpha, \beta < 1$. Тогда оператор*

$$\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma) \ni \sigma \longmapsto \pi\sigma + S\sigma \in \Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma) \dot{+} \mathcal{D}_1 \tag{3.1}$$

непрерывен.

Доказательство. Для $\sigma \in \mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)$ положим

$$A = \lim_{\Gamma_+ \ni z \to 0} S\sigma(z).$$

Перепишем $\pi\sigma + S\sigma$ в виде

$$\Big(\pi\sigma + S\sigma + A\frac{\partial}{\partial s}\operatorname{Re} z\Big) - A\frac{\partial}{\partial s}\operatorname{Re} z .$$

Достаточно доказать, что $\kappa(\pi\sigma + S\sigma - A)$ на Γ_+ удовлетворяет неравенству

$$\|\kappa(\pi\sigma + S\sigma - A)\|_{\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma_+)} \le c\,\|\sigma\|_{\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)} .$$

(i) Мы представим $\pi\sigma(z) + (S\sigma)(z) - A$, $z = x + i\kappa_+(x) \in \Gamma_+$, как

$$\begin{aligned}
&\pi[\sigma(z_+) - \sigma(z_-)] + \int\limits_{\Gamma\setminus(\Gamma_+\cup\Gamma_-)} \sigma(q)\Big(\frac{\partial}{\partial n_z}\log\frac{1}{|z-q|} + \operatorname{Im}\frac{1}{q}\Big)ds_q \\
&+ \Big(\int\limits_{\Gamma_+\setminus\Gamma^r_+(x)} + \int\limits_{\Gamma_-\setminus\Gamma^r_-(x)}\Big)\sigma(q)\operatorname{Im}\frac{1}{q}ds_q + \int\limits_{\Gamma^\ell_+(x)\cup\Gamma^\ell_-(x)} \sigma(q)\frac{\partial}{\partial n_z}\log\frac{1}{|z-q|}ds_q \\
&+ \int\limits_{\Gamma^c_+(x)} \sigma(q)\frac{\partial}{\partial n_z}\log\frac{1}{|z-q|}ds_q + \int\limits_{\Gamma^r_+(x)\cup\Gamma^r_-(x)} \Big(\sigma(q)\frac{\partial}{\partial n_z}\log\frac{1}{|z-q|} + \operatorname{Im}\frac{1}{q}\Big)ds_q \\
&+ \Big(\int\limits_{\Gamma^c_-(x)} \sigma(q)\frac{\partial}{\partial n_z}\log\frac{1}{|z-q|}ds_q + \pi\sigma(z_-)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{7} I_k(z).
\end{aligned}$$

Ясно, что $I_1 - I_3$ принадлежат $\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma_+ \cap \{x < 1/2\})$ и удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=1}^{3} \|I_k\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma_+\cap\{x<1/2\})} \le c\,\|\sigma\|_{\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)}\,.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial n_z}\log\frac{1}{|z-q|} = O(1)\,, \quad q \in \Gamma^l_\pm(x) \cup \Gamma^c_+(x),$$

и

$$\left|\frac{\partial}{\partial n_z}\log\frac{|z_2-q|}{|z_1-q|}\right| \le c\,\frac{|z_1-z_2|}{|z_1|},$$

где $z_1, z_2 \in \Gamma^\ell_+(x)$, $q \in \Gamma^\ell_\pm(x)$ или $z_1, z_2, q \in \Gamma^c_+(x)$, то I_4, I_5 являются элементами $\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma_+ \cap \{x < 1/2\})$ и удовлетворяют требуемым оценкам.

С помощью неравенств

$$\left|\frac{\partial}{\partial n_z}\log\frac{|z_2-q|}{|z_1-q|}\right| \le c\frac{|z_1-z_2|}{|q|}, \quad z_1, z_2 \in \Gamma^r_+(x), \;\; q \in \Gamma^r_\pm(x),$$

и

$$\left|\frac{\partial}{\partial n_z}\log\frac{|q|}{|z-q|} + \operatorname{Im}\frac{1}{q}\right| \le c\frac{|z|}{|q|}, \quad q \in \Gamma^r_\pm(x),$$

доказывается, что

$$\|I_6\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma_+\cap\{x<1/2\})} \le c\,\|\sigma\|_{\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)}\,.$$

Перепишем $I_7(z)$ в виде

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Gamma^c_-(x)} \sigma(q)\left(\frac{\partial}{\partial n_z}\log\frac{1}{|z-q|} - \frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{1}{|z-q|}\right)ds_q \\
&+\left(\int\limits_{\Gamma^c_-(x)} \sigma(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{1}{|z-q|}ds_q + \pi\sigma(z_-)\right) \\
&\quad = J_1(z) + J_2(z)\,.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Учитывая, что на $\Gamma^c_-(x)$

$$\frac{\partial}{\partial n_z}\log\frac{1}{|z-q|} - \frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{1}{|z-q|} = O(1) \tag{3.3}$$

и

$$\left|\frac{\partial}{\partial n_z}\log\frac{|z_2-q|}{|z_1-q|}-\frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{|z_2-q|}{|z_1-q|}\right|\le c\,\frac{|z_2-z_1|}{|z_1-q|}, \qquad (3.4)$$

где $z_1, z_2 \in \Gamma_+^c(x)$ и $|z_1-z_2|<\frac{\varepsilon}{2}\min\{|z_1-q|,|z_2-q|\}$, мы получаем неравенство

$$\|J_1\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma_+\cap\{x<1/2\})}\le c\,\|\sigma\|_{\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)}.$$

Аналогичная оценка для J_2 доказывается, как в теореме 2.1. В результате имеем

$$\|\pi\sigma+S\sigma-A\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma_+\cap\{x<1/2\})}\le c\,\|\sigma\|_{\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)}. \qquad (3.5)$$

(ii) Предположим теперь, что $\sigma\in\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)$. В п. (i) было доказано, что интеграл

$$\int_{\Gamma_+}\sigma(q)\left(\frac{\partial}{\partial n_z}\log\frac{|q|}{|z-q|}+\operatorname{Im}\frac{1}{q}\right)ds_q,$$

как функция переменной z, принадлежит пространству $\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma_+\cap\{x<1/2\})$ и удовлетворяет требуемой оценке.

Разобьем интеграл

$$\int_{\Gamma_-}\sigma(q)\left(\frac{\partial}{\partial n_z}\log\frac{|q|}{|z-q|}+\operatorname{Im}\frac{1}{q}\right)ds_q$$

на три интеграла по дугам $\Gamma_-^\ell(x)$, $\Gamma_-^c(x)$ и $\Gamma_-^r(x)$. Обозначим их соответственно через J^ℓ, J^c и J^r. Как и в п. (i), доказывается, что

$$\|J^\ell\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma_+\cap\{x<1/2\})}+\|J^r\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma_+\cap\{x<1/2\})}\le c\|\sigma\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)}.$$

Представим $J^c(z)$ в виде $J_1^c(z)+J_2^c(z)$, как в (3.2). В силу (3.3) и (3.4) получаем

$$\|J_1^c\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma_+\cap\{x<1/2\})}\le c\|\sigma\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)}.$$

В теореме 2.1 было доказано, что J_2^c принадлежит $\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma_+\cap\{x<1/2\})$ и удовлетворяет требуемой оценке.

Таким образом,

$$\|\pi\sigma+S\sigma-A\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma_+\cap\{x<1/2\})}\le c\,\|\sigma\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)}.$$

Это вместе с (3.5) влечет ограниченность оператора (3.1). •

Теорема 3.2. *Пусть* Ω *имеет внутренний пик и пусть* $0 < \alpha, \beta < 1$. *Тогда оператор*

$$\mathfrak{Q}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma) \ni \sigma \longmapsto \pi\sigma + S\sigma \in \Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_1 \tag{3.6}$$

непрерывен.

Доказательство. Как в теореме 3.1, введем число

$$A = \lim_{\Gamma_+ \ni z \to 0} S\sigma(z).$$

Достаточно доказать, что

$$\|\kappa(\pi\sigma + S\sigma - A)\|_{\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma_+)} \le c\,\|\sigma\|_{\mathfrak{Q}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)}.$$

С этой целью представим $\pi\sigma(z) + S\sigma(z) - A$, $z = x + i\kappa_+(x) \in \Gamma_+$, в виде

$$\begin{aligned}
&\pi[\sigma(z_+) + \sigma(z_-)] + \int\limits_{\Gamma\setminus(\Gamma_+\cup\Gamma_-)} \sigma(q)\Big(\frac{\partial}{\partial n_z}\log\frac{1}{|z-q|} + \operatorname{Im}\frac{1}{q}\Big)ds_q \\
&+ \Big(\int\limits_{\Gamma_+\setminus\Gamma^r_+(x)} + \int\limits_{\Gamma_-\setminus\Gamma^r_-(x)}\Big)\sigma(q)\operatorname{Im}\frac{1}{q}ds_q + \int\limits_{\Gamma^{\ell}_+(x)\cup\Gamma^{\ell}_-(x)} \sigma(q)\frac{\partial}{\partial n_z}\log\frac{1}{|z-q|}ds_q \\
&+ \int\limits_{\Gamma^c_+(x)} \sigma(q)\frac{\partial}{\partial n_z}\log\frac{1}{|z-q|}ds_q + \int\limits_{\Gamma^r_+(x)\cup\Gamma^r_-(x)} \Big(\sigma(q)\frac{\partial}{\partial n_z}\log\frac{1}{|z-q|} + \operatorname{Im}\frac{1}{q}\Big)ds_q \\
&+ \Big(\int\limits_{\Gamma^c_-(x)} \sigma(q)\frac{\partial}{\partial n_z}\log\frac{1}{|z-q|}ds_q - \pi\sigma(z_-)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{7} I_k(z).
\end{aligned}$$

Ясно, что I_1 принадлежит $\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma_+ \cap \{x < 1/2\})$ и удовлетворяет оценке

$$\|I_1\|_{\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma_+)} \le c\|\sigma\|_{\mathfrak{Q}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)}.$$

Вместе с тем в теореме 3.1 было доказано, что I_2–I_7 принадлежат $\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma_+ \cap \{x < 1/2\})$ и их нормы в этом пространстве не превосходят $c\|\sigma\|_{\mathfrak{Q}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)}$. •

§4. Краевые задачи Дирихле и Неймана в полуполосе

4.1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ есть область с C^∞-границей такая, что множество $\{(\tau,\nu) \in G : \tau \le 0\}$ имеет компактное замыкание и $\{(\tau,\nu) \in G : \tau > 0\} = \{(\tau,\nu) : \tau > 0, |\nu| < 1\}$.

Через $C^{\ell,\alpha}(G)$, $0 < \alpha < 1$, обозначим пополнение по норме

$$\|\varphi\|_{C^{\ell,\alpha}(G)} = \sup_{\zeta_1,\zeta_2 \in G} \frac{|\nabla^\ell \varphi(\zeta_1) - \nabla^\ell \varphi(\zeta_2)|}{|\zeta_1 - \zeta_2|^\alpha} + \sup_{\zeta \in G} \sum_{k=0}^{\ell} |\nabla^k \varphi(\zeta)|, \quad \ell = 0,1,2,$$

множества гладких функций в $\overline{G}$ с компактными носителями в $\overline{G}$.

Введем также пространство $C^{-1,\alpha}(G)$ распределений на G с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{C^{-1,\alpha}(G)} = \inf \sum_{k=0}^{3} \|\varphi_k\|_{C^{0,\alpha}(G)},$$

где нижняя грань берется по всем представлениям вида $\varphi = \varphi_0 + (\partial/\partial\tau)\varphi_1 + (\partial/\partial\nu)\varphi_2$ с функциями φ_j, $j = 0,1,2$ из пространства $C^{0,\alpha}(G)$.

Пусть $\beta \in \mathbb{R}$. Введем пространство $C^{1,\alpha}_\beta(G)$ функций φ таких, что $\exp(\beta\tau)\varphi \in C^{1,\alpha}(G)$, и определим норму

$$\|\varphi\|_{C^{1,\alpha}_\beta(G)} = \|\exp(\beta\tau)\varphi\|_{C^{1,\alpha}(G)}.$$

Следующая лемма содержится в более общих результатах статьи [7].

Лемма 4.1. *Пусть $0 < \beta < \pi/2$. Если $\psi \in C^{-1,\alpha}_\beta(G)$, то существует одно и только одно решение $\varphi \in C^{1,\alpha}_\beta(G)$ задачи*

$$\Delta\varphi = \psi \quad \text{в } G, \qquad \varphi = 0 \quad \text{на } \partial G,$$

удовлетворяющее

$$\|\varphi\|_{C^{1,\alpha}_\beta(G)} \le c\,\|\psi\|_{C^{-1,\alpha}_\beta(G)}.$$

Более того, если $\psi \in C^{0,\alpha}_\beta(G)$, то $\varphi \in C^{2,\alpha}_\beta(G)$ и имеет место оценка

$$\|\varphi\|_{C^{2,\alpha}_\beta(G)} \le c\,\|\psi\|_{C^{0,\alpha}_\beta(G)}.$$

4.2. В этом разделе мы рассмотрим вспомогательные краевые задачи Дирихле и Неймана в области G.

Начнем с определений. Пространство $\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)$ вводится как множество функций на ∂G с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)} = \sum_{\pm} \|\varphi(\,\cdot\,,\pm 1)\|_{\mathcal{E}^\alpha_\beta(0,+\infty)} + \|\varphi\|_{\Lambda^\alpha(\partial G \cap \{(\tau,\nu):\, \tau<0\})}\,.$$

Символом $\mathcal{E}^{1,\alpha}_\beta(\partial G)$ будем обозначать класс непрерывно дифференцируемых функций на ∂G с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{\mathcal{E}^{1,\alpha}_\beta(\partial G)} = \sum_{\pm} \|\varphi(\,\cdot\,,\pm 1)\|_{\mathcal{E}^{1,\alpha}_\beta(0,+\infty)} + \|\varphi\|_{\Lambda^{1,\alpha}(\partial G \cap \{(\tau,\nu):\, \tau<0\})}\,.$$

Пространства $\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial\Pi)$ и $\mathcal{E}^{1,\alpha}_\beta(\partial\Pi)$ определяются подобным же образом. Здесь и везде символом Π обозначается полоса $\Pi = \{(\tau,\nu) : \tau \in \mathbb{R}, |\nu| < 1\}$.

Предложение 4.1. *Пусть $\varphi \in \mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)$, $0 < \alpha, \beta < 1$. Тогда существует гармоническое продолжение H функции φ в область G, нормальная производная которой представляется на ∂G в виде*

$$\partial H/\partial n = \partial Q_1/\partial s + Q_2 + Q_3\,, \tag{4.1}$$

где $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)$, $\operatorname{supp} Q_1$ и $\operatorname{supp} Q_2$ содержатся в $\{(\tau,\pm 1) : \tau > 0\}$, $Q_2(\tau,+1) = -Q_2(\tau,-1)$ при $\tau > 0$, и Q_3 убывает на бесконечности быстрее любой степенной функции. Более того, верна оценка

$$\|Q_1\|_{\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)} + \|Q_2\|_{\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)} + \|Q_3\|_{\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)} \le c\,\|\varphi\|_{\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)}$$

с константой c, не зависящей от φ.

Доказательство. (i) Мы начнем со случая, когда $\varphi \in \mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)$ равняется нулю вне $\{(\tau,\pm 1) : \tau > 1\}$. Через $\varphi_\pm$ обозначим функции на $\mathbb{R}$ такие, что

$$\varphi_\pm(\tau) = \varphi(\tau,\pm 1) \text{ при } \tau \ge 1 \quad \text{и} \quad \varphi_\pm(\tau) = 0 \text{ при } \tau < 0\,.$$

Введем ограниченную гармоническую функцию $H^{(+)}$ на Π, принимающую равные значения $(\varphi_+(\tau) + \varphi_-(\tau))/2$ в точках $(\tau,1)$ и $(\tau,-1)$ на $\partial\Pi$. Преобразование Фурье функции $H^{(+)}(\tau,\nu)$ относительно τ имеет вид

$$c_1\left(\widehat{\varphi_+}(\xi) + \widehat{\varphi_-}(\xi)\right)\operatorname{ch}(\xi\nu)\left(\operatorname{ch}\xi\right)^{-1},$$

где через $\widehat{\varphi_\pm}(\xi)$ обозначено преобразование Фурье функций $\varphi_\pm$. Положим

$$Q_{11}(\tau, \pm 1) = \pm \int_{\mathbb{R}} \big(\varphi_+(t) + \varphi_-(t)\big)\Big(\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}(\tau - t)\Big)^{-1} dt.$$

Выполняя обратное преобразование Фурье, получаем

$$\frac{\partial H^{(+)}}{\partial n}(\tau, \pm 1) = \pm c_2 \frac{d}{d\tau} Q_{11}(\tau, \pm 1).$$

Согласно лемме 2.1, имеет место оценка

$$\|Q_{11}\|_{\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial\Pi)} \le c\,\|\varphi_+ + \varphi_-\|_{\mathcal{E}^\alpha_\beta(\mathbb{R})}.$$

Пусть $H^{(-)}$ является ограниченной гармонической функцией на П, принимающей противоположные значения $\big(\varphi_+(\tau) - \varphi_-(\tau)\big)/2$ и $\big(\varphi_-(\tau) - \varphi_+(\tau)\big)/2$ в точках $(\tau, +1)$ и $(\tau, -1)$ на ∂П. Преобразование Фурье функции $H^{(-)}(\tau, \nu)$ относительно τ имеет вид

$$\begin{aligned} &c_3\,\big(\widehat{\varphi_+}(\xi) - \widehat{\varphi_-}(\xi)\big)\operatorname{sh}(\xi\nu)(\operatorname{sh}\xi)^{-1} \\ &= c_3\,\big(\widehat{\varphi_+}(\xi) - \widehat{\varphi_-}(\xi)\big)\operatorname{sh}(\xi\nu)\Big(2(\operatorname{sh}(2\xi))^{-1} + \operatorname{th}\frac{\xi}{2}(\operatorname{ch}\xi)^{-1}\Big). \end{aligned}$$

Положим

$$Q_{21}(\tau, \pm 1) = \int_{\mathbb{R}} \big(\varphi_+(\tau) - \varphi_-(\tau)\big)\big(\operatorname{sh}\pi(\tau - t)\big)^{-1} dt$$

и

$$Q_{22}(\tau, \pm 1) = \pm \int_{\mathbb{R}} \big(\varphi_+(\tau) - \varphi_-(\tau)\big)\Big(\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}(\tau - t)\Big)^{-2} dt.$$

Отсюда и из лемм 1 и 2 следует

$$\|Q_{21}\|_{\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial\Pi)} \le c\,\|\varphi_+ - \varphi_-\|_{\mathcal{E}^\alpha_\beta(\mathbb{R})}$$

и

$$\|Q_{22}\|_{\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial\Pi)} \le c\,\|\varphi_+ - \varphi_-\|_{\mathcal{E}^\alpha_\beta(\mathbb{R})}.$$

С помощью обратного преобразования Фурье получаем

$$\frac{\partial H^{(-)}}{\partial n}(\tau, \pm 1) = \pm c_4 \frac{d}{d\tau} Q_{21}(\tau, \pm 1) + c_5 Q_{22}(\tau, \pm 1).$$

Пусть функция $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ принимает единичное значение при $t > 1$ и обращается в нуль при $t < 0$ и пусть Ψ в $G \cap \{(\tau,\nu) : \tau \ge 0\}$ определяется как

$$\Delta\big(\chi(H^{(-)} + H^{(+)})\big) = 2\frac{\partial}{\partial\tau}\Big((H^{(-)} + H^{(+)})\frac{\partial\chi}{\partial\tau}\Big) + \big(H^{(-)} + H^{(+)}\big)\frac{\partial^2\chi}{\partial\tau^2}$$

и равняется нулю в $G \cap \{(\tau,\nu) : \tau < 0\}$. Ясно, что Ψ принадлежит $C^{-1,\alpha}_\gamma(G)$. Согласно лемме 4.1, краевая задача

$$\Delta Z = -\Psi \quad \text{в } G, \qquad Z = 0 \quad \text{на } \partial G$$

имеет решение, удовлетворяющее при малых положительных γ неравенству

$$\|Z\|_{C^{1,\alpha}_\gamma(G)} \le c\,\|\Psi\|_{C^{-1,\alpha}_\gamma(G)},$$

в котором константа c зависит от γ, но не от φ. Нетрудно видеть также, что норма $\|\Psi\|_{C^{-1,\alpha}_\gamma(G)}$ не превосходит $c\,\|\varphi\|_{\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)}$. Поэтому

$$\|\partial Z/\partial n\|_{\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)} \le c\,\|\varphi\|_{\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)}.$$

Тогда $H = Z + \chi\big(H^{(-)} + H^{(+)}\big)$ является гармонической функцией в G с граничными данными φ. Нормальная производная $\partial H/\partial n$ имеет требуемое представление с функциями Q_1 и Q_2, равными соответственно $\chi(c_1 Q_{11} + c_2 Q_{21})$ и $c_3\chi Q_{22}$ на $\partial G \cap \{(\tau,\nu) : \tau \ge 0\}$ и $Q_1 = Q_2 = 0$ на $\partial G \cap \{(\tau,\nu) : \tau < 0\}$, и с функцией Q_3, равной $(\partial Z/\partial n) - (\partial\chi/\partial s)(c_1 Q_{11} + c_2 Q_{21})$ на $\partial G \cap \{(\tau,\nu) : \tau \ge 0\}$ и $\partial Z/\partial n$ на $\partial G \cap \{(\tau,\nu) : \tau < 0\}$.

(ii) Пусть теперь $\varphi \in \mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)$ имеет компактный носитель. Через θ обозначим конформное отображение единичного круга D на G, удовлетворяющее условию

$\theta(1) = \infty$. Введем гармоническое продолжение F непрерывной функции $\varphi \circ \theta$ на D. Ясно, что нормальная производная $\partial F/\partial n$ на ∂D имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial n}(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{ds}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta(e^{it}))\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}dt, \quad \zeta = e^{is}.$$

Отсюда, согласно теореме Привалова (см. [8, с. 400]), следует, что $\partial F/\partial n$ является производной по переменной s функции из $\Lambda^\alpha(\partial D)$. Поэтому $H = F \circ \theta^{-1}$ осуществляет гармоническое продолжение функции φ в область G и $\partial H/\partial n = (\partial/\partial s)Q_1$, где Q_1 определяется равенством

$$Q_1 \circ \theta(e^{is}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta(e^{it}))\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}dt$$

и удовлетворяет соотношению

$$\|Q_1\|_{\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)} \le c\,\|\varphi\|_{\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)}\,.$$

Отсюда и из (i) следует представление (4.1). •

В предположении, что $\partial\varphi/\partial s \in \mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)$, верно следующее утверждение.

Предложение 4.2. *Пусть φ принадлежит пространству $\mathcal{E}^{1,\alpha}_\beta(\partial G)$ и пусть $0 < \alpha, \beta < 1$. Тогда существует гармоническое продолжение H функции φ в область G, нормальная производная которой на ∂G представляется в виде*

$$\partial H/\partial n = Q_1 + Q_2\,, \tag{4.2}$$

где $Q_1 \in \mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)$, $Q_2 \in \mathcal{E}^{1,\alpha}_\beta(\partial G)$, $\operatorname{supp} Q_2 \subset \{(\tau, \pm 1) : \tau > 0\}$, и $Q_2(\tau, +1) = -Q_2(\tau, -1)$ при $\tau > 0$. Более того, функции Q_1 и Q_2 удовлетворяют оценке

$$\|Q_1\|_{\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)} + \|Q_2\|_{\mathcal{E}^{1,\alpha}_\beta(\partial G)} \le c\,\|\varphi\|_{\mathcal{E}^{1,\alpha}_\beta(\partial G)}$$

с константой c, не зависящей от φ.

Доказательство. Пусть функция $\varphi \in \mathcal{E}^{1,\alpha}_\beta(\partial G)$ равна нулю вне $\{(\tau, \nu) : \tau > 1\}$. Через $\varphi_\pm$ обозначим функции на $\mathbb{R}$, равные $\varphi(\tau, \pm 1)$ при $\tau \ge 1$ и $\varphi_\pm(\tau) = 0$ при $\tau < 0$.

Введем ограниченную гармоническую функцию $H^{(+)}$ в П, принимающую равные значения $(\varphi_+(\tau)+\varphi_-(\tau))/2$ в точках $(\tau,1)$ и $(\tau,-1)$ на $\partial\Pi$. Преобразование Фурье функции $H^{(+)}(\tau,\nu)$ относительно переменной τ имеет вид

$$c_1\left(\widehat{\varphi_+}(\xi)+\widehat{\varphi_-}(\xi)\right)\operatorname{ch}(\xi\nu)(\operatorname{ch}\xi)^{-1},$$

где символы $\widehat{\varphi_\pm}$ обозначают преобразование Фурье функций $\varphi_\pm$. Положим

$$Q_{11}(\tau,\pm1)=\int_{\mathbb{R}}\left(\varphi_+'(t)+\varphi_-'(t)\right)\left(\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}(\tau-t)\right)^{-1}dt.$$

Тогда нормальная производная функции $H^{(+)}$ запишется в виде

$$\frac{\partial H^{(+)}}{\partial n}(\tau,\pm1)=c_2\,Q_{11}(\tau,\pm1).$$

Согласно лемме 2.1, имеем

$$\|Q_{11}\|_{\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)}\le c\,\|\varphi_++\varphi_-\|_{\mathcal{E}^{1,\alpha}_\beta(\mathbb{R})}\,.$$

Пусть теперь $H^{(-)}$ есть ограниченная гармоническая функция в П, принимающая противоположные значения $(\varphi_+(\tau)-\varphi_-(\tau))/2$ и $(\varphi_-(\tau)-\varphi_+(\tau))/2$ в точках $(\tau,+1)$ и $(\tau,-1)$ на $\partial\Pi$. Преобразование Фурье функции $\varphi^{(-)}(\tau,\nu)$ относительно τ имеет вид

$$\begin{aligned}&c_3\left(\widehat{\varphi_+}(\xi)-\widehat{\varphi_-}(\xi)\right)\operatorname{sh}(\xi\nu)(\operatorname{sh}\xi)^{-1}\\&\quad=c_3\left(\widehat{\varphi_+}(\xi)-\widehat{\varphi_-}(\xi)\right)\operatorname{sh}(\xi\nu)\Big(2(\operatorname{sh}(2\xi))^{-1}+\operatorname{th}\frac{\xi}{2}(\operatorname{ch}\xi)^{-1}\Big).\end{aligned}$$

Положим

$$Q_{21}(\tau,\pm1)=\pm\int_{\mathbb{R}}\left(\varphi_+'(t)-\varphi_-'(t)\right)\left(\operatorname{sh}\pi(\tau-t)\right)^{-1}dt$$

и

$$Q_{22}(\tau,\pm1)=\pm\int_{\mathbb{R}}\left(\varphi_+(t)-\varphi_-(t)\right)\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}(\tau-t)\right)^{-2}dt.$$

Согласно леммам 1 и 2, имеем

$$\|Q_{21}\|_{\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta}(\partial G)} \le c\,\|\varphi_+ - \varphi_-\|_{\mathcal{E}^{1,\alpha}_{\beta}(\mathbb{R})}$$

и

$$\|Q_{22}\|_{\mathcal{E}^{1,\alpha}_{\beta}(\partial G)} \le c\,\|\varphi_+ - \varphi_-\|_{\mathcal{E}^{1,\alpha}_{\beta}(\mathbb{R})}\,.$$

Выполняя обратное преобразование Фурье, получаем

$$\frac{\partial H^{(-)}}{\partial n}(\tau, \pm 1) = c_4\,Q_{21}(\tau, \pm 1) + c_5\,Q_{22}(\tau, \pm 1).$$

Пусть функция $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ равняется единице при $t > 1$ и обращается в нуль при $t < 0$ и пусть $\Psi = \Delta\big(\chi(H^{(-)} + H^{(+)})\big)$ в $G \cap \{(\tau,\nu) : \tau \ge 0\}$ и $\Psi = 0$ в области $G \cap \{(\tau,\nu) : \tau < 0\}$. Ясно, что Ψ принадлежит $C^{0,\alpha}_{\gamma}(G)$ и для любого $\gamma > 0$ выполняется неравенство

$$\|\Psi\|_{C^{0,\alpha}_{\gamma}(G)} \le c\,\|\varphi\|_{\mathcal{E}^{1,\alpha}_{\beta}(\partial G)}\,,$$

в котором константа c зависит от γ, но не от φ. В силу леммы 4.1 задача

$$\Delta Z = -\Psi \quad \text{в } G, \qquad Z = 0 \quad \text{на } \partial G$$

имеет решение, которое при достаточно малых положительных γ удовлетворяет неравенству

$$\|Z\|_{C^{2,\alpha}_{\gamma}(G)} \le c\,\|\Psi\|_{C^{0,\alpha}_{\gamma}(G)}\,,$$

где константа c зависит от γ. Отсюда следует, что для нормальной производной $\partial Z/\partial n$ верна оценка

$$\|\partial Z/\partial n\|_{\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta}(\partial G)} \le c\,\|\varphi\|_{\mathcal{E}^{1,\alpha}_{\beta}(\partial G)}\,.$$

Поэтому $H = Z + \chi\big(H^{(-)} + H^{(+)}\big)$ является гармонической функцией в G с граничными данными φ и $\partial H/\partial n$ на ∂G имеет требуемый вид с функцией Q_2, равной $c_3\chi Q_{22}$ на $\partial G \cap \{(\tau,\nu) : \tau \ge 0\}$ и равной нулю на $\partial G \cap \{(\tau,\nu) : \tau < 0\}$.

(ii) Пусть теперь $\varphi \in \varepsilon^{bd}_p(\partial G)$ имеет компактный носитель. Символом θ мы обозначим конформное отображение единичного круга D на G, подчиненное условию $\theta(1) = \infty$. Введем гармоническое продолжение F непрерывной функции $\varphi \circ \theta$ в область D. Нормальная производная $\partial F/\partial n$ на ∂D имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial n}(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{dt}\varphi(\theta(e^{it}))\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}dt\,, \quad \zeta = e^{is}\,.$$

Из этого представления следует, что $\partial F/\partial n \in \Lambda^\alpha(\partial D)$. Поэтому $H = F \circ \theta^{-1}$ является гармоническим продолжением функции φ в область G и $\partial H/\partial n$ на ∂G имеет требуемое представление с функцией Q_2, равной нулю. Ясно, что $Q_1 = \partial H/\partial n$ удовлетворяет неравенству

$$\|Q_1\|_{\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)} \le c\,\|\varphi\|_{\mathcal{E}^{1,\alpha}_\beta(\partial G)}\,.$$

Отсюда и из п. (i) следует требуемое представление (4.2). •

В следующих двух предложениях изучается поведение на границе решения задачи Неймана.

Предложение 4.3. *Пусть φ принадлежит пространству $\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)$ и пусть $0 < \alpha, \beta < 1$. Тогда существует гармоническое продолжение H функции φ в область G такое, что сопряженная функция $\widetilde{H}$ имеет на ∂G представление*

$$\widetilde{H} = Q_1 + Q_2, \tag{4.3}$$

где $Q_1 \in \mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)$, $Q_2 \in \mathcal{E}^{1,\alpha}_\beta(\partial G)$, $\operatorname{supp} Q_2 \subset \{(u, \pm 1) : u > 1\}$, и $Q_2(u, +1) = Q_2(u, -1)$ при $\tau > 0$. Более того, функции Q_1 и Q_2 удовлетворяют неравенству

$$\|Q_1\|_{\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)} + \|Q_2\|_{\mathcal{E}^{1,\alpha}_\beta(\partial G)} \le c\,\|\varphi\|_{\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)}\,,$$

в котором константа c не зависит от φ.

Доказательство. (i) Пусть функция φ принадлежит $\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)$ и $\varphi = 0$ вне $\{(u, \pm 1) : u > 1\}$. Как и в предложении 4.1, мы введем функции $\varphi_\pm(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, равные $\varphi(\tau, \pm 1)$ при $\tau \ge 1$ и нулю при $\tau < 0$. Символом $H^{(+)}$ обозначим ограниченную гармоническую функцию на Π, принимающую равные значения $(\varphi_+(\tau) + \varphi_-(\tau))/2$ в точках $(\tau, +1)$ и $(\tau, -1)$ на $\partial\Pi$. Преобразование Фурье функции $H^{(+)}(\tau, \nu)$ относительно переменной τ имеет вид

$$c_1\bigl(\widehat{\varphi_+}(\xi) + \widehat{\varphi_-}(\xi)\bigr)\operatorname{ch}(\xi\nu)(\operatorname{ch}\xi)^{-1}.$$

Введем сопряженную функцию $U^{(+)}$ с заданным на $\partial\Pi$ преобразованием Фурье

$$\pm c_1\, i\big(\widehat{\varphi_+}(\xi) + \widehat{\varphi_-}(\xi)\big)\,\mathrm{th}\,\xi\,.$$

С помощью обратного преобразования Фурье получаем

$$U^{(+)}(\tau, \pm 1) = \pm c_2 \int\limits_{\mathbb{R}} \big(\varphi_+(t) + \varphi_-(t)\big)\Big(\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}(\tau - t)\Big)^{-1} dt\,.$$

Отсюда, согласно лемме 2.1, следует

$$\|U^{(+)}\|_{\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta}(\partial\Pi)} \le c\,\|\varphi_+ + \varphi_-\|_{\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta}(\mathbb{R})}\,. \tag{4.4}$$

Пусть $H^{(-)}$ является ограниченной гармонической функцией в полосе Π, принимающей противоположные значения $\big(\varphi_+(\tau)-\varphi_-(\tau)\big)/2$ и $-\big(\varphi_+(\tau)-\varphi_-(\tau)\big)/2$, и точках $(\tau, 1)$ и $(\tau, -1)$. Преобразование Фурье функции $H^{(-)}$ относительно переменной τ имеет вид

$$c_3\big(\widehat{\varphi_+}(\tau) - \widehat{\varphi_-}(\tau)\big)\,\mathrm{sh}(\xi\nu)(\mathrm{sh}\,\xi)^{-1}.$$

Тогда преобразование Фурье нормальной производной $\partial H^{(-)}/\partial n$ на $\partial\Pi$ представляется в виде

$$\pm c_3\,\big(\widehat{\varphi_+}(\xi) - \widehat{\varphi_-}(\xi)\big)\Big(\xi\,\mathrm{th}\,\frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{\mathrm{sh}\,\xi}\Big)\,.$$

Через $U^{(-)}(\tau,\nu)$, $(\tau,\nu) \in \Pi$ мы обозначим сопряженную функцию. Преобразование Фурье производной $\partial U^{(-)}/\partial\tau$ по переменной τ на $\partial\Pi$ имеет вид

$$-c_3\,\big(\widehat{\varphi_+}(\xi) - \widehat{\varphi_-}(\xi)\big)\Big(\xi\,\mathrm{th}\,\frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{\mathrm{sh}\,\xi}\Big)\,.$$

Отсюда следует, что на $\partial\Pi$ верно равенство $U^{(-)} = U_1^{(-)} + U_2^{(-)}$, где

$$U_1^{(-)}(\tau, \pm 1) = c_4 \int\limits_{\mathbb{R}} \big(\varphi_+(t) - \varphi_-(t)\big)\big(\mathrm{sh}\,\pi(\tau - t)\big)^{-1} dt$$

и

$$\frac{\partial U_2^{(-)}}{\partial\tau}(\tau, \pm 1) = c_5 \int\limits_{\mathbb{R}} \big(\varphi_+(t) - \varphi_-(t)\big)\Big(\mathrm{ch}\,\frac{\pi}{2}(\tau - t)\Big)^{-2} dt\,.$$

Согласно леммам 1 и 2, имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|U_1^{(-)}\|_{\mathcal{E}_\beta^\alpha(\partial\Pi)} &\le c\|\varphi_+ - \varphi_-\|_{\mathcal{E}_\beta^\alpha(\mathbb{R})} \\ \|(\partial/\partial\tau)U_2^{(-)}\|_{\mathcal{E}_\beta^\alpha(\partial\Pi)} &\le c\|\varphi_+ - \varphi_-\|_{\mathcal{E}_\beta^\alpha(\mathbb{R})}\,. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Символом χ мы обозначим C^∞-функцию на $\mathbb{R}$, равную единице при $t > 1$ и равную нулю при $t < 0$. Положим $\Psi = \Delta\big(\chi(H^{(+)} + H^{(-)})\big)$ в $G \cap \{(\tau,\nu) : \tau \ge 0\}$ и $\Psi = 0$ в $G \cap \{(\tau,\nu) : \tau < 0\}$. Ясно, что $\Psi \in C_\gamma^{-1,\alpha}(G)$ при $\gamma > 0$ и

$$\|\Psi\|_{C_\gamma^{-1,\alpha}(G)} \le c\,\|\varphi\|_{\mathcal{E}_\beta^\alpha(\partial G)}.$$

Согласно лемме 4.1, задача

$$\Delta Z = -\Psi \quad \text{в } G, \qquad Z = 0 \quad \text{на } \partial G$$

имеет решение, которое при достаточно малых положительных γ удовлетворяет

$$\|Z\|_{C_\gamma^{1,\alpha}(G)} \le c\,\|\Psi\|_{C_\gamma^{-1,\alpha}(G)},$$

где c зависит от γ, но не от φ. Тогда

$$H = Z + \chi\big(H^{(-)} + H^{(+)}\big)$$

является гармоническим продолжением функции φ в область G. Так как $\partial Z/\partial n$ на ∂G по модулю не превосходит $c\exp(-\gamma\tau)$, то для сопряженной функции $\widetilde{Z}$, равной нулю на бесконечности, верна оценка

$$\|\widetilde{Z}\|_{\mathcal{E}_\beta^\alpha(\partial G\cap\{(\tau,\nu):\tau>1\})} \le c\|\varphi\|_{\mathcal{E}_\beta^\alpha(\partial G)}\,.$$

Пусть $\widetilde{H}$ обозначает функцию, сопряженную к H, которая совпадает с $\widetilde{Z}+U^{(-)}+U^{(+)}$ в области $G \cap \{(\tau,\nu) : \tau > 1\}$.

Отсюда и из (4.4), (4.5) следует, что $\widetilde{H}$ имеет требуемое представление с функцией Q_2, равной $\chi U_2^{(-)}$ на $\partial G\cap\{(\tau,\nu) : \tau \ge 0\}$ и нулю на $\partial G\cap\{(\tau,\nu) : \tau < 0\}$.

(ii) Осталось доказать (4.3) в предположении, что φ принадлежит $\mathcal{E}_\beta^\alpha(\partial G)$ и обращается в нуль при $\{(\tau,\pm 1) : \tau > 1\}$. Пусть θ, $\theta(1) = \infty$ является конформным отображением единичного круга D на G. Введем гармоническое продолжение F непрерывной функции $\varphi\circ\theta$ в D. Через $\widetilde{F}(\zeta)$ обозначим сопряженную гармоническую функцию вида

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta(e^{it}))\Big(\operatorname{ctg}\Big(\frac{t-s}{2}\Big) - \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\Big)dt, \quad \zeta = e^{is}\,.$$

Отсюда следует, что $\widetilde{F} \in \Lambda^\alpha(\partial D)$. Тогда $H = F\circ\theta^{-1}$ — гармоническое продолжение φ в область G и сопряженная к H функция $\widetilde{F}\circ\theta^{-1}$ имеет требуемое представление с $Q_2 = 0$. Ясно, что норма в $\mathcal{E}_\beta^\alpha(\partial G)$ функции $Q_1 = \widetilde{F}\circ\theta$ не превосходит $c\,\|\varphi\|_{\mathcal{E}_\beta^\alpha(\partial G)}$. •

Предложение 4.4. *Пусть φ принадлежит $\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta}(\partial G)$, $0 < \alpha, \beta < 1$, и*

$$\int\limits_{\partial G} \varphi ds = 0.$$

Тогда решение H краевой задачи Неймана в области G с граничными данными φ имеет на ∂G вид

$$H = Q_1 + Q_2, \tag{4.6}$$

где Q_1, $\partial Q_2/\partial s$ принадлежат $\mathcal{E}^{1,\alpha}_{\beta}(\partial G)$, $\operatorname{supp} Q_2 \subset \{(u, \pm 1) : u > 0\}$ и $Q_2(u, +1) = Q_2(u, -1)$ при $\tau > 0$. Более того, для Q_1 и Q_2 верна оценка

$$\|Q_1\|_{\mathcal{E}^{1,\alpha}_{\beta}(\partial G)} + \|(\partial/\partial s) Q_2\|_{\mathcal{E}^{1,\alpha}_{\beta}(\partial G)} \le c \|\varphi\|_{\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta}(\partial G)}$$

с константой c, не зависящей от φ.

Доказательство. (i) Мы начнем со случая, когда φ принадлежит $\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta}(\partial G)$, $\varphi = 0$ на $\{(\tau, \pm 1) : \tau > 1\}$ и $\int_{\partial G} \varphi ds = 0$. Пусть θ, $\theta(1) = \infty$, является конформным отображением единичного круга D на G. Введем гармоническое продолжение F в область D непрерывной функции ψ на ∂D такое, что $\psi(1 + i0) = 0$ и $(d/ds)\psi = -(\varphi \circ \theta)|\theta'|$. Через $\widetilde{F}(\zeta)$ обозначим сопряженную функцию вида

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi(e^{it}) \operatorname{ctg}\Big(\frac{t-s}{2}\Big) dt, \quad \zeta = e^{is}.$$

Ясно, что $\widetilde{F}$ принадлежит пространству $\Lambda^{\alpha}(\partial D)$. Тогда функция $H = \widetilde{F} \circ \theta^{-1}$ является решением краевой задачи Неймана с граничными данными φ и имеет требуемое представление с $Q_2 = 0$. Норма в $\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta}(\partial G)$ функции $Q_1 = H$ оценивается через $c \|\varphi\|_{\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta}(\partial G)}$.

(ii) Пусть теперь $\varphi \in \mathcal{E}^{\alpha}_{\beta}(\partial G)$ обращается в нуль вне $\{(u, \pm 1) : u > 1\}$ и удовлетворяет соотношению $\int_{\partial G} \varphi ds = 0$. Введем функции $\psi_{\pm}(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, равные

$$\pm \int\limits_{0}^{\tau} \varphi(t, \pm 1) dt$$

при $\tau \ge 0$ и $\psi_{\pm}(\tau) = 0$ при $\tau < 0$. Через $U^{(+)}$ мы обозначим гармоническую функцию в Π, принимающую равные значения $(\psi_{+}(\tau) + \psi_{-}(\tau))/2$ в точках $(\tau, +1)$

и $(\tau,-1)$ на $\partial\Pi$ и растущую на бесконечности не быстрее степенной функции. Преобразование Фурье функции $U^{(+)}(\tau,\nu)$ относительно τ задается как

$$c_1\big(\widehat{\psi_+}(\xi)+\widehat{\psi_-}(\xi)\big)\,\mathrm{ch}(\xi\nu)(\mathrm{ch}\,\xi)^{-1}.$$

Поэтому преобразование Фурье функции $\partial U^{(+)}/\partial n$ на $\partial\Pi$ имеет вид

$$-c_1\,i\big(\widehat{\psi'_+}(\xi)+\widehat{\psi'_-}(\xi)\big)\,\mathrm{th}\,\xi\,.$$

Здесь символы $\widehat{\psi_\pm}$ и $\widehat{\psi'_\pm}$ обозначают преобразование Фурье функций $\psi_\pm$ и $\psi'_\pm$ соответственно. Через $H^{(+)}$ обозначим функцию, сопряженную к $U^{(+)}$. Преобразование Фурье функции $H^{(+)}$ на $\partial\Pi$ имеет вид

$$\pm c_1\,i\big(\widehat{\psi_+}(\xi)+\widehat{\psi_-}(\xi)\big)\,\mathrm{th}\,\xi\,.$$

Поэтому верно равенство

$$H^{(+)}(\tau,\pm1)=\pm c_2\int\limits_{\mathbb{R}}\big(\psi_+(t)+\psi_-(t)\big)\Big(\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}(\tau-t)\Big)^{-1}dt\,.$$

Согласно лемме 2.1, для функции $H^{(+)}$ верна оценка

$$\|H^{(+)}\|_{\mathcal{E}^{1,\alpha}_\beta(\partial\Pi)}\le c\,\|\psi'_++\psi'_-\|_{\mathcal{E}^\alpha_\beta(\mathbb{R})}\,.$$

Пусть $U^{(-)}$ является ограниченной гармонической функцией на Π, принимающей противоположные значения $\big(\psi_+(\tau)-\psi_-(\tau)\big)/2$ и $-\big(\psi_+(\tau)-\psi_-(\tau)\big)/2$ в точках $(\tau,1)$ и $(\tau,-1)$. Преобразование Фурье функции $U^{(-)}$ относительно переменной τ имеет вид

$$c_3\,\big(\psi_+(\tau)-\psi_-(\tau)\big)\,\mathrm{sh}(\xi\nu)(\mathrm{sh}\,\xi)^{-1}.$$

Преобразование Фурье нормальной производной $\partial U^{(-)}/\partial n$ на $\partial\Pi$ мы представим в виде

$$\pm c_3\,\big(\widehat{\psi_+}(\xi)-\widehat{\psi_-}(\xi)\big)\Big(\xi\ \mathrm{th}\,\frac{\xi}{2}+\frac{\xi}{\mathrm{sh}\,\xi}\Big)\,.$$

Через $H^{(-)}(\tau,\nu)$ на Π обозначим одну из функций, сопряженных к $U^{(-)}(\tau,\nu)$. Тогда $H^{(-)} = H_1^{(-)} + H_2^{(-)}$, где

$$H_1^{(-)}(\tau,\pm 1) = c_4 \int\limits_{\mathbb{R}} \big(\psi_+(t) - \psi_-(t)\big)\big(\operatorname{sh}\pi(\tau - t)\big)^{-1} dt$$

и

$$\frac{\partial H_2^{(-)}}{\partial \tau}(\tau,\pm 1) = c_5 \int\limits_{\mathbb{R}} \big(\psi_+(t) - \psi_-(t)\big)\Big(\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}(\tau - t)\Big)^{-2} dt\,.$$

Согласно леммам 1 и 2, функции $H_1^{(-)}(\tau,\pm 1)$ и $(\partial H_2^{(-)}/\partial\tau)(\tau,\pm 1)$ принадлежат пространству $\mathcal{E}_\beta^{1,\alpha}(\partial\Pi)$ и удовлетворяют неравенству

$$\|H_1^{(-)}\|_{\mathcal{E}_\beta^{1,\alpha}(\partial\Pi)} + \|(\partial/\partial\tau)H_2^{(-)}\|_{\mathcal{E}_\beta^{1,\alpha}(\partial\Pi)} \le c\,\|\psi'_+ - \psi'_-\|_{\mathcal{E}_\beta^{\alpha}(\mathbb{R})}\,.$$

Символом χ мы обозначим C^∞-функцию на $\mathbb{R}$, равную 1 при $t > 1$ и равную нулю при $t < 0$. Положим $\Psi = \Delta\big(\chi(U^{(+)} + U^{(-)})\big)$ в $G \cap \{(\tau,\nu) : \tau \ge 0\}$ и $\Psi = 0$ в $G \cap \{(\tau,\nu) : \tau < 0\}$. Ясно, что при $\gamma > 0$

$$\|\Psi\|_{C_\gamma^{0,\alpha}(G)} \le c\|\varphi\|_{\mathcal{E}_\beta^{\alpha}(\partial G)}\,.$$

В силу леммы 4.1 краевая задача

$$\Delta Z = -\Psi \quad \text{в } G, \qquad Z = 0 \quad \text{на } \partial G$$

имеет решение, удовлетворяющее при малых положительных γ неравенству

$$\|Z\|_{C^2_{\alpha,\gamma}(G)} \le c\,\|\Psi\|_{C^0_{\alpha,\gamma}(G)}\,,$$

в котором константа c зависит от γ, но не от φ. Тогда

$$U = Z + \chi(U^{(-)} + U^{(+)})$$

является гармоническим продолжением функции ψ на ∂G, равной

$$\pm \int\limits_0^\tau \varphi(t,\pm 1)dt \quad \text{на } \partial G \cap \{(\tau,\nu) : \tau \ge 0\}$$

и равной нулю на $\partial G \cap \{(\tau,\nu) : \tau < 0\}$. Через H обозначим одну из функций, сопряженных к U. Так как ∇Z вместе с $\nabla^2 Z$ по модулю не превосходят $c\exp(-\gamma\tau)$, то функция $\widetilde{Z}$, сопряженная к сужению Z на $G \cap \{(\tau,\nu) : \tau > 1\}$, удовлетворяет неравенству

$$\|(\partial/\partial s)\widetilde{Z}\|_{\mathcal{E}_\beta^{\alpha}(\partial G \cap \{(\tau,\nu):\tau>1\})} \le c\,\|\varphi\|_{\mathcal{E}_\beta^{\alpha}(\partial G)}\,.$$

Поэтому H является решением краевой задачи Неймана в области G с граничными данными φ и имеет требуемое представление с функцией Q_2, равной $\chi H_2^{(-)}$ на $\partial G \cap \{(\tau,\nu) : \tau \ge 0\}$ и $Q_2 = 0$ на $\partial G \cap \{(\tau,\nu) : \tau < 0\}$. •

§5. Граничные интегральные уравнения краевых задач Дирихле и Неймана в области с внешним пиком

5.1. Пусть ω есть конформное отображение области Ω с внешним пиком на область G, представимое в виде

$$\omega(z) = x^{-1} + c_1 \log x + O(x), \quad z = x + iy. \tag{5.1}$$

Обратное отображение ω^{-1} будем обозначать через ρ. Введем также конформное отображение внешней области Ω' на $\mathbb{R}^2_+$, нормированное условием $\zeta(0) = 0$ и имеющее представление

$$\zeta(z) = \pm x^{1/2} \pm c_2 x^{3/2} \log x \pm (c_3 + ic_\pm) x^{3/2} + O\big(x^{3/2+\varepsilon}\big), \quad z = x + iy \in \Gamma_\pm, \tag{5.2}$$

где $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Обращая разложение (5.2), получаем

$$\theta(\tau + i0) = \zeta^{-1}(\tau + i0) = \tau^2 + c_4 \tau^4 \log|\tau| + O(\tau^4) \quad \text{при } \tau \to 0. \tag{5.3}$$

Из (5.1) и (5.2) следует, что

$$\omega \circ \theta(\tau) = \tau^{-2} + c_5 \log|\tau| + O(1). \tag{5.4}$$

Поэтому функции $d_\pm(u) = \omega \circ \theta(\pm u^{-1/2})$, $u > 0$, имеют разложение

$$d_\pm(u) = u + c_6 \log u + O(1). \tag{5.5}$$

Уравнения

$$\zeta(x + i\kappa_\pm(x)) = \pm\big(s_\pm(x)\big)^{1/2}, \quad x \in (0, 1),$$

определяют функции $s_\pm$, представимые в виде

$$s_\pm(x) = x + c_7 x^2 \log(1/x) + O\big(x^2\big). \tag{5.6}$$

Все указанные разложения дифференцируемы по крайней мере один раз. Более подробную информацию об этих разложениях можно найти в [2].

Следующая простая лемма часто используется в дальнейшем.

Лемма 5.1. *Пусть* $\varphi \in \Lambda^{1,\alpha}_{2-\beta}(0,1)$ *и пусть функции* $X_1(x)$ *и* $X_2(x)$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{aligned} X_1(x) &= x + o(x), \\ X_2(x) &= x + o(x), \\ Z(x) &= X_2(x) - X_1(x) = O(x^2), \end{aligned}$$

которые можно дифференцировать. Тогда

$$\varphi(X_1(x)) - \varphi(X_2(x)) \in \Lambda^{\alpha}_{-\beta}(0,1). \tag{5.7}$$

Доказательство. Введем функцию $L(x) = \varphi(X_2(x)) - \varphi(X_1(x))$, для которой верно неравенство

$$|L(x)| \le \int\limits_{X_1(x)}^{X_2(x)} |\varphi'(\tau)| d\tau \le c \int\limits_{X_1(x)}^{X_1(x)+O(x^2)} \tau^{\beta-2} d\tau \le c\, x^{\beta}. \tag{5.8}$$

Предполагая, что $x < y$ и $2|x-y| < x$, получаем

$$\begin{aligned} &\left|x^{-\beta+\alpha}L(x) - y^{-\beta+\alpha}L(y)\right| \\ &\le x^{-\beta+\alpha}Z(x)\int\limits_0^1 \left|\varphi'(X_1(x)+tZ(x)) - \varphi'(X_1(y)+tZ(y))\right| dt \\ &\quad + \left|x^{-\beta+\alpha}Z(x) - y^{-\beta+\alpha}Z(y)\right| \int\limits_0^1 \left|\varphi'(X_1(y)+tZ(y))\right| dt \\ &\le c\left(|x-y|^{\alpha} + \left(\frac{|x-y|}{x}\right)^{1-\alpha} |x-y|^{\alpha}\right) \\ &\le c\,|x-y|^{\alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (5.8) следует (5.7). •

5.2. Нам потребуются также две леммы технического характера. Пусть функция φ непрерывна на $\mathbb{R}$, имеет компактный носитель и удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(\tau)| \le c\,\tau^{\gamma},$$

где $\gamma > 0$. Выберем целое $k \geq 1$ такое, что $k - 1 < \gamma < k + 1$, и введем функцию

$$\Phi(\tau) = \tau^k \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\nu^{-k}}{\tau - \nu} \varphi(\nu) d\nu .$$

Лемма 5.2. *Если* $k - 1 < \gamma < k$, *то*

$$\begin{aligned}
&\Phi(\pm u^{-1/2}) \\
&= \mp u^{-(k-1)/2} \int\limits_0^\infty \frac{v^{(k-1)/2}}{u - v} \varphi(\pm v^{-1/2}) dv \\
&\mp \frac{1}{2} u^{-(k-1)/2} \int\limits_0^\infty \frac{v^{(k-2)/2}}{u^{1/2} + v^{1/2}} \varphi(\pm v^{-1/2}) dv \\
&\pm \frac{(-1)^k}{2} u^{-(k-1)/2} \int\limits_0^\infty \frac{v^{(k-2)/2}}{u^{1/2} + v^{1/2}} \varphi(\mp v^{-1/2}) dv ,
\end{aligned}$$

и если $k < \gamma < k + 1$, *то*

$$\begin{aligned}
&\Phi(\pm u^{-1/2}) \\
&= \mp u^{-(k-1)/2} \int\limits_0^\infty \frac{v^{(k-1)/2}}{u - v} \varphi(\pm v^{-1/2}) dv \\
&\mp \frac{1}{2} u^{-k/2} \int\limits_0^\infty v^{(k-2)/2} \left[\varphi(\pm v^{-1/2}) + (-1)^{k+1} \varphi(\mp v^{-1/2})\right] dv \\
&\pm \frac{1}{2} u^{-k/2} \int\limits_0^\infty \frac{v^{(k-1)/2}}{u^{1/2} + v^{1/2}} \varphi(\pm v^{-1/2}) dv \\
&\mp \frac{(-1)^k}{2} u^{-k/2} \int\limits_0^\infty \frac{v^{(k-1)/2}}{u^{1/2} + v^{1/2}} \varphi(\mp v^{-1/2}) dv .
\end{aligned}$$

Предположим теперь, что функция ψ, непрерывно-дифференцируема на $\mathbb{R}$, имеет компактный носитель и удовлетворяет неравенству

$$\left| \frac{d}{d\nu} \psi(\tau) \right| \leq c\, \tau^\gamma ,$$

где $\gamma > 0$. Введем функцию

$$\Psi(\tau) = \tau^k \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\nu^{-k}}{\tau - \nu} \frac{d}{d\nu} \psi(\nu) d\nu,$$

где целое $k \geq 1$ определяется соотношением $k - 1 < \gamma < k + 1$.

Лемма 5.3. *Если $k - 1 < \gamma < k$, то*

$$\Psi(\tau) = dr \Big[\mp u^{-(k+2)/2} \int\limits_0^\infty \frac{v^{(k+2)/2}}{u - v} \frac{d}{dv} \psi(\pm v^{-1/2}) dv$$
$$\mp \frac{1}{2} u^{-(k+2)/2} \int\limits_0^\infty \frac{v^{(k+1)/2}}{u^{1/2} + v^{1/2}} \frac{d}{dv} \psi(\pm v^{-1/2}) dv$$
$$\mp \frac{(-1)^k}{2} u^{-(k+2)/2} \int\limits_0^\infty \frac{v^{(k+1)/2}}{u^{1/2} + v^{1/2}} \frac{d}{dv} \psi(\mp v^{-1/2}) dv \Big] du\,,$$

и если $k < \gamma < k + 1$, то

$$\Psi(\tau) d\tau = \Big[\mp u^{-(k+2)/2} \int\limits_0^\infty \frac{v^{(k+2)/2}}{u - v} \frac{d}{dv} \psi(\pm v^{-1/2}) dv$$
$$\mp \frac{1}{2} u^{-(k+3)/2} \int\limits_0^\infty v^{(k+1)/2} \Big(\frac{d}{dv} \psi(\pm v^{-1/2}) + (-1)^k \frac{d}{dv} \psi(\mp v^{-1/2}) \Big) dv$$
$$\pm \frac{1}{2} u^{-(k+3)/2} \int\limits_0^\infty \frac{v^{(k+2)/2}}{u^{1/2} + v^{1/2}} \frac{d}{dv} \psi(\pm v^{-1/2}) dv$$
$$\pm \frac{(-1)^k}{2} u^{-(k+3)/2} \int\limits_0^\infty \frac{v^{(k+2)/2}}{u^{1/2} + v^{1/2}} \frac{d}{dv} \psi(\mp v^{-1/2}) dv \Big] du\,,$$

где $\tau = \pm u^{-1/2}$.

5.3. В этом разделе доказывается разрешимость и описываются нули интегрального уравнения (1.3) на контуре с внешним пиком.

Здесь и везде символом $\widetilde{W\sigma}$ мы будем обозначать функцию, определяемую соотношением

$$\widetilde{W\sigma}(z) = \int\limits_\Gamma \sigma(q) \frac{\partial}{\partial s} \log \frac{1}{|z - q|} ds_q\,, \quad z \notin \Gamma\,.$$

Мы начнем с описания нулей оператора $\pi I - T$, введенного в (1.7).

Теорема 5.1. *Пусть Ω имеет внешний пик и пусть оператор $\pi I - T$, как в* (1.7). *Тогда*

a) $\mathrm{Ker}(\pi I - T) = \{0\}$ *при* $0 < \alpha < 1$ *и* $1/2 < \beta < 1$;

b) $\dim \mathrm{Ker}(\pi I - T) = 1$ *при* $0 < \alpha < 1$ *и* $0 < \beta < 1/2$.

В случае b) *ядро* $\mathrm{Ker}(\pi I - T)$ *состоит из функций вида* $c\,\mathrm{Re}(1/\zeta_0)$, *где* $c \in \mathbb{R}$ *и* ζ_0 *— конформное отображение внешней области* Ω' *на* $\mathbb{R}^2_+$, *нормированное условиями* $\zeta_0(0) = 0$, $\zeta_0(\infty) = i$.

Доказательство. Пусть σ принадлежит ядру $\mathrm{Ker}(\pi I - T)$. Так как $|W\sigma(z)| = O\big(|z|^{-N}\big)$ для некоторого целого N и для всех $z \in \Omega$ и так как предельные значения потенциала $W\sigma(z)$ равны нулю на $\Gamma \setminus \{O\}$, то $W\sigma = 0$ на Ω. Поэтому функция $\widetilde{W\sigma}$ в Ω, являясь сопряженной к $W\sigma$, постоянна. Положим $\widetilde{W\sigma} = C$ в Ω и введем голоморфную функцию

$$W(z) = (W\sigma)(z) + i(\widetilde{W\sigma}(z) - C), \quad z \in \Omega'.$$

Пусть $\xi + i\eta = \zeta(z)$ есть конформное отображение области Ω' на $\mathbb{R}^2_+$, $\zeta(0) = 0$. Функция $F(\xi + i\eta) = \big(W \circ \theta\big)(1/(\xi + i\eta))$ является голоморфной в нижней полуплоскости $\mathbb{R}^2_- = \{\xi + i\eta : \eta < 0\}$, непрерывной вплоть до границы и $\mathrm{Im}\, F = 0$ на вещественной оси. Так как $W\sigma$ в Ω' растет не быстрее степенной функции, то голоморфным продолжением F^{ext} функции F на $\mathbb{C}$ является целая функция, вещественная часть которой удовлетворяет неравенству

$$|\,\mathrm{Re}\, F^{\mathrm{ext}}(\xi + i\eta)| \le c\,|\xi^2 + \eta^2|^N,$$

где N — некоторое целое число. Из интегральной формулы Шварца следует теперь, что F^{ext} является полиномом с вещественными коэффициентами. Тогда

$$W\sigma(z) = F^{\mathrm{ext}}\big(\mathrm{Re}(1/\zeta(z))\big), \quad z \in \Omega',$$

и из формулы скачка для $W\sigma$ находим

$$\sigma(z) = \frac{1}{2\pi} F^{\mathrm{ext}}\big(\mathrm{Re}(1/\zeta(z))\big), \quad z \in \Gamma \setminus \{0\}.$$

Учитывая, что $\sigma \in \Omega^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma) \dot{+} \mathbb{R}$ и что константы не принадлежат ядру $\mathrm{Ker}(\pi I - T)$, получаем $\sigma = c\,\mathrm{Re}(1/\zeta)$.

Отсюда и из интегрального представления для гармонической функции $\mathrm{Re}(1/\zeta)$ в Ω' и предельного соотношения для потенциала двойного слоя следует

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial n_q}\left(\mathrm{Re}\,\frac{1}{\zeta(q)}\right)\log\frac{|z|}{|z-q|}ds_q - \mathrm{Re}\,\frac{1}{\zeta(\infty)}$$
$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma}\mathrm{Re}\,\frac{1}{\zeta(q)}\frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{1}{|z-q|}ds_q - \mathrm{Re}\,\frac{1}{\zeta(z)}, \quad z\in\Gamma\setminus\{O\}.$$

Так как $(\partial/\partial n)\mathrm{Re}(1/\zeta) = 0$ на $\Gamma\setminus\{O\}$, то нули оператора $\pi I - T$ имеют вид $c\,\mathrm{Re}(1/\zeta)$, где $c\in\mathbb{R}$, и ζ — произвольное конформное отображение области Ω' на $\mathbb{R}^2_+$, нормированное условиями $\zeta(0) = 0$ и $\mathrm{Re}\,\zeta(\infty) = 0$. Заметим, что функции вида $\mathrm{Re}(1/\zeta)$, удовлетворяющие условиям нормировки $\zeta(0) = 0$ и $\mathrm{Re}\,\zeta(\infty) = 0$, отличаются попарно постоянным положительным множителем, так что $\dim\mathrm{Ker}(\pi I - T)$ не превосходит единицы. Так как $\mathrm{Re}(1/\zeta)\in\Omega^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)$ только при $\beta < 1/2$, то ядро $\mathrm{Ker}(\pi I - T)$ одномерно при $0<\beta<1/2$ и тривиально при $1/2<\beta<1$. •

Условимся в обозначениях композиций функций и конформных отображений последние указывать в качестве индексов, как например $\varphi\circ\rho$, $G\circ\omega\circ\theta$ обозначать через φ_ρ, $G_{\omega,\theta}$.

Докажем теперь разрешимость в $\Omega^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathbb{R}$ уравнения (1.3) с правой частью из $\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)$.

Теорема 5.2. *Пусть Ω имеет внешний пик и пусть $0<\beta,\alpha<1$, $\beta\neq 1/2$. Тогда оператор $\pi I - T$, определенный в (1.7), является сюръективным.*

Доказательство. Пусть $\varphi\in\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)$ и $\varphi = 0$ в некоторой окрестности пика. Введем построенное в предложении 4.1 гармоническое продолжение H функции $\varphi_\rho\in\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta}(\partial G)$ в область G. Через h^e мы обозначим гармоническое продолжение функции φ во внешнюю область Ω', удовлетворяющее соотношению $\mathrm{grad}\,h^e = O(|z|^{-1/2})$. Учитывая, что $\mathrm{grad}\,H_\omega = O(|z|^N)$, $z\in\Omega$, для произвольного целого N, получаем

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{\partial H_\omega}{\partial n} - \frac{\partial h^e}{\partial n}\right)\log\frac{1}{|z-q|}ds_q + h^e(\infty), \quad z\in\Gamma\setminus\{O\}. \tag{5.9}$$

Нормальная производная $\partial H/\partial n$ представляется в виде $\partial Q_1/\partial s + Q_2 + Q_3$, где функции Q_1, Q_2 и Q_3 описаны в предложении 4.1.

(i) В качестве решения $(g_1)_\theta$ краевой задачи Неймана в $\mathbb{R}^2_+$ с граничными данными $(\partial/\partial s)(Q_1)_{\omega,\theta}$ рассмотрим функцию

$$(g_1)_\theta(\tau+i\eta) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} (\log|\tau-\nu+i\eta| - \log|\nu|)\frac{\partial}{\partial s}(Q_1)_{\omega,\theta}(\nu)\,d\nu\,.$$

Тогда

$$(g_1)_\theta(\tau+i0) = \lim_{\eta\to+0}(g_1)_\theta(\tau+i0) = -\frac{1}{\pi}\tau\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\nu^{-1}}{\tau-\nu}(Q_1)_{\omega,\theta}(\nu)\,d\nu\,, \quad \tau\in\mathbb{R}.$$

Применим лемму 5.2 к последнему интегралу, используя обозначения (5.5) и (5.6). Так как функции $Q_1(\tau\pm i)$, $\tau\geq 1$, принадлежат $\mathcal{E}^\alpha_\beta(1,\infty)$, то $Q_1\circ d_\pm$ также из $\mathcal{E}^\alpha_\beta(1,\infty)$. При $0<\beta<1/2$ функции $(g_1)_\theta(\pm u^{-1/2})$, $u>1$, согласно леммам 2.1 и 2.3, принадлежат $\mathcal{E}^\alpha_\beta(1,+\infty)$. Поэтому $(g_1)_\theta(\pm x^{1/2})$, $x\in(0,1)$, являются элементами пространства $\Lambda^\alpha_{-\beta}(0,1)$. Отсюда и из леммы 5.1 получаем, что нормы в $\Lambda^\alpha_{-\beta}(0,1)$ функций $g_1(x+i\kappa_\pm(x)) = (g_1)_\theta(\pm(s_\pm(x))^{1/2})$, $x\in(0,1)$, не превосходят $c\,\|\varphi\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)}$, где c не зависит от φ.

В случае $1/2<\beta<1$ из лемм 2.1 и 2.4 следует, что $(g_1)_\theta(\pm u^{-1/2})\mp c_1(\varphi)\,u^{-1/2}$, $u>1$, принадлежат $\mathcal{E}^\alpha_\beta(1,+\infty)$, где $c_1(\varphi)$ — линейный непрерывный функционал в $\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)$. Тогда $(g_1)_\theta(\pm x^{1/2})\mp c_1(\varphi)\,x^{1/2}$, $x\in(0,1)$, являются элементами пространства $\Lambda^\alpha_{-\beta}(0,1)$. Согласно лемме 4.1, нормы функций $g_1(x+i\kappa_\pm(x))\mp c_1(\varphi)\,x^{1/2}$ в $\Lambda^\alpha_{-\beta}(0,1)$ оцениваются через $c\,\|\varphi\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)}$, где c не зависит от φ.

(ii) Пусть теперь функция $Q_2^{(\mathrm{int})}$ определяется условием $(d/ds)Q_2^{(\mathrm{int})}(z) = Q_2(z)$, $z\in\partial G$. В качестве решения $(g_2)_\theta$ краевой задачи Неймана в $\mathbb{R}^2_+$ с граничными данными $(d/ds)\big(Q_2^{(\mathrm{int})}\big)_{\omega,\theta}$ рассмотрим функцию

$$(g_2)_\theta(\tau+i\eta) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\Big(\log|\tau-\nu+i\eta| - \log|\tau+i\eta| + \frac{\tau\nu}{\tau^2+\eta^2}\Big)\frac{d}{ds}\big(Q_2^{(\mathrm{int})}\big)_{\omega,\theta}(\nu)\,d\nu\,.$$

Тогда граничные значения производной $(\partial/\partial\tau)(g_2)_\theta$ имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(g_2)_\theta(\tau+i0) = -\frac{1}{\tau^2}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\nu^2}{\tau-\nu}\frac{d}{d\nu}\big(Q_2^{(\mathrm{int})}\big)_{\omega,\theta}(\nu)\,d\nu\,, \quad \tau\in\mathbb{R}.$$

Применим лемму 5.3 к дифференциалу

$$d(g_2)_\theta(\tau) = \Phi_\pm(u)\,du\,,$$

где $\tau = \pm u^{-1/2}$, $u > 0$. Из принадлежности Q_2 пространству $\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)$ следует, что функции

$$\begin{aligned}\frac{d}{dv}\big(Q_2^{(\mathrm{int})}\big)_{\omega,\theta}(\pm v^{-1/2}) &= \frac{d}{dv}(Q_2^{(\mathrm{int})})(d_\pm(v)) \\ &= \mp Q_2(d_\pm(v))\frac{d}{dv}d_\pm(v), \quad v > 1,\end{aligned}$$

из $\mathcal{E}^\alpha_\beta(1,+\infty)$. Согласно леммам 2.1, 2.3 и 2.4, функции $\Phi_\pm(u)$ при $0 < \beta < 1/2$ принадлежат $\mathcal{E}^\alpha_\beta(1,+\infty)$ и существует линейный непрерывный функционал в $\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)$ такой, что $\Phi_\pm(u) \mp c_2(\varphi)u^{-1/2} \in \mathcal{E}^\alpha_\beta(1,+\infty)$ при $1/2 < \beta < 1$. Поэтому $\Phi_\pm(x^{-1})\,x^{-2}$ и $\Phi_\pm(x^{-1})\,x^{-2} \mp c_2(\varphi)\,x^{-3/2}$ принадлежат $\Lambda^\alpha_{-\beta}(0,1)$ при $0 < \beta < 1/2$ и при $1/2 < \beta < 1$ соответственно. Так как $g_2(x + i\kappa_\pm(x)) = (g_2)_\theta\big(\pm(s_\pm(x))^{1/2}\big)$, $x \in (0,1)$, то из леммы 5.1 следует, что при $0 < \beta < 1/2$ функции

$$(d/dx)g_2(x + i\kappa_\pm(x))$$

и при $1/2 < \beta < 1$ функции

$$(d/dx)\big(g_2(x + i\kappa_\pm(x)) \pm 2\,c_2(\varphi)\,x^{-1/2}\big)$$

принадлежат $\Lambda^\alpha_{2-\beta}(0,1)$. Более того, нормы в $\Lambda^{1,\alpha}_{2-\beta}(0,1)$ функций $g_2(x + i\kappa_\pm(x))$ при $0 < \beta < 1/2$ и $g_2(x + i\kappa_\pm(x)) \pm 2\,c_2(\varphi)\,x^{-1/2}$ при $1/2 < \beta < 1$ не превосходят $c\,\|\varphi\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)}$, где c не зависит от φ.

(iii) Как и в п. (ii), пусть $Q_3^{(\mathrm{int})}$ определяется условием $(d/ds)Q_3^{(\mathrm{int})}(z) = Q_3(z)$, $z \in \partial G$. Так как $\int_{\partial G} Q_3\,ds = 0$, то мы можем считать, что $Q_3^{(\mathrm{int})}$ обращается в нуль на бесконечности. Пусть $\kappa \in C^\infty(\mathbb{R})$ равна 1 при $|t| < 1$ и нулю при $|t| > 1$. Решение $(g_{31})_\theta$ задачи Неймана в $\mathbb{R}^2_+$ с граничным условием $(\partial/\partial n)(g_{31})_\theta = (d/ds)\big(\kappa\,Q_3^{(\mathrm{int})}\big)_{\omega,\theta}$ на $\partial\mathbb{R}^2_+$ задается функцией

$$\begin{aligned}&(g_{31})_\theta(\tau + i\eta) \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \log|\tau - \nu + i\eta|\frac{d}{d\nu}\big(\kappa Q_3^{(\mathrm{int})}\big)_{\omega,\theta}(\nu)d\nu\,.\end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}&(g_{31})_\theta(\tau + i0) \\ &= \lim_{\eta\to+0}(g_{31})_\theta(\tau + i\eta) \\ &= (g_{31})_\theta(0) - \frac{\tau}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\nu^{-1}}{\tau - \nu}\big(\kappa\,Q_3^{(\mathrm{int})}\big)_{\omega,\theta}(\nu)\,d\nu\,.\end{aligned}$$

Как в п. (i), доказывается, что $g_{31}(x+i\kappa_\pm(x))-g_{31}(0)$ принадлежат $\Lambda^\alpha_{-\beta}(0,1)$ при $0<\beta<1/2$ и существует линейный непрерывный функционал $c_{31}(\varphi)$ в $\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)$ такой, что $g_{31}(x+i\kappa_\pm(x))-g_{31}(0)\mp c_{31}(\varphi)\,x^{1/2}$ принадлежат $\Lambda^\alpha_{-\beta}(0,1)$ при $1/2<\beta<1$.

Ограниченное решение g_{32} задачи Неймана в Ω' с граничной функцией, равной $(d/ds)\big((1-\kappa)Q_3^{(\mathrm{int})}\big)_\omega$ на $\partial\Omega$, имеет вид

$$g_{32}(x+i\kappa_\pm(x))=g_{32}(0)\pm c_{32}(\varphi)\,x^{1/2}+I_\pm(x)\,,$$

где $I_\pm(x)\in\Lambda^\alpha_{-\beta}(0,1)$ и $c_{32}(\varphi)$ — непрерывный линейный функционал в $\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)$. Тогда $g_3=g_{31}+g_{32}$ является решением задачи Неймана в Ω' с граничными данными $(\partial/\partial s)\big(Q_3^{(\mathrm{int})}\big)_\omega$. Более того, функции

$$g_3(x+i\kappa_\pm(x))-g_3(0)\mp c_3(\varphi)\,x^{1/2},$$

где $c_3(\varphi)=c_{31}(\varphi)+c_{32}(\varphi)$ при $1/2<\beta<1$ и $c_3(\varphi)=0$ при $0<\beta<1/2$, принадлежат $\Lambda^\alpha_{-\beta}(0,1)$ и их нормы в этом пространстве не превосходят $c\,\|\varphi\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)}$. Нетрудно убедиться, что $\varphi\to g_3(0)$ является непрерывным линейным функционалом в $\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)$.

(iv) Таким образом, построенная функция

$$g=g_1+g_2+g_3$$

является гармонической в Ω' и удовлетворяет граничному условию $\partial g/\partial n=\partial H_\omega/\partial n$. Функция $w=g-h^e-g(\infty)+h^e(\infty)$ в Ω', учитывая, что $\operatorname{grad} g=O\big(|z|^{-1/2}\big)$, допускает представление

$$w(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma\Big(w(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{1}{|z-q|}-\frac{\partial w}{\partial n_q}(q)\log\frac{1}{|z-q|}\Big)ds_q\,.$$

Из предельного соотношения для потенциала простого слоя и из (5.9) получаем

$$w(z)-\frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma w(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{1}{|z-q|}ds_q=2(\varphi(z)+g(\infty)-h^e(\infty))\,.$$

Так как $T1=-\pi$, то $\sigma=(2\pi)^{-1}(g-\varphi)$ на Γ является решением уравнения (1.3). Заметим, что функции вида $\mathrm{Re}\big(1/\zeta(z)\big)$ на $\Gamma\setminus\{O\}$, где ζ — конформное отображение области Ω' на $\mathbb{R}^2_+$, нормированное условиями $\mathrm{Re}\,\zeta(\infty)=0$ и $\zeta(0)=$

0, удовлетворяют однородному уравнению (1.3). Из (i)–(iii) следует, что для некоторого вещественного A решение $\sigma + A\,\mathrm{Re}(1/\zeta)$ представляется в виде

$$\sigma(z) = \sigma_1(z) + \sigma_2(z),$$

где $\sigma_1 \in \mathfrak{O}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)$, $\sigma_2 - \sigma_2(0) \in \Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)$. Функции σ_1 и σ_2 при этом удовлетворяют неравенству

$$\|\sigma_1\|_{\mathfrak{O}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)} + \|\sigma_2 - \sigma_2(0)\|_{\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)} + |\sigma_2(0)| \le c\,\|\varphi\|_{\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)}. \tag{5.10}$$

Пусть теперь φ — произвольная функция из $\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)$. Существует последовательность $\{\varphi_n\}_{n\ge1}$ гладких функций на $\Gamma \setminus \{O\}$, равных нулю вблизи пика, которая сходится в $\Lambda^{\alpha'}_{-\beta'}(\Gamma)$ при $\alpha' < \alpha$ и $\beta' < \beta$ и удовлетворяет неравенству

$$\|\varphi_n\|_{\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)} \le c\|\varphi\|_{\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)}.$$

Через σ_n мы обозначим решение уравнения (1.3) в пространстве $\mathfrak{O}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathbb{R}$ с правой частью φ_n, которое строится, как в (i)–(iii). Согласно (5.10), имеем

$$\|\sigma_n\|_{\mathfrak{O}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathbb{R}} \le c\|\varphi\|_{\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)}. \tag{5.11}$$

Так как $\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma) \subset \Lambda^{\alpha'}_{-\beta'}(\Gamma)$, то последовательность $\{\sigma_n\}_{n\ge1}$ сходится в $\mathfrak{O}^{1,\alpha'}_{2-\beta'}(\Gamma)\dot{+}\mathbb{R}$ к пределу σ. В частности, $\{\sigma_n\}_{n\ge1}$ поточечно сходится к σ на $\Gamma\setminus\{O\}$. Отсюда и из (5.11) следует, что $\sigma \in \mathfrak{O}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathbb{R}$. Так как оператор

$$\mathfrak{O}^{1,\alpha'}_{2-\beta'}\dot{+}\mathbb{R} \ni \sigma \longmapsto \pi\sigma - T\sigma \in \Lambda^{\alpha'}_{-\beta'}(\Gamma)\dot{+}\mathbb{R}$$

непрерывен (см. теорему 2.1), то мы получаем, переходя к пределу

$$-\varphi = (\pi I - T)\sigma.$$

Следовательно, уравнение (1.3) разрешимо в $\mathfrak{O}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathbb{R}$ для правой части φ из $\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathbb{R}$.

Обратное утверждение доказано в теореме 2.1. •

5.4. Символом $(\Lambda_0)^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)$ мы обозначим подпространство функций $\psi \in \Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)$, нормированных условием $\int_\Gamma \psi ds = 0$.

В следующей теореме описывается ядро оператора $\pi I + S$, определенного в (1.9).

Теорема 5.3. *Пусть область Ω имеет внешний пик и пусть оператор $\pi I + S$, как в* (1.9). *Тогда*

a) $\mathrm{Ker}(\pi I + S) = \{0\}$ *при* $0 < \alpha < 1$ *и* $1/2 < \beta < 1$;

b) $\dim \mathrm{Ker}(\pi I + S) = 1$ *при* $0 < \alpha < 1$ *и* $0 < \beta < 1/2$.

В случае b) *ядро* $\mathrm{Ker}(\pi I + S)$ *состоит из функций вида* $c(\partial/\partial n)\log|\gamma_0|$, *где* $c \in \mathbb{R}$ *и* γ_0 *— конформное отображение Ω' на внешность единичного круга, удовлетворяющее условию* $\gamma_0(\infty) = \infty$.

Доказательство. Пусть σ принадлежит ядру $\mathrm{Ker}(\pi I + S)$. Так как $(V\sigma)(z)$, $z \in \Omega$, растет не быстрее степенной функции при $z \to 0$ и $V\sigma$ является решением краевой задачи Неймана с нулевыми граничными данными, то $V\sigma = \mathrm{const}$ в Ω. Положим $V\sigma(z) = C$, $z \in \Omega$.

Через σ_0 мы обозначим плотность равновесного распределения на Γ. Пусть

$$c_0 = \Big(\int_\Gamma \sigma(q) ds_q\Big) \Big/ \Big(\int_\Gamma \sigma_0(q) ds_q\Big), \quad z \in \Omega.$$

Введем голоморфную функцию

$$V(z) = -i\Big(\int_\Gamma (\sigma(q) - c_0\sigma_0(q)) \log \frac{1}{z-q} ds_q - C + c_0\Big), \quad z \in \Omega'.$$

Функция V ограничена в окрестности бесконечно удаленной точки и ее мнимая часть $\mathrm{Im}\, V$ равна нулю на $\Gamma \setminus \{O\}$.

Пусть $\xi + i\eta = \zeta(z)$ — конформное отображение области Ω' на $\mathbb{R}^2_+$, $\zeta(0) = 0$. Функция $F(\xi + i\eta) \coloneqq (W \circ \theta)(1/(\xi + i\eta))$ голоморфна в нижней полуплоскости $\mathbb{R}^2_- = \{\xi + i\eta : \eta < 0\}$, непрерывна вплоть до границы и $\mathrm{Im}\, F = 0$ на вещественной оси. Голоморфное продолжение F^{ext} функции F на $\mathbb{C}$ является целой функцией, и $\mathrm{Re}\, F^{\mathrm{ext}}$ допускает оценку

$$\mathrm{Re}\, F^{\mathrm{ext}}(\xi + i\eta) = O\big((|\xi| + |\eta|)^N\big),$$

где N — некоторое целое число. С помощью интегральной формулы Шварца доказывается, что F^{ext} имеет тот же порядок роста на бесконечности. Поэтому F^{ext} является полиномом с вещественными коэффициентами. Тогда

$$\mathrm{Im}(V\sigma)(z) = F^{\mathrm{ext}}\big(\mathrm{Im}(1/\zeta(z))\big), \quad z \in \Omega',$$

и из формулы скачка для потенциала простого слоя получаем

$$\sigma(z) - c_0\sigma_0(z) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n}F^{\mathrm{ext}}\big(\operatorname{Im}\frac{1}{\zeta(z)}\big). \tag{5.12}$$

Так как σ принадлежит $\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_m$, где m определяется неравенством $(m-1)/2 < \beta < m/2$, и $\sigma_0(z) = O(|z|^{-1/2})$, то из (5.12) следует, что $\sigma - c_0\sigma_0 = 0$ на $\Gamma \setminus \{O\}$.

Ясно, что σ_0 является решением однородного уравнения (1.5). Так как $\sigma_0 \in \mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)$ только при $\beta < 1/2$, то ядро $\operatorname{Ker}(\pi I + S)$ одномерно при $0 < \beta < 1/2$ и тривиально при $1/2 < \beta < 1$. •

Введем линейную оболочку $\mathcal{D}_2$ функций $(\partial/\partial s)\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Re} z^{-1/2}$, $z \in \Gamma$. Напомним, что символом $\mathcal{D}_1$ мы обозначаем линейную оболочку функции $(\partial/\partial s)\operatorname{Re} z$, $z \in \Gamma \setminus \{O\}$.

Докажем теперь теорему о разрешимости уравнения (1.5).

Теорема 5.4. *Пусть область Ω имеет внешний пик и пусть $0 < \alpha, \beta < 1$, $\beta \neq 1/2$. Тогда оператор $\pi I + S$, определенный в (1.9), является сюръективным.*

Доказательство. Пусть $\psi \in (\Lambda_0)^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)$ равна нулю в некоторой окрестности пика. Через H мы обозначим построенную в предложении 4.4 гармоническую функцию, удовлетворяющую граничному условию $\partial H/\partial n = \psi_\rho\,|\rho'| \in \mathcal{E}^{\alpha}_{2+\beta}(\partial G)$. Функция H на ∂G имеет вид

$$Q_1 + Q_2,$$

где функции Q_1 и Q_2 описаны в предложении 4.4.

(i) Символом $(f_1)_\theta$ мы обозначим интеграл Пуассона функции $(Q_1)_{\omega,\theta}$ в $\mathbb{R}^2_+$. Производная по нормали $(\partial/\partial n)(f_1)_\theta$ на $\mathbb{R}$ представляется в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n}(f_1)_\theta(\tau + i0) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt}(Q_1)_{\omega,\theta}(t)\frac{dt}{\tau - t}\\ &= -\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt}(Q_1)_{\omega,\theta}(t)\frac{dt}{t} - \tau\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt}(Q_1)_{\omega,\theta}(t)\frac{dt}{t^2}\\ &\quad + \tau^2\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt}(Q_1)_{\omega,\theta}(t)\frac{t^{-2}}{\tau - t}\,dt.\end{aligned} \tag{5.13}$$

Ясно, что линейные функционалы

$$c'_{11}(\psi) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt}(Q_1)_{\omega,\theta}(t)\frac{dt}{t}, \qquad c'_{12}(\psi) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt}(Q_1)_{\omega,\theta}(t)\frac{dt}{t^2}$$

непрерывны в $\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)$. В результате подстановки $\tau = \pm u^{-1/2}$ дифференциал

$$\left[\tau^2 \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt}(Q_1)_{\omega,\theta}(t)\frac{t^{-2}}{\tau - t}\, dt\right] d\tau$$

перепишется в виде $F_{\pm}(u)du$, где функции $F_{\pm}$ описаны в лемме 5.3. Так как функции $(d/du)(Q_1 \circ d_{\pm})$ принадлежат $\mathcal{E}^{\alpha}_{2+\beta}(1,+\infty)$, то, согласно леммам 2.1 и 2.3, $F_{\pm}(u) \in \mathcal{E}^{\alpha}_{2+\beta}(1,+\infty)$ при $1/2 < \beta < 1$ и, согласно леммам 2.1 и 2.4, существует непрерывный линейный функционал $c'_{13}(\psi)$ в $\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)$ такой, что функции $F_{\pm}(u) \mp c'_{13}(\psi)\, u^{-5/2}$ принадлежат $\mathcal{E}^{\alpha}_{2+\beta}(1,+\infty)$ при $1/2 < \beta < 1$. Отсюда и из (5.13) следует, что сопряженная функция $\widetilde{f}_1$ удовлетворяет

$$\left\| \frac{\partial}{\partial s}\Big(\widetilde{f}_1 - \sum_{k=1}^{m+1} c_{1k}(\psi)(\operatorname{Re}\zeta)^k\Big) \right\|_{\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma_+\cup\Gamma_-)} \le c\,\|Q_1\|_{\mathcal{E}^{1,\alpha}_{\beta}(\partial G)},$$

где функционал $c_{1k}(\psi)$ с точностью до множителя равен $c'_{1k}(\psi)$ при $k = 1, \dots, m+1$, и m определяется неравенством $(m-1)/2 < \beta < m/2$.

(ii) Нормальная производная интеграла Пуассона $(f_2)_\theta$ функции $(Q_2)_{\omega,\theta}$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial n}(f_2)_\theta(\tau + i0) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt}(Q_2)_{\omega,\theta}(t)\frac{dt}{\tau - t}, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

В результате подстановки $\tau = \pm u^{-1/2}$ дифференциал $(\partial/\partial n)(f_2)_\theta(\tau)d\tau$ в силу леммы 5.3 перепишется в виде

$$\frac{1}{u}\Phi_{\pm}(u)du = -\frac{1}{x}\Phi_{\pm}\Big(\frac{1}{x}\Big)dx,$$

где $x = u^{-1}$ и

$$\begin{aligned}\Phi_{\pm}(u) &= \mp \int\limits_0^\infty \frac{1}{u - v} v \frac{d}{dv}(Q_2)_{\omega,\theta}(\pm v^{-1/2})dv \\ &\mp \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{u^{1/2} + v^{1/2}} v^{1/2}\frac{d}{dv}(Q_2)_{\omega,\theta}(\pm v^{-1/2})dv \\ &\mp \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{u^{1/2} + v^{1/2}} v^{1/2}\frac{d}{dv}(Q_2)_{\omega,\theta}(\mp v^{-1/2})dv \\ &= \sum_{k=1}^{3}(I_k)_{\pm}(u).\end{aligned}$$

Так как $(d/dv)Q_2$ принадлежит $\mathcal{E}^{1,\alpha}_{\beta+2}(\partial G)$, то

$$(d/dv)(Q_2)_{\omega,\theta}(\pm v^{-1/2}) \in \mathcal{E}^{1,\alpha}_{\beta+2}(1,\infty).$$

Поэтому функции

$$\frac{d}{dv}\left[v\,\frac{d}{dv}(Q_2)_{\omega,\theta}(\pm v^{-1/2})\right]$$

принадлежат $\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta+1}(\partial G)$. Учитывая, что

$$\int_0^\infty \frac{d}{dv}\left[v\,\frac{d}{dv}(Q_2)_{\omega,\theta}(\pm v^{-1/2})\right]dv = 0\,,$$

получаем

$$\frac{d}{du}(I_1)_\pm(u) = \mp\frac{1}{u}\int_0^\infty \frac{1}{u-v}v\,\frac{d}{dv}\left[v\,\frac{d}{dv}(Q_2)_{\omega,\theta}(\pm v^{-1/2})\right]dv.$$

Из леммы 2.1 следует, что $(d/du)(I_1)_\pm(u) \in \mathcal{E}^{\alpha}_{\beta+1}(1,\infty)$. Поэтому $(1/u)(I_1)_\pm(u)$ являются элементами $\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta+1}(1,\infty)$. Отсюда получаем

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}(I_1)_\pm\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in \Lambda^{\alpha}_{2-\beta}(0,1)\,.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{u^{1/2}+v^{1/2}} = \frac{v^{1/2}}{u^{1/2}}\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{u^{1/2}+v^{1/2}},$$

то имеем

$$\frac{d}{du}(I_2)_\pm(u) = \pm u^{-1}\int_0^\infty \frac{1}{v^{1/2}}\frac{1}{u^{1/2}+v^{1/2}}v\,\frac{d}{dv}\left[v\,\frac{d}{dv}(Q_2)_{\omega,\theta}(\pm v^{-1/2})\right]dv.$$

При $0<\beta<1/2$ из леммы 2.3 теперь следует, что $(d/du)(I_2)_\pm(u)$ принадлежит $\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta+1}(1,\infty)$. Аналогично можно доказать, что

$$\frac{d}{du}(I_3)_\pm(u) \in \mathcal{E}^{\alpha}_{\beta+1}(1,\infty).$$

При $1/2 < \beta < 1$ представим, как в лемме 5.3, сумму $(I_2)_\pm(u) + (I_3)_\pm(u)$ в виде

$$\mp \frac{1}{2}u^{-1/2} \int\limits_0^\infty v^{1/2} \frac{d}{dv} \big[(Q_2)_{\omega,\theta}(\pm v^{-1/2}) + (Q_2)_{\omega,\theta}(\mp v^{-1/2})\big]\,dv$$

$$\pm \frac{1}{2}u^{-1/2} \int\limits_0^\infty \frac{1}{u^{1/2}+v^{1/2}}\, v\, \frac{d}{dv}(Q_2)_{\omega,\theta}(\pm v^{-1/2})\,dv$$

$$\pm \frac{1}{2}u^{-1/2} \int\limits_0^\infty \frac{1}{u^{1/2}+v^{1/2}}\, v\, \frac{d}{dv}(Q_2)_{\omega,\theta}(\mp v^{-1/2})\,dv$$

$$= \mp c'_{21}(\psi)\, u^{-1/2} + (J_2)_\pm(u) + (J_3)_\pm(u),$$

где $c'_{21}(\psi)$, равный

$$\frac{1}{2} \int\limits_0^\infty v^{1/2} \frac{d}{dv} \big[(Q_2)_{\omega,\theta}(\pm v^{-1/2}) + (Q_2)_{\omega,\theta}(\mp v^{-1/2})\big]\,dv\,,$$

является непрерывным функционалом в $\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)$. Учитывая, что

$$\frac{d}{du}\Big(\frac{1}{u^{1/2}}\,\frac{1}{u^{1/2}+v^{1/2}}\Big) = -\frac{1}{u^{3/2}}\,\frac{d}{dv}\,\frac{v}{u^{1/2}+v^{1/2}},$$

получаем

$$\frac{d}{du}(J_2)_\pm(u) = \mp\frac{1}{u^{3/2}} \int\limits_0^\infty \frac{v}{u^{1/2}+v^{1/2}}\,\frac{d}{dv}\Big[v\,\frac{d}{dv}(Q_2)_{\omega,\theta}(\pm v^{-1/2})\Big]\,dv.$$

Согласно лемме 2.4, функции $(d/du)(J_2)_\pm(u)$ принадлежат пространству $\mathcal{E}^\alpha_{\beta+1}(1,\infty)$. Аналогично доказывается, что $(d/du)(J_3)_\pm(u)$ являются элементами $\mathcal{E}^\alpha_{\beta+1}(1,\infty)$. В результате имеем $(d/dx)(x^{-1}(J_k)_\pm(x^{-1})) \in \Lambda^\alpha_{2-\beta}(0,1)$, $k = 2, 3$, при $1/2 < \beta < 1$.

Таким образом, любая функция $\widetilde{f}_2$, сопряженная к f_2, удовлетворяет неравенству

$$\|(\partial^2/\partial s^2)\widetilde{f}_2\|_{\Lambda^\alpha_{2-\beta}(\Gamma_+\cup\Gamma_-)} \le c\,\|(\partial/\partial s)Q_2\|_{\mathcal{E}^{1,\alpha}_\beta(\partial G)}$$

при $0 < \beta < 1/2$ и неравенству

$$\|(\partial^2/\partial s^2)(\widetilde{f}_2 - c_{21}(\psi)\,x^{1/2})\|_{\Lambda^\alpha_{2-\beta}(\Gamma_+\cup\Gamma_-)} \le c\,\|(\partial/\partial s)Q_2\|_{\mathcal{E}^{1,\alpha}_\beta(\partial G)}$$

при $1/2 < \beta < 1$, где функционал $c_{21}(\psi)$ с точностью до множителя равен $c'_{21}(\psi)$.

(iii) Функция $\widetilde{f} = \widetilde{f}_1 + \widetilde{f}_2$ является сопряженной к гармоническому продолжению f функции H_ω в область Ω' и имеет представление

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{k=1}^{m+1} b_k(\psi)\,\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta(z)}{1 - i\zeta(z)}\right)^k + g_1(z) + g_2(z),$$

где $(\partial/\partial s)g_1 \in \Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)$, $(\partial/\partial s)g_2 \in \mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)$ и $b_k(\psi)$ — линейные комбинации функционалов $c_{21}(\psi)$ и $c_{1\ell}(\psi)$, $\ell = 1, \dots, m+1$.

Сужение на $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$ конформного отображения $\zeta(z)$ области Ω на $\mathbb{R}^2_+$ имеет разложение

$$\mathrm{Re}\,\zeta(z) = \pm x^{1/2} \pm c_1 x^{3/2}\log x \pm c_2 x^{3/2} + O\big(x^{3/2+\varepsilon}\big), \quad 0 < \varepsilon < 1/2,$$

которое можно дифференцировать (см. п. 5.1). Поэтому верно равенство

$$\frac{\partial}{\partial s}\sum_{k=1}^{m+1} b_k(\psi)\,\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta(z)}{1 - i\,\zeta(z)}\right)^k = \frac{1}{2}b_1(\psi)\,\mathrm{Re}\,z^{-1/2} + b_2(\psi)\frac{\partial}{\partial s}\,\mathrm{Re}\,z + r(z),$$

где $r(z) \in \mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)$. Тогда имеем при $0 < \beta < 1/2$

$$\frac{\partial}{\partial n}f(z) = b_2(\psi)\frac{\partial}{\partial s}\,\mathrm{Re}\,z + h_1(z) + h_2(z)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial n}f(z) = \frac{1}{2}b_1(\psi)\,\mathrm{Re}\,z^{-1/2} + b_2(\psi)\frac{\partial}{\partial s}\,\mathrm{Re}\,z + h_1(z) + h_2(z)$$

при $1/2 < \beta < 1$, где h_1 и h_2 удовлетворяют соотношению

$$\|h_1\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)} + \|h_2\|_{\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)} \le c\,\|\varphi\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)}\,.$$

Так как $\operatorname{grad} H_\omega = O\big(|z|^N\big)$, $z \in \Omega$, для любого целого N, то верна оценка $\operatorname{grad} f = O\big(|z|^{-1/2}\big)$, $z \in \Omega'$. Поэтому

$$H_\omega(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \Big(\psi(z) + \frac{\partial f}{\partial n}(z)\Big)\log\frac{1}{|z-q|}\,ds_q + f(\infty), \quad z \in \Gamma \setminus \{O\}.$$

Будучи решением задачи Неймана, функция H_ω определяется с точностью до постоянного слагаемого. Выберем H_ω так, чтобы $f(\infty) = 0$. Положим

$$\sigma(z) = -(2\pi)^{-1}\big(\psi(z) + (\partial/\partial n)f(z)\big), \quad z \in \Gamma \setminus \{O\}.$$

Так как $V\sigma(z)$ растет не быстрее степенной функции при $z \to 0$, то потенциал простого слоя $V\sigma(z)$ совпадает с $H_\omega(z)$ на Ω. Отсюда следует, что σ является решением уравнения (1.5), принадлежит $\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_m$ и удовлетворяет соотношению

$$\|\sigma\|_{\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_m} \le c\|\psi\|_{\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)}. \tag{5.14}$$

(iv) Пусть теперь ψ есть произвольная функция из пространства $(\Lambda_0)^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)$. Существует последовательность $\{\psi_n\}_{n\ge1}$ гладких функций на $\Gamma \setminus \{O\}$, равных нулю вблизи пика, которая сходится в $\Lambda^{\alpha'}_{-\beta'}(\Gamma)$ при $\alpha' < \alpha$ и $\beta' < \beta$ и удовлетворяет соотношению

$$\|\psi_n\|_{\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)} \le c\|\psi\|_{\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)}.$$

Через σ_n мы обозначим решение уравнения (1.5) в пространстве $\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_m$ с правой частью ψ_n, которое строится, как в (i)–(iii). Согласно (5.14), имеем

$$\|\sigma_n\|_{\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_m} \le c\|\psi\|_{\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)}. \tag{5.15}$$

Так как $\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma) \subset \Lambda^{\alpha'}_{-\beta'}(\Gamma)$, то в силу (5.14) последовательность $\{\sigma_n\}_{n\ge1}$ сходится в $\mathfrak{P}^{1,\alpha'}_{2-\beta'}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_m$ к пределу σ. Как следствие получаем, что $\{\sigma_n\}_{n\ge1}$ сходится поточечно к функции σ на $\Gamma \setminus \{O\}$. Отсюда и из (5.15) следует, что $\sigma \in \mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_m$. Так как оператор $(\pi I + S) : \mathfrak{P}^{1,\alpha'}_{2-\beta'}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_m \to (\Lambda_0)^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_1$ непрерывен, то, переходя к пределу, находим

$$\psi = (\pi I + S)\sigma.$$

Таким образом, доказано, что

$$(\Lambda_0)^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma) \subset (\pi I + S)\big(\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_m\big). \tag{5.16}$$

(v) Пусть теперь $\psi(z) = (\partial/\partial s)\operatorname{Re} z$, $z \in \Gamma \setminus \{O\}$. Ясно, что гармоническая функция $h(z) = -\operatorname{Im} z$, $z \in \Omega$, удовлетворяет на $\Gamma \setminus \{O\}$ соотношению

$\partial h/\partial n = \psi$. Так как $h_\rho \in \mathcal{E}^{1,\alpha}_\beta(\partial G)$, то из (i) и (iii) следует существование гармонического продолжения f функции h_ρ в Ω' с нормальной производной $\partial f/\partial n$ из $\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_m$. Поэтому решение

$$\sigma(z) = -(2\pi)^{-1}\big(\psi(z) + (\partial/\partial n)f(z)\big), \quad z \in \Gamma \setminus \{O\},$$

уравнения (1.5) является элементом $\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_m$.

Отсюда и из (5.16) получаем

$$(\Lambda_0)^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_1 \subset (\pi I + S)(\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_m).$$

Из интегрального представления для гармонической функции $\operatorname{Im}\zeta(z)$ в области $\Omega \cap \{|z| < 1/2\}$ и предельного соотношения для потенциала простого слоя находим

$$\int\limits_{\Gamma\cap\{|z|<1/2\}} \frac{\partial}{\partial n_q}\operatorname{Im}\zeta(q)\frac{\partial}{\partial n_z}\log\frac{1}{|z-q|}ds_q + \pi\frac{\partial}{\partial n_z}\operatorname{Im}\zeta(z)$$
$$= \frac{\partial}{\partial n_z}h(z), \quad z \in \Gamma \cap \{|z| < 1/2\},$$

где $h(z)$ — гармоническая функция в окрестности точки пика. Отсюда следует, что $(\pi I + S)\big((\partial/\partial s)\operatorname{Re}\zeta\big) \in \Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_1$. Аналогично доказывается принадлежность функции $(\pi I + S)\big((\partial/\partial s)\operatorname{Re}\zeta^2\big)$ пространству $\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_1$. Нетрудно убедиться в том, что $(\partial/\partial s)\operatorname{Re}\zeta(z) - (1/2)\operatorname{Re} z^{-1/2} \in \Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)$ и $(\partial/\partial s)\operatorname{Re}(\zeta(z))^2 - (\partial/\partial s)\operatorname{Re} z \in \Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)$. Это вместе с теоремой 2.2 доказывает обратное включение. •

§6. Граничные интегральные уравнения краевых задач Дирихле и Неймана для области с внутренним пиком

Здесь символами ω и ζ мы будем обозначать конформные отображения областей Ω' и Ω на $\mathbb{R}^2_+$ соответственно. Введем также функцию $\mathcal{I}$ на контуре Γ, полагая $\mathcal{I}(z) = \operatorname{Im} z^{1/2}$.

6.1. Мы начнем с доказательства сюръективности введенного ранее оператора $\mathcal{W}_\beta$.

Теорема 6.1. *Пусть* Ω *имеет внутренний пик и пусть* $0 < \alpha, \beta < 1$, $\beta \neq 1/2$. *Тогда оператор* W_β, *определенный в* (1.12) *при* $0 < \beta < 1/2$ *и в* (1.13) *при* $1/2 < \beta < 1$, *сюръективен.*

Доказательство. (i) Пусть $\varphi \in \mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)$ и $\varphi = 0$ в окрестности пика. Используя обозначения п.51, через h_θ мы обозначим интеграл Пуассона функции φ_θ в $\mathbb{R}^2_+$. Введем сопряженную функцию $\widetilde{h}_\theta$, сужение которой на $\mathbb{R}$ имеет вид

$$\widetilde{h}_\theta(\tau + i0) = \tau \int_{\mathbb{R}} \varphi_\theta(t) \frac{t^{-1}}{\tau - t} dt .$$

Применим лемму 5.2 к функции

$$F_\pm(u) = \tau \int_{\mathbb{R}} \varphi_\theta(t) \frac{t^{-1}}{\tau - t} dt ,$$

где $\tau = \pm u^{-1/2}$, $u \in (1, +\infty)$. Так как φ_ρ принадлежит пространству $\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)$, то $\varphi_\rho \circ d_\pm \in \mathcal{E}^\alpha_\beta(1, +\infty)$. Согласно леммам 2.1, 2.3 и 2.4, при $0 < \beta < 1/2$ имеем

$$F_\pm(u) \in \mathcal{E}^\alpha_\beta(1, \infty)$$

и существует линейный непрерывный функционал $c_1(\varphi)$ в $\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)$ такой, что

$$F_\pm(u) \mp c_1(\varphi) u^{-1/2} \in \mathcal{E}^\alpha_\beta(1, \infty)$$

при $1/2 < \beta < 1$ (см. лемму 5.2).

Определяемые уравнениями $\zeta \circ \rho(u) = \pm\big(t_\pm(u)\big)^{-1/2}$ функции $t_\pm$ имеют разложения

$$t_\pm(u) = u + O(\log u),$$

дифференцируемые по крайней мере один раз. Поэтому введенная ранее функция $\widetilde{h}(z)$, $z \in \Gamma$, сопряженная к h, представляется в виде

$$\widetilde{h}(z) = c_1(\varphi) \operatorname{Re} z^{1/2} + \widetilde{g}(z),$$

где $\widetilde{g}$ принадлежит пространству $\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)$ и $c_1(\varphi) = 0$ при $0 < p < 1/2$. Более того, функция $\widetilde{g}$ и функционал $c_1(\varphi)$ удовлетворяют соотношению

$$|c_1(\varphi)| + \|\widetilde{g}\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)} \leq c \|\varphi\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)} .$$

Рассмотрим (1.4) с $t = c_1(\varphi)$. Введем ограниченную гармоническую функцию g вида $h(z) + t\,\operatorname{Im} z^{1/2}$, $z \in \Omega$. Символом h^e мы обозначим гармоническое продолжение функции $\varphi(z)+t\,\operatorname{Im} z^{1/2}$, $z \in \Gamma\setminus\{O\}$, в область Ω', имеющее оценку $\operatorname{grad} h^e(z) = O(|z|^{-1/2})$, $z \in \Omega'$. Так как $\operatorname{grad} g(z) = O(|z|^{-1/2})$, $z \in \Omega$, то верно равенство

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{\partial g}{\partial n} - \frac{\partial h^e}{\partial n}\right)\log\frac{1}{|z-q|}ds_q + h^e(\infty), \quad z \in \Gamma\setminus\{O\}. \tag{6.1}$$

Функция $(\widetilde{g})_\rho$ принадлежит $\mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)$. Поэтому, согласно предложению 4.3, гармоническое продолжение функции $(\widetilde{g})_\rho$ в G имеет сопряженную функцию H, представимую на ∂G в виде $H = Q_1 + Q_2$, где $Q_1 \in \mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)$, $\partial Q_2/\partial s \in \mathcal{E}^\alpha_\beta(\partial G)$, $\operatorname{supp} Q_2 \subset \{(u,\pm 1) : u > 1\}$ и $Q_2(u,1) = Q_2(u,-1)$ при $u > 1$. Тогда H_ω является решением в пространстве $\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)$ задачи Неймана в Ω' с граничными данными $\partial H_\omega/\partial n = -\partial g/\partial n$. Мы можем считать, что $H_\omega(\infty) = 0$.

Так как $\operatorname{grad} H_\omega = O(|z|^{-3/2})$, $z \in \Omega'$, то функция $w = -H_\omega - h^e + h^e(\infty)$ в Ω' допускает представление

$$w(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\left(w(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{1}{|z-q|} - \frac{\partial w}{\partial n_q}(q)\log\frac{1}{|z-q|}\right)ds_q\,.$$

Из предельного соотношения для потенциала двойного слоя и из (6.1) следует

$$w(z) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} w(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{1}{|z-q|}\,ds_q = -2\big(g(z) - h^e(\infty)\big), \quad z \in \Gamma\setminus\{O\}.$$

Так как $T\,1 = -\pi$, то пара (σ, t), где

$$\sigma(z) = -(2\pi)^{-1}\big(H_\omega(z) + \varphi(z) + t\,\operatorname{Im} z^{1/2}\big),$$

является решением уравнения (1.4) и удовлетворяет оценке

$$\|\sigma\|_{\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)} + |t| \le c\|\varphi\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)}\,. \tag{6.2}$$

(ii) Пусть теперь φ — произвольная функция из $\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)$. Существует последовательность $\{\varphi_n\}_{n\ge 1}$ гладких функций на $\Gamma\setminus\{O\}$, равных нулю вблизи пика, которая сходится в $\Lambda^{\alpha'}_{-\beta'}(\Gamma)$ при $\alpha' < \alpha$ и $\beta' < \beta$ и для которой верна оценка

$$\|\varphi_n\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)} \le c\|\varphi\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)}.$$

Через $(\sigma_n, t_n) \in \mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma) \times \mathbb{R}$ мы обозначим решение уравнения (1.4) с правой частью φ_n, которое строится, как в п. (i). Согласно (6.2), мы имеем

$$\|\sigma_n\|_{\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)} + |t_n| \le c\|\varphi\|_{\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)}\,. \tag{6.3}$$

Так как $\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma) \subset \Lambda^{\alpha'}_{-\beta'}(\Gamma)$, то в силу (6.2) последовательность $\{\sigma_n\}_{n\ge 1}$ сходится в $\mathfrak{P}^{1,\alpha'}_{2-\beta'}(\Gamma) \times \mathbb{R}$ к пределу (σ, t). В частности, $\{\sigma_n\}_{n\ge 1}$ сходится поточечно к σ на $\Gamma \setminus \{O\}$. Отсюда и из (6.3) следует, что (σ, t) принадлежит $\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma) \times \mathbb{R}$. В силу непрерывности оператора

$$\pi I - T\,:\mathfrak{P}^{1,\alpha'}_{2-\beta'}(\Gamma) \to \Lambda^{\alpha'}_{-p'}(\Gamma)\dot{+}\mathbb{R}$$

(см. теорему 2.2) получаем, переходя к пределу, что

$$-\varphi = (\pi I - T)\sigma + t\mathcal{I}\,,$$

где $t = 0$ при $0 < \beta < 1/2$. Это доказывает включение

$$\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathbb{R} \subset \mathcal{W}_\beta(\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma) \times \mathbb{R})\,.$$

Так как $\operatorname{Im} z^{1/2}$ принадлежит пространству $\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)$, то обратное включение следует из теоремы 2.2. •

Докажем теперь, что ядро оператора $\mathcal{W}_\beta$ содержит только нулевую функцию.

Теорема 6.2. *Пусть* Ω *имеет внутренний пик и пусть* $0 < \alpha, \beta < 1$, $\beta \ne 1/2$. *Тогда оператор* $\mathcal{W}_\beta$, *определенный в* (1.12) *при* $0 < \beta < 1/2$ *и в* (1.13) *при* $1/2 < \beta < 1$, *инъективен.*

Доказательство. (i) Предположим, что $0 < \beta < 1/2$. Пусть $\sigma \in \mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)$ является решением однородного уравнения

$$\pi\sigma - T\sigma = 0\,. \tag{6.4}$$

Тогда функция $(W\sigma)(z)$, $z \in \Omega$, имеет нулевые предельные значения на $\Gamma \setminus \{O\}$. Введем голоморфную функцию

$$\mathcal{W}(z) = -\widetilde{(W\sigma)}(z) + i(W\sigma)(z)\,, \quad z \in \Omega\,.$$

Пусть $\xi + i\eta = \zeta(z)$ — конформное отображение области Ω на $\mathbb{R}^2_+$, удовлетворяющее условию $\zeta(0) = 0$. Функция $F(\xi + i\eta) = \big(W \circ \theta\big)\big(1/(\xi + i\eta)\big)$ голоморфна в нижней полуплоскости $\mathbb{R}^2_- = \{\xi + i\eta : \eta < 0\}$, непрерывна вплоть до границы и $\operatorname{Im} F = 0$ на вещественной оси. Так как $W\sigma$ допускает оценку

$$(W\sigma)(z) = O\big(|z|^{-N}\big),$$

где N — некоторое целое число, то голоморфное продолжение F^{ext} функции F на $\mathbb{C}$ является целой функцией и удовлетворяет неравенству

$$|\operatorname{Re} F^{\text{ext}}(\xi + i\eta)| \le c\,|\xi + i\eta|^{2N}.$$

С помощью интегральной формулы Шварца доказывается, что F^{ext} имеет тот же порядок роста на бесконечности, что и функция $\operatorname{Re} F^{\text{ext}}$. Поэтому F^{ext} является полиномом с вещественными коэффициентами и

$$-(\widetilde{W\sigma})(z) = \operatorname{Re} F^{\text{ext}}(1/\zeta(z)), \quad z \in \Omega.$$

Так как $(\widetilde{W\sigma})(x) = O(1)$ при $\mathbb{R} \ni x \to -0$, то полином F^{ext} является константой в $\mathbb{C}$ и, значит, $\widetilde{W\sigma}$ — константа в Ω. Поэтому функция $\widetilde{W\sigma}$ в области Ω' имеет на $\Gamma \setminus \{O\}$ граничные значения, равные константе. Так как $\widetilde{W\sigma}(z)$, $z \in \Omega'$, растет не быстрее степенной функции при $z \to 0$, то $\widetilde{W\sigma} = \text{const}$ в Ω'. Поэтому сопряженная функция $-W\sigma$ постоянна в Ω'.

Из формулы скачка для потенциала двойного слоя $W\sigma$ получаем, что $\sigma = \text{const}$ на $\Gamma \setminus \{O\}$. Так как ненулевые константы не удовлетворяют однородному уравнению (6.4), то σ равна нулю на $\Gamma \setminus \{O\}$.

(ii) Пусть теперь $1/2 < \beta < 1$ и пусть пара (σ, t) из пространства $\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma) \times \mathbb{R}$ принадлежит $\operatorname{Ker}(\pi I - T + t\mathcal{I})$. Так же и в (i) доказывается, что функция

$$W(z) = -\widetilde{(W\sigma)}(z) + i(W\sigma)(z) + t\,z^{1/2}$$

является константой в Ω. Уравнение (1.3) с правой частью $\operatorname{Im} z^{1/2}$, согласно теореме 6.1 и доказанному в п. (i) утверждению, имеет единственное решение σ_0 в пространстве $\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta'}(\Gamma)$, где $0 < \beta' < 1/2$. Так как $\mathfrak{P}^{1,\alpha'}_{2-\beta'}(\Gamma) \subset \mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)$ и σ_0, эквивалентная $c\,x^{-1/2}$ при $z \to 0$, не принадлежит $\mathfrak{P}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)$, то имеем $t = 0$. Далее, точно так же, как и в (i), доказывается, что $\sigma = 0$. •

6.2. Изучение интегрального уравнения (1.6) мы начнем с описания решений однородного уравнения. Символом $\mathcal{B}_1$ мы обозначим линейную оболочку функции $\mathrm{Re}\, z^{-1/2}$, $z \in \Gamma$, и пусть $\mathcal{B}_0$ обозначает пространство, состоящее только из нулевой функции. Введем также функцию $\mathcal{R}$ вида

$$\mathcal{R}(z) = \mathrm{Re}\Big(z^{1/2} + \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{4\pi} z^{3/2}(\log z - \pi i) + i\frac{\alpha_+ + \alpha_-}{4} z^{3/2}\Big), \quad z \in \Omega.$$

Теорема 6.3. *Пусть Ω имеет внутренний пик и пусть $0 < \alpha, \beta < 1$ и $\beta \neq 1/2$. Тогда оператор* (1.14) *имеет одномерное ядро. Элементами ядра являются пары вида*

$$\Big(c\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{|\gamma_0|}, 0\Big),$$

где $c \in \mathbb{R}$ и γ_0 — конформное отображение области Ω' на внешность единичного круга, удовлетворяющее условию $\gamma_0(\infty) = \infty$.

Доказательство. Пусть $(\sigma, t) \in (\Omega^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma) \dotplus \mathcal{B}_{m-1}) \times \mathbb{R}$ принадлежит $\mathrm{Ker}(\pi I + S + t\mathcal{R})$. Тогда гармоническая функция

$$v(z) = V\sigma(z) + t\mathcal{R}(z), \quad z \in \Omega,$$

является решением краевой задачи Неймана и имеет нулевые граничные данные на $\Gamma \setminus \{O\}$. Так как

$$|v(z)| \le c\, \log(1/|z|), \tag{6.5}$$

то из интегрального представления гармонической функции $v(z)$ и предельного соотношения для потенциала двойного слоя следует

$$\pi v(z) + \int_\Gamma v(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\log\frac{1}{|z-q|}ds_q = 0, \quad z \in \Gamma \setminus \{O\}.$$

Таким образом, v является решением однородного интегрального уравнения задачи Дирихле в Ω'.

Так как потенциал двойного слоя $(Wv)(z)$, $z \in \Omega'$, растет не быстрее степенной функции и так как его предельные значения на $\Gamma \setminus \{O\}$ равны нулю, то $(Wv)(z) = 0$ в области Ω'. Поэтому сопряженная гармоническая функция $\widetilde{Wv}(z)$, $z \in \Omega'$, является константой в Ω'. Положим $\widetilde{Wv} = C$. Введем голоморфную функцию

$$W(z) = (W\,v)(z) + i(\widetilde{W\,v} - C), \quad z \in \Omega.$$

Через $\xi + i\eta = \zeta(z)$ обозначим конформное отображение области Ω на $\mathbb{R}^2_+$, удовлетворяющее условию $\zeta(0) = 0$. Функция $F(\xi + i\eta) = (W \circ \theta)(1/(\xi + i\eta))$ голоморфна в нижней полуплоскости $\mathbb{R}^2_-$, непрерывна вплоть до границы, и $\operatorname{Im} F = 0$ на $\mathbb{R}$. Голоморфное продолжение F^{ext} функции F на $\mathbb{C}$ является целой функцией, растущей не быстрее степенной функции при $\xi + i\eta \to \infty$. Поэтому

$$(Wv)(z) = \sum_{k=0}^{\ell} c^{(k)} \operatorname{Re}(1/\gamma(z))^{-k}, \quad z \in \Omega,$$

где $c^{(k)}$, $0 \le k \le \ell$, — вещественные коэффициенты и ℓ — некоторое целое неотрицательное число. Из формулы скачка для Wv получаем

$$v(z) = -(2\pi)^{-1} \sum_{k=0}^{\ell} c^{(k)} \operatorname{Re}(1/\gamma(z))^{-k}, \quad z \in \Gamma \setminus \{O\}.$$

Тогда из (6.5) следует, что $v(z) = c^{(0)}$ на $\Gamma \setminus \{O\}$ и, значит,

$$(V\sigma)(z) + t\mathcal{R}(z) = c^{(0)}, \quad z \in \Omega'.$$

Введем гармоническое продолжение $\mathcal{R}^e$ в область Ω^e сужения функции $\mathcal{R}$ на $\Gamma \setminus \{O\}$. Через σ_0 обозначим плотность равновесного распределения на Γ. Положим

$$c_0 = \Big(\int_\Gamma \sigma(q)ds_q\Big) \Big/ \Big(\int_\Gamma \sigma_0(q)ds_q\Big).$$

Так как

$$V\sigma - c_0 V\sigma_0 + t\mathcal{R}^e$$

является ограниченной гармонической функцией в Ω', равной константе на $\Gamma \setminus \{O\}$, то

$$V\sigma(z) = c_0 V\sigma_0(z) - t\mathcal{R}^e(z) + c^{(0)}, \quad z \in \Omega.$$

Из формулы скачка для нормальной производной потенциала простого слоя получаем

$$2\pi\sigma(z) = 2\pi c_0\sigma_0(z) - t\frac{\partial}{\partial n}\mathcal{R}(z) + t\frac{\partial}{\partial n}\mathcal{R}^e(z), \quad z \in \Gamma \setminus \{O\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial}{\partial n}\mathcal{R}(z) \sim a\alpha_{\pm}\,|z|^{1/2}, \qquad \frac{\partial}{\partial n}\mathcal{R}^e(z) \sim \pm b\,|z|^{-3/2},$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, и что σ_0 на $\Gamma \setminus \{O\}$ удовлетворяет оценке $|\sigma_0(z)| \leq c\exp(-\gamma x)$, $z \to 0$, где γ — малое положительное число. Отсюда и из принадлежности σ пространству $\Omega^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{B}_{m-1}$ следует, что $t = 0$ и, значит, $\sigma = c_0\sigma_0$.

Ясно, что σ_0 является решением однородного уравнения

$$\pi\sigma + S\sigma = 0,$$

и σ_0 принадлежит пространству $\Omega^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)$ при $0 < \beta < 1$. Поэтому ядро оператора (1.14) одномерно. •

Теорема 6.4. *Пусть Ω имеет внутренний пик и пусть $0 < \alpha, \beta < 1$, $\beta \neq 1/2$. Тогда оператор* (1.14) *является сюръективным.*

Доказательство. (i) Пусть $\psi \in (\Lambda_0)^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)$ и $\psi = 0$ в окрестности пика. Определим $\psi^{(\text{int})}$ на Γ равенством

$$\frac{d}{ds}\psi^{(\text{int})} = \psi.$$

Так как $\theta(\pm x^{1/2}) = x + O(x^2 \log x)$, то функции $(d/dx)\big(\psi^{(\text{int})}\big)_{\theta}(\pm x^{1/2})$ принадлежат $\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(0,1)$. Поэтому $(d/du)\big(\psi^{(\text{int})}\big)_{\theta}(\pm u^{-1/2})$ являются элементами пространства $\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta+2}(1,\infty)$. Введем решение h_θ краевой задачи Неймана с граничными данными $(d/d\tau)\big(\psi^{(\text{int})}\big)_{\theta}$

$$h_\theta(\zeta) = -\int_{\mathbb{R}} \log|\zeta - \nu|\frac{d}{d\nu}\big(\psi^{(\text{int})}\big)_{\theta}(\nu)d\nu, \quad \zeta = \tau + i\eta \in \mathbb{R}^2_+.$$

Представим $\partial h_\theta/\partial\tau$ на $\mathbb{R}$ в виде

$$-\tau^2\int_{\mathbb{R}} \frac{\nu^{-2}}{\tau-\nu}\frac{d}{d\nu}\big(\psi^{(\text{int})}\big)_{\theta}(\nu)d\nu + \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\nu}\big(\psi^{(\text{int})}\big)_{\theta}(\nu)\frac{d\nu}{\nu} + \tau\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\nu}\big(\psi^{(\text{int})}\big)_{\theta}(\nu)\frac{d\nu}{\nu^2}.$$

Ясно, что линейные функционалы

$$a_1(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\nu}\big(\psi^{(\text{int})}\big)_{\theta}(\nu)\frac{d\nu}{\nu} \quad \text{и} \quad a_2(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\nu}\big(\psi^{(\text{int})}\big)_{\theta}(\nu)\frac{d\nu}{\nu^2}$$

непрерывны в пространстве $\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)$. Применим лемму 5.3 к дифференциалам

$$\left(\tau^2 \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\nu^{-2}}{\tau-\nu}\frac{d}{d\nu}\big(\psi^{(\mathrm{int})}\big)_\theta(\nu)d\nu\right) d\tau = F_\pm(u)\,du\,,$$

где τ и u связаны соотношениями $\tau = \pm u^{-1/2}$, $u > 0$. Из лемм 2.1, 2.3 и 2.4 следует, что $F_\pm(u) \in \mathcal{E}^\alpha_{2+\beta}(1,\infty)$ при $0 < \beta < 1/2$ и существует непрерывный линейный функционал $a_3(\psi)$ в пространстве $\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)$ такой, что $F_\pm(u) \mp a_3(\psi)u^{-5/2} \in \mathcal{E}^\alpha_{2+\beta}(1,\infty)$ при $1/2 < \beta < 1$.

Уравнения $\zeta\circ\rho(u) = \pm\big(t_\pm(u)\big)^{1/2}$ определяют функции $t_\pm$, допускающие представления

$$t_\pm(u) = u + O(\log u),$$

которые дифференцируемы по крайней мере один раз. Поэтому $h(z)$, $z \in \Gamma$, имеет вид

$$h(z) - h(0) = \sum_{k=1}^{m+1} b_k(\psi)\left(\mathrm{Re}\,\frac{\zeta(z)}{1-i\zeta(z)}\right)^k + g(z),$$

где функция g удовлетворяет неравенству

$$\|(\partial/\partial s)g\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)} \le c\|\psi\|_{\Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)}\,,$$

коэффициенты $b_1(\psi),\dots,b_m(\psi)$ являются линейными комбинациями функционалов $a_1(\psi),\dots,a_m(\psi)$, и целое m определяется неравенством $(m-1)/2 < \beta < m/2$.

(ii) Построенное в предложении 4.2 гармоническое продолжение H функции g_ρ в область G имеет нормальную производную $\partial H/\partial n = Q_1 + Q_2$, где $Q_1 \in \mathcal{E}^\alpha_{\beta+2}(\partial G)$, $\partial Q_2/\partial s \in \mathcal{E}^\alpha_{\beta+2}(\partial G)$, $\operatorname{supp} Q_2 \subset \{(u,\pm1) : u > 0\}$ и $Q_2(u,1) = -Q_2(u,-1)$ при $u > 1$. Отсюда и из леммы 5.1 следует, что $\partial H_\omega/\partial n$ представляется в виде $q_1 + q_2$, где $q_1 \in \Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)$, $(\partial/\partial s)q_2 \in \Lambda^\alpha_{2-\beta}(\Gamma)$ и $q_2(x + i\kappa_+(x)) = -q_2(x + i\kappa_-(x))$, $x \in (0,1]$.

Заметим, что ограниченное гармоническое продолжение функции

$$\sum_{k=1}^{m+1} b_k(\psi)\left(\mathrm{Re}\,\frac{\zeta(z)}{1-i\zeta(z)}\right)^k - b_1(\psi)\mathcal{R}(z), \quad z \in \Gamma\setminus\{O\},$$

в область Ω' имеет нормальную производную вида $q_3(z) - c(\psi)\,\mathrm{Re}\,z^{-1/2}$, где $q_3 \in \Lambda^\alpha_{-\beta}(\Gamma)$ и $c(\psi)$ является линейной комбинацией функционалов $b_1(\psi),\dots,b_{m+1}(\psi)$ (см. предложение 1[3]).

Введем теперь гармоническое продолжение f в Ω' функции $h - b_1(\psi)\mathcal{R}$. Так как h определяется с точностью до аддитивной постоянной, то можем считать, что f обращается в нуль на бесконечности. Учитывая, что $\operatorname{grad} h = O(|z|^{-1/2})$ в Ω и $\operatorname{grad} f = O(|z|^{-1/2})$ в Ω', получаем

$$h(z)-b_1(\psi)\mathcal{R}(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\Big(\psi(q)-b_1(\psi)\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial n}(q)-\frac{\partial f}{\partial n}(q)\Big)\log\frac{1}{|z-q|}ds_q, \quad z\in\Gamma\setminus\{O\}.$$

Положим

$$\sigma(z) = \frac{1}{2\pi}\Big(\psi(z)-b_1(\psi)\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial n}(z)-\sum_{k=1}^{3}q_k(z)+c(\psi)\operatorname{Re}z^{-1/2}\Big). \tag{6.6}$$

Так как $\sigma(z) = O(|z|^{-1/2})$, $z\in\Gamma$, то верно равенство $V\sigma(z) = O(1)$. Отсюда и из ограниченности функции $h-b_1(\psi)\mathcal{R}$ следует, что $V\sigma = h-b_1(\psi)\mathcal{R}$ в области Ω. С помощью предельного соотношения для нормальной производной потенциала $V\sigma$ находим

$$\pi\sigma+\left(\frac{\partial}{\partial n}V\right)\sigma = \psi - b_1(\psi)\frac{\partial}{\partial n}\mathcal{R} \quad \text{на } \Gamma\setminus\{O\}.$$

Поэтому пара (σ, t), где $t = b_1(\psi)$ и σ из (6.6), является решением уравнения (1.6). Так как $\partial\mathcal{R}/\partial n$ принадлежит $\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)$, то плотность σ представляется в виде

$$\sigma(z) = \sigma^{(0)}(z)+\frac{1}{2\pi}c(\psi)\operatorname{Re}z^{-1/2}, \quad z\in\Gamma\setminus\{O\}. \tag{6.7}$$

Кроме того, функция $\sigma^{(0)}$ и функционал $c(\psi)$ в (6.7) удовлетворяют неравенству

$$\|\sigma^{(0)}\|_{(\Omega)^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)}+|c(\psi)|\le c\,\|\psi\|_{\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)}. \tag{6.8}$$

(iii) Пусть теперь ψ — произвольная функция из $(\Lambda_0)^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)$. Существует последовательность $\{\psi_n\}_{n\ge1}$ гладких функций на $\Gamma\setminus\{O\}$, равных нулю в окрестности пика, которая сходится в $\Lambda^{\alpha'}_{-\beta'}(\Gamma)$ при $\alpha'<\alpha$ и $\beta'<\beta$ и удовлетворяет соотношению

$$\|\psi_n\|_{\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)}\le c\|\psi\|_{\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)}.$$

Через (σ_n, t_n) мы обозначим решение уравнения (1.6) в пространстве $(\Omega^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\times\mathcal{B}_{m-1})\dot{+}\mathrm{R}$ с правой частью ψ_n, которое строится, как в п. (i)–(ii). Здесь коэффициент t_n равен $b_1(\psi_n)$ и σ_n имеет вид

$$\sigma_n(z) = \sigma_n^{(0)}(z)+\frac{1}{2\pi}c(\psi_n)\operatorname{Re}z^{-1/2}, \quad z\in\Gamma\setminus\{O\}.$$

Так как $\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma) \subset \Lambda^{\alpha'}_{-\beta'}(\Gamma)$, то в силу (6.8) последовательность $\{(\sigma_n, t_n)\}_{n\geq 1}$ сходится в $(\Omega^{1,\alpha'}_{2-\beta'}(\Gamma)\times \mathcal{B}_{m-1})\dot{+}\mathrm{R}$ к пределу (σ, t). В частности, $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ сходится поточечно к σ на $\Gamma\setminus\{O\}$. Так как

$$\|\sigma_n\|_{(\Omega)^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\times\mathcal{B}_{m-1}} + |\,t_n\,| \leq c\|\psi\|_{\Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)},$$

то (σ, t) принадлежит $(\Omega^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\times\mathcal{B}_{m-1})\dot{+}\mathrm{R}$. В силу непрерывности оператора (1.11) (см. теорему 3.2), переходя к пределу в равенстве

$$\pi\sigma_n + S\sigma_n + t_n\frac{\partial}{\partial n}\mathcal{R} = \psi_n \quad \text{на } \Gamma\setminus\{O\},$$

получаем, что пара (σ, t) удовлетворяет уравнению (1.6).

В заключение пусть $\psi(z) = (\partial/\partial s)\,\mathrm{Re}\, z$, $z \in \Gamma$. Ясно, что гармоническая функция $h(z) = -\mathrm{Im}\, z$, $z \in \Omega$, удовлетворяет соотношению $\partial h/\partial n = \psi$. Так как $\partial h/\partial s \in \Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)$, то из предложения 4.2 следует существование гармонического продолжения f функции h в область Ω' с нормальной производной из $\mathfrak{O}^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)$. Как и в п. (ii), доказывается, что пара $(\sigma, 0)$, где

$$\sigma(z) = \frac{1}{2\pi}\Big(\psi - \frac{\partial}{\partial n}f\Big),$$

удовлетворяет уравнению (1.6) с правой частью, равной ψ. Таким образом, имеет место включение

$$(\Lambda_0)^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_1 \subset \Big(\pi I + S + t\frac{\partial}{\partial n}\mathcal{R}\Big)\big((\Omega^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{B}_{m-1})\times\mathbb{R}\big).$$

(iv) Так как $\dfrac{\partial}{\partial n}\mathcal{R} \in \Lambda^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)$, то из теоремы 3.2 следует

$$\Big(\pi I + S + t\frac{\partial}{\partial n}\mathcal{R}\Big)(\Omega^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)\times\mathbb{R}) \subset (\Lambda_0)^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_1. \tag{6.9}$$

Выберем теперь $\psi \in (\Lambda_0)^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)$ такую, что коэффициент $c(\psi)$ в представлении (6.7) не обращается в нуль (см. теорему 2 [2]). Так как $\sigma^{(0)}$ в (6.7) принадлежит $\Omega^{1,\alpha}_{2-\beta}(\Gamma)$, то, согласно теореме 3.2, $(\pi I + S)\sigma_0 \in (\Lambda_0)^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_1$. Это доказывает, что $(\pi I + S)(\mathcal{B}_1) \subset (\Lambda_0)^{\alpha}_{-\beta}(\Gamma)\dot{+}\mathcal{D}_1$. Отсюда и из (6.9) следует обратное включение. •

Список литературы

[1] Мазья В. Г., Соловьев А. А., *Об интегральном уравнении задачи Дирихле в плоской области с острием на границе*, Мат. сб. **180** (1989), № 9, 1211–1233.

[2] Мазья В. Г., Соловьев А. А., *О граничном интегральном уравнении задачи Неймана для области с пиком*, Тр. Ленингр. мат. о-ва **1** (1990), 109–134.

[3] Maz'ya V., Solov'ev A., *Boundary integral equations of the logarithmic potential theory for domains with peaks*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. **6** (1995), no. 4, 211–236.

[4] Радон И., *О краевых задачах для логарифмического потенциала*, Успехи мат. наук **1** (1946), № 3-4, 96–124.

[5] Мазья В. Г., *Граничные интегральные уравнения*, Анализ-4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, т. 27, ВИНИТИ, М., 1988, сс. 131–228.

[6] Meyer Y., *Continuité sur les espaces de Hölder et de Sobolev des opérateurs définis par des intégrales singulières*, Recent Progress in Fourier Analysis (El Escorial, 1983), North-Holland Math. Stud., vol. 111, North-Holland, Amsterdam–New York, 1985, pp. 145–172.

[7] Мазья В. Г., Пламеневский Б. А., *Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда–Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе*, Math. Nachr. **81** (1978), 25–82.

[8] Голузин Г. М., *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Изд. 2-ое, Наука, М., 1966.

Поступило 1 декабря 1997 г.

Linköping University
Department of Mathematics
S - 581 83 Linköping, Sweden
E-mail: vlmaz@mai.liu.se

Челябинский
государственный университет
математический факультет
454021 Челябинск, Россия
E-mail: alsol@csu.ac.ru