V. E. Alekseev, S. V. Sorochan, On the entropy of hereditary classes of colored graphs,
Diskr. Mat., 2000, Volume 12, Issue 2, 99–102

Дискретная математика

том 12 выпуск 2 * 2000

УДК 519.95

Об энтропии наследственных классов цветных графов

© 2000 г. В. Е. Алексеев, С. В. Сорочан

В статье обобщаются результаты, полученные ранее для наследственных классов обыкновенных графов, на наследственные классы цветных графов. Цветной граф — это полный обыкновенный граф с раскрашенными ребрами. Доказывается, что наименьшим положительным значением энтропии наследственных классов q-цветных графов является величина $(1/2)\log_q 2$, характеризуются минимальные классы с таким значением энтропии.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 98–01–00792.

1. Введение

Пусть Q — конечное множество, $|Q| = q > 1$, далее Q считается фиксированным. Цветным графом, или Q-графом, или q-графом с множеством вершин V будем называть пару (V, g), где $g\colon V^{(2)} \to Q$, $V^{(2)}$ — множество всех неупорядоченных пар различных элементов множества V. Если $g(x, y) = \alpha$, то пару (x, y) будем называть ребром цвета α.

Обыкновенный граф — это 2-граф, и многие термины, применяемые для обыкновенных графов, естественным образом распространяются на цветные графы. Цветные графы $G_1 = (V_1, g_1)$ и $G_2 = (V_2, g_2)$ изоморфны, если существует биекция $\varphi\colon V_1 \to V_2$, сохраняющая цвета ребер, то есть $g_1(x, y) = g_2(\varphi(x), \varphi(y))$ для всех $(x, y) \in V_1^{(2)}$. Подграф цветного графа $G = (V, g)$, порожденный множеством $U \subseteq V$, — это цветной граф (U, g'), где g' — ограничение g на $U^{(2)}$; этот подграф обозначается $G\langle U\rangle$.

В статье рассматриваются только цветные графы, поэтому иногда будем употреблять просто термин граф вместо цветной граф. Множество графов $\mathscr{X}$ называется наследственным классом, если всякий граф, изоморфный порожденному подграфу графа из $\mathscr{X}$, принадлежит $\mathscr{X}$.

Пусть $\mathscr{X}$ — множество q-графов. Обозначим через $\mathscr{X}_n$ множество всех q-графов из $\mathscr{X}$ с множеством вершин $\{1, \ldots, n\}$ и определим последовательность

$$h_n(\mathscr{X}) = (\log_q |\mathscr{X}_n|)/\binom{n}{2}.$$

Точно так же, как и в случае обыкновенных графов (см. [1]), доказывается, что для любого бесконечного наследственного класса q-графов существует предел $h_n(\mathscr{X})$ при $n \to \infty$. Этот предел назовем энтропией класса $\mathscr{X}$ и обозначим $h(\mathscr{X})$.

Если $\mathscr{X}$ — конечное множество графов, то $h(\mathscr{X}) = -\infty$ (говоря о конечном или бесконечном множестве графов, мы имеем в виду абстрактные графы, то есть отождествляем изоморфные графы). Теорема Рамсея позволяет легко охарактеризовать минимальные бесконечные наследственные классы. Обозначим через $\mathscr{O}(\alpha)$ множество всех Q-графов (V, g) с $g(V^{(2)}) = \{\alpha\}$, такие графы будем называть одноцветными. В терминах цветных графов теорема Рамсея утверждает, что для любых q и k существует такое число $R_q(k)$, что в любом q-графе с не менее чем $R_q(k)$ вершинами имеется одноцветный порожденный подграф с k вершинами. Отсюда сразу получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Наследственный класс Q-графов бесконечен тогда и только тогда, когда в нем содержится хотя бы один из классов $\mathscr{O}(\alpha), \alpha \in Q$.*

Энтропия класса $\mathscr{O}(\alpha)$ равна 0. Одна из целей настоящей работы — охарактеризовать множество всех наследственных классов с нулевой энтропией подобно тому, как теорема 1 характеризует конечные классы.

В [1] было выдвинуто предположение, а в [2] доказано, что область значений энтропии бесконечных наследственных классов обыкновенных графов является разрывным множеством: энтропия такого класса либо равна 0, либо не меньше 1/2. В [2], кроме того, было установлено, что имеется ровно три минимальных по включению наследственных класса обыкновенных графов с положительной энтропией: класс всех двудольных графов, класс всех графов, дополнительных к двудольным, и класс всех расщепляемых графов. В [4] область значений энтропии наследственных классов обыкновенных графов была охарактеризована полностью: она состоит из 1 и всех чисел вида $1 - 1/k$, где k — натуральные числа.

В настоящей работе результаты из [2] обобщаются на наследственные классы цветных графов. Мы покажем, что энтропия наследственного класса q-графов, если она положительна, не может быть меньше, чем $\frac{1}{2}\log_q 2$, и охарактеризуем минимальные классы, имеющие ненулевую энтропию. В разделе 2 излагаются некоторые вспомогательные факты, относящиеся к наследственным классам двудольных цветных графов, в разделе 3 доказывается основной результат (теорема 3).

2. Двудольные цветные графы

Пусть V и U — непересекающиеся множества. Двудольным Q-графом с долями V и U будем называть тройку (V, U, g), где $g\colon V \times U \to Q$. Для $P \subset Q$ множество всех двудольных Q-графов с $g(V \times U) \subseteq P$ будем обозначать $\mathscr{B}(P)$. Определения изоморфизма, подграфа (порожденного) и наследственного класса распространяются на двудольные цветные графы очевидным образом.

Пусть $\mathscr{X}$ - множество двудольных Q-графов. Через $\mathscr{X}_n$ обозначим множество всех графов из $\mathscr{X}$, у которых $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $U = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$. В [3] (в несколько иной терминологии) доказано, что для каждого наследственного класса двудольных Q-графов существует энтропия, определяемая следующим образом:

$$h(\mathscr{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_q |\mathscr{X}_n|}{n^2},$$

и охарактеризованы значения, которые она может принимать. Этот результат будет использован в следующем разделе, поэтому сформулируем его в терминах, принятых в этой статье.

Теорема 2. *Если $\mathscr{X}$ — наследственный класс двудольных Q-графов, то $h(\mathscr{X}) = \log_q p$, где p — наибольшая мощность такого множества $P \subseteq Q$, что $\mathscr{B}(P) \subseteq \mathscr{X}$.*

Установим еще некоторые вспомогательные факты. Пополнением двудольного Q-графа $G = (V, U, g)$ назовем любой Q-граф $H = (V \cup U, h)$ такой, что h совпадает с g на $V \times U$. Пополнение, в котором $h(x,y) = \alpha$ для всех $(x,y) \in V^{(2)}$ и $h(x,y) = \beta$ для всех $(x,y) \in U^{(2)}$, обозначим через $G[\alpha, \beta]$.

Лемма 1. *Для любого графа $G \in \mathscr{B}(P)$ существует такой граф $H \in \mathscr{B}(P)$, в любом пополнении которого имеется подграф, изоморфный $G[\alpha, \beta]$ при некоторых α, β.*

Доказательство. Пусть $G = (A, B, g)$, $|A| = a$, $|B| = b$. Положим

$$k = \binom{R_q(b)}{b}, \quad p = ka, \quad m = \binom{R_q(p)}{p},$$

где R_q — функция Рамсея, упомянутая во введении. Возьмем два непересекающихся множества C и D, $|C| = R_q(p)$, $|D| = mR_q(b)$. У множества C имеется ровно m подмножеств мощности p. Обозначим их $C_1, \dots, C_m$. Каждое из множеств C_i разобьем на k подмножеств, по a элементов в каждом, обозначим эти подмножества $C_{i,1}, \dots, C_{i,k}$. Множество D разобьем на m подмножеств мощности $R_q(b)$ каждое, обозначим эти подмножества $D_1, \dots, D_m$. У множества D_i имеется ровно k подмножеств мощности b, обозначим их $D_{i,1}, \dots, D_{i,k}$.

Для каждой пары $(i,j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, k\}$ проделаем следующее. Возьмем две произвольные биекции

$$\varphi\colon C_{i,j} \to A, \qquad \psi\colon D_{i,j} \to B.$$

Для всех $x \in C_{i,j}$, $y \in D_{i,j}$ положим $h(x,y) = g(\varphi(x), \psi(y))$. Иначе говоря, на каждой паре множеств $C_{i,j}, D_{i,j}$ строится двудольный граф, изоморфный G. Это построение непротиворечиво, так как множества $C_{i,j} \times D_{i,j}$, соответствующие разным парам (i,j), не пересекаются. Доопределив функцию h произвольным образом на остальных парах из $C \times D$ значениями из P, получим двудольный граф $H = (C, D, h)$.

Пусть F — пополнение графа H. По теореме Рамсея в C имеется подмножество C_i такое, что в $H(C_i)$ все ребра имеют один цвет, скажем, α, а в множестве D_i имеется подмножество $D_{i,j}$ такое, что в $H\langle D_{i,j}\rangle$ все ребра тоже имеют один цвет β. Но тогда $H\langle C_{i,j} \cup D_{i,j}\rangle$ изоморфен $G[\alpha, \beta]$. Лемма доказана.

Для $P \subseteq Q$, $\alpha, \beta \in Q$ положим

$$B(P, \alpha, \beta) = \{G[\alpha, \beta] \colon G \in B(P)\}.$$

Иначе говоря, $B(P, \alpha, \beta)$ — это множество всех таких Q-графов, у которых множество вершин можно разбить на две части, одна из которых порождает граф из $\mathscr{O}(\alpha)$, другая из $\mathscr{O}(\beta)$, а цвета ребер, соединяющих вершины из разных частей, принадлежат P.

Пусть $\mathscr{X}$ — множество Q-графов. Обозначим через $\mathscr{C}(\mathscr{X})$ множество всех двудольных Q-графов, имеющих пополнения, принадлежащие $\mathscr{X}$.

Лемма 2. *Если $\mathscr{X}$ — наследственный класс Q-графов, $P \subseteq Q$ и $\mathscr{B}(P) \subseteq \mathscr{C}(\mathscr{X})$, то существуют такие α и β, что $\mathscr{B}(P, \alpha, \beta) \subseteq \mathscr{X}$.*

Доказательство. Допустим, что для любой пары $(\alpha, \beta) \in Q^{(2)}$ существует граф $L_{\alpha,\beta} \in \mathscr{B}(P, \alpha, \beta)$, не содержащийся в $\mathscr{X}$. Пусть $L_{\alpha,\beta} = G_{\alpha,\beta}[\alpha, \beta]$ для некоторого двудольного графа $G_{\alpha,\beta} \in \mathscr{B}(P)$. Возьмем какой-либо граф $G \in \mathscr{B}(P)$, в котором для каждой пары $(\alpha, \beta) \in Q^{(2)}$ содержится подграф, изоморфный $G_{\alpha,\beta}$ (существование такого G очевидно). По лемме 1 существует граф $H \in \mathscr{B}(P)$, для любого пополнения F которого найдутся такие α и β, что в F содержится подграф, изоморфный $G[\alpha, \beta]$. Но тогда в F имеется подграф, изоморфный $L_{\alpha,\beta}$. Отсюда следует, что ни одно пополнение графа H не принадлежит $\mathscr{X}$, то есть $H \notin \mathscr{C}(\mathscr{X})$, а это противоречит условию $\mathscr{B}(P) \subseteq \mathscr{C}(\mathscr{X})$. Лемма доказана.

3. Основной результат

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{X}$ — наследственный класс Q-графов. Следующие утверждения равносильны:*

(1) $h(\mathscr{X}) > 0$;

(2) $h(\mathscr{X}) \geqslant \frac{1}{2}\log_q 2$;

(3) *существует такое $P \subseteq Q$, $|P| = 2$, что $\mathscr{B}(P) \subseteq \mathscr{C}(\mathscr{X})$;*

(4) *существует такое $P \subseteq Q$, $|P| = 2$, и такие $\alpha, \beta \in Q$, что $\mathscr{B}(P, \alpha, \beta) \subseteq \mathscr{X}$.*

Доказательство. Положим $\mathscr{Y} = \mathscr{C}(\mathscr{X})$. Тогда это наследственный класс двудольных графов и $|\mathscr{Y}_n| \leqslant |\mathscr{X}_{2n}|$ для любого n, откуда получаем, что

$$h(\mathscr{Y}) \leqslant 2h(\mathscr{X}).$$

С другой стороны, каждому графу $G \in X_{2n}$ можно поставить в соответствие тройку (G_1, G_2, H), где $G_1 = G\langle\{1, 2, \dots, n\}\rangle$, $G_2 = G\langle\{n+1, n+2, \dots, 2n\}\rangle$, H — двудольный граф с долями $\{1, 2, \dots, n\}$ и $\{n+1, n+2, \dots, 2n\}$, пополнением которого является граф G. Это соответствие инъективно, следовательно, $|\mathscr{X}_{2n}| \leqslant |\mathscr{X}_n|^2|\mathscr{Y}_n|$, откуда,

$$h(\mathscr{X}) \leqslant h(\mathscr{Y}).$$

Из полученных неравенств и теоремы 2 следует равносильность утверждений (1), (2), (3). Справедливость импликации (3) $\Longrightarrow$ (4) следует из леммы 2, а (4) $\Longrightarrow$ (1) из очевидных оценок для числа графов в множестве $\mathscr{B}_n(P, \alpha, \beta)$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Алексеев В. Е., Наследственные классы и кодирование графов. *Проблемы кибернетики* (1982) **39**, 151–164.

2. Алексеев В. Е., Об энтропии фрагментно замкнутых классов графов. В кн.: *Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике.* Горьковский госуниверситет, Горький, 1986, с. 5–15.

3. Алексеев В. Е., Об энтропии двумерных фрагментно замкнутых языков. В кн.: *Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике.* Горьковский госуниверситет, Горький, 1987, с. 5–13.

4. Алексеев В. Е., Область значений энтропии наследственных классов графов. *Дискретная математика* (1992) **4** , №2, 148–157.

Статья поступила 15.07.1999.