N. M. Gulevich, An estimation of deviation of fixed points from a nonconvex set, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1982, Volume 122, 13–16

Н.М.Гулевич

ОЦЕНКА ОТКЛОНЕНИЯ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ОТ НЕВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА

Теорема I статьи [2] утверждает: если A непустое ограниченное замкнутое подмножество гильбертова пространства H, $f:\overline{co}\,A \longrightarrow H$ нерастягивающее отображение и $f(\partial A)\subset A$, то f имеет неподвижную точку в $\overline{co}\,A$.

Здесь будет приведено количественное уточнение этого результата.

В дальнейшем мы придерживаемся обозначений, принятых в статье [2].

Пусть $(X,\|\cdot\|)$ линейное нормированное пространство. Отклонением множества $B\subset X$ от множества $A\subset X$ называется величина $\delta(B,A)=\sup\limits_{x\in B}\inf\limits_{y\in A}\|x-y\|$ (см.,например [7, стр.156]). Величина $\lambda(A)=\delta(\overline{co}\,A,A)$ называется мерой невыпуклости множества A (см. [4]). Величина $r(A)=\inf\limits_{x\in X}\sup\limits_{y\in A}\|x-y\|$ называется чебышевским радиусом множества A (см., например, [5, стр.178]). Если существует наименьший шар в X, содержащий A, то его радиус равен $r(A)$. Через $B(x,r)$ обозначаем замкнутый шар в X с центром в точке $x\in X$ и радиусом $r\geq 0$, через $Fix\,f$ обозначаем множество неподвижных точек отображения f, $d(A)$ – диаметр множества A.

ТЕОРЕМА. Пусть A непустое ограниченное замкнутое подмножество гильбертова пространства H, $f:\overline{co}\,A \longrightarrow H$ нерастягивающее отображение и $f(\partial A)\subset A$. Тогда $\delta(Fix\,f,A)\leq 2^{-\frac{1}{2}}d(A)$, и эта оценка точная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме I из [2] множество $Fix\,f\neq\emptyset$. Так как $Fix\,f\subset\overline{co}\,A$, $\delta(Fix\,f,A)\leq\lambda(A)$. Далее, можно показать, что в гильбертовом пространстве справедливо неравенство $\lambda(A)\leq r(A)$. Но по теореме Раутледжа [6] $r(A)\leq 2^{-\frac{1}{2}}d(A)$. Следовательно, $\delta(Fix\,f,A)\leq 2^{-\frac{1}{2}}d(A)$. Покажем, что эта оценка точная, то есть найдутся ограниченное замкнутое множество A из H и нерастягивающее отображение $f:\overline{co}\,A\longrightarrow H$, $f(\partial A)\subset A$ такие, что $\delta(Fix\,f,A)=2^{-\frac{1}{2}}d(A)$.

В качестве A возьмем ортонормированную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ из H (H считаем бесконечномерным). Тогда всякий элемент X из $\overline{co}\,A$ представим в виде ряда $x=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n,\ \lambda_n\geqslant 0, \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=1$. Определим нерастягивающее отображение $f:\overline{co}\,A\longrightarrow H$ следующим образом: $f(X)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n X_{n+1}$, где $X=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n X_n, \lambda_n\geqslant 0, \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=1$. Тогда $f(A)\subset A$, $\operatorname{Fix} f=\{0\}$ и легко убедиться, что $\delta(\operatorname{Fix} f, A)=2^{-\frac{1}{2}}d(A)$. Теорема доказана.

По-видимому, представляет интерес более простое доказательство теоремы Раутледжа [6], которая утверждает, что для всякого ограниченного подмножества A гильбертова пространства H существует единственный наименьший шар в H, содержащий A, и его радиус $r(A)\leqslant 2^{-\frac{1}{2}}d(A)$, причем эта оценка точная. Приводимое нами доказательство не использует известной теоремы Юнга (см., например, [3, стр.28–30]).

Как заметил Кли [6], существование и единственность наименьшего шара в H, содержащего данное множество $A\subset H$, есть простое следствие равномерной выпуклости гильбертова пространства.

Далее, не теряя в общности, можно считать, что шар $B(0,1)$ является наименьшим шаром в H, содержащим множество A. Докажем, что $d(A)\geqslant\sqrt{2}$. Допустим, что это не так. Следовательно найдется число $\varepsilon_0>0$ такое, что $d(A)\leqslant\sqrt{2}-\varepsilon_0$. Отметим, что $d(A)$ не может быть меньше 1. Иначе найдется шар $B(X_1,1),\ X_1\neq 0$, содержащий множество A, что противоречит единственности наименьшего шара в H.

Рассмотрим сначала случай, когда в A имеется элемент X_0 такой, что $\|X_0\|=1$. Тогда A содержится в шаре $B(X_0,\sqrt{2}-\varepsilon_0)$. Следовательно $A\subset B(0,1)\cap B(X_0,\sqrt{2}-\varepsilon_0)=A_1$. Покажем, что множество A_1 содержится в шаре $B(\lambda_0 X_0,\sqrt{1-\lambda_0^2})$, где $\lambda_0=1-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-\varepsilon_0)^2\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$. Действительно, для всякого X из A_1 имеем $\|X-\lambda_0X_0\|^2=\|X\|^2-2\lambda_0(X,X_0)+\lambda_0^2\leqslant\|X\|^2+\lambda_0\left[(\sqrt{2}-\varepsilon_0)^2-\|X\|^2-1\right]+\lambda_0^2$, здесь мы воспользовались тем, что $-2(X,X_0)=\|X-X_0\|^2-\|X\|^2-1\leqslant(\sqrt{2}-\varepsilon_0)^2-\|X\|^2-1$. Далее,

$$\|X\|^2+\lambda_0\left[(\sqrt{2}-\varepsilon_0)^2-\|X\|^2-1\right]+\lambda_0^2=\|X\|^2+\lambda_0\left[2(1-\lambda_0)-\|X\|^2-1\right]+\lambda_0^2=$$

$$=(1-\lambda_0)\|X\|^2+2\lambda_0(1-\lambda_0)-\lambda_0+\lambda_0^2=(1-\lambda_0)\|X\|+\lambda_0-\lambda_0^2\leqslant 1-\lambda_0+\lambda_0-\lambda_0^2=1-\lambda_0^2.$$

Таким образом $A\subset A_1\subset B(\lambda_0X_0,\sqrt{1-\lambda_0^2})$.

Теперь рассмотрим случай, когда $A \cap \partial B(0,1) = \emptyset$. Тогда, так как $B(0,1)$ наименьший шар в H, содержащий A, для всякого $\varepsilon \in (0,1)$ найдется элемент $x_\varepsilon \in A$ такой, что $1-\varepsilon \leqslant \|x_\varepsilon\| < 1$. Но по предположению $1 \leqslant d(A) \leqslant \sqrt{2} - \varepsilon_0$, поэтому $A \subset B(x_\varepsilon, \sqrt{2} - \varepsilon_0)$ для всякого $\varepsilon \in (0,1)$. Тем более A лежит в шаре $B(\frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}, \sqrt{2} - \varepsilon_0 + 1 - \|x_\varepsilon\|)$, $\varepsilon \in (0,1)$. При $\varepsilon = \nu = \frac{\varepsilon_0}{2}$ имеем $\sqrt{2} - \varepsilon_0 + 1 - \|x_\nu\| \leqslant \sqrt{2} - \frac{\varepsilon_0}{2}$, поэтому $A \subset B(0,1) \cap B(\frac{x_\nu}{\|x_\nu\|}, \sqrt{2} - \frac{\varepsilon_0}{2})$. Тогда, точно так же, как это было сделано раньше, доказывается, что $A \subset B(\lambda_1 \frac{x_\nu}{\|x_\nu\|}, \sqrt{1-\lambda_1^2})$, где $\lambda_1 = 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \frac{\varepsilon_0}{2})^2 \in (0, \frac{1}{2}]$.

Таким образом, если $d(A) \leqslant \sqrt{2} - \varepsilon_0$, $0 < \varepsilon_0 \leqslant \sqrt{2} - 1$, то $\tau(A) \leqslant \sqrt{1-\lambda_1^2} < 1$. Получили противоречие. Следовательно, $d(A) \geqslant \sqrt{2}$.

В завершение доказательства отметим, что если в качестве множества A взять ортонормированную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in H$ (H бесконечномерно), то будет выполняться равенство: $\tau(A) = 2^{-\frac{1}{2}} d(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если в формулировке теоремы множество A содержится в конечномерном (сдвинутом) подпространстве H_1 и $\dim H_1 = n$, то по теореме Юнга получаем оценку: $\delta(\mathrm{Fix}\, f, A) \leqslant \sqrt{\frac{n}{2n+2}}\, d(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В доказательстве теоремы отмечалось, что для ограниченного множества A из H справедливо неравенство $\lambda(A) \leqslant \tau(A)$. Можно доказать следующее утверждение:

для линейного нормированного пространства X эквивалентны условия:

I) X есть гильбертово пространство или X двумерно;

2) $\lambda(A) \leqslant \tau(A)$ для всякого ограниченного множества $A \subset X$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Нетрудно доказать также следующее утверждение: пусть X строго выпуклое линейное нормированное пространство, A компакт в X, $F = \{f_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ произвольное семейство нерастягивающих отображений, $f_\alpha : \overline{co}\, A \to X$, $f_\alpha(A) \subset A$ для всех $\alpha \in \Omega$ и пусть все отображения из F коммутируют на множестве A. Тогда $\bigcap_{\alpha \in \Omega} \mathrm{Fix}\, f_\alpha \neq \emptyset$.

Применяя нашу теорему и замечания I,2, можно получить следующие оценки:

а) если $X = H$, то $\delta(\bigcap_{\alpha\in\Omega} \operatorname{Fix} f_\alpha, A) \leq 2^{-\frac{1}{2}} d(A)$,

в) если $X = R^n$, то $\delta(\bigcap_{\alpha\in\Omega} \operatorname{Fix} f_\alpha, A) \leq \sqrt{\frac{n}{2n+2}}\, d(A)$,

с) если $X = M^2$ (двумерное нормированное пространство), то $\delta(\bigcap_{\alpha\in\Omega} \operatorname{Fix} f_\alpha, A) \leq \frac{2}{3} d(A)$.

Добавим, что в с) мы воспользовались неравенством $r(A) \leq \frac{2}{3} d(A)$, если $A \subset M^2$ (см. [I, стр.92]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Наше доказательство теоремы Раутледжа автоматически переносится на случай комплексного гильбертова пространства.

Литература

1. Б у р а г о Ю.Д., З а л г а л л е р В.А. Геометрические неравенства. Л., 1980.
2. Г у л е в и ч Н.М. О существовании неподвижных точек нерастягивающих отображений, удовлетворяющих условию Роте.- В наст.сб.
3. Д а н ц е р Л., Г р ю н б а у м Б., К л и В. Теорема Хелли. М., 1968.
4. E i s e n f e l d J., L a k s h m i k a n t h a m V. On a measure of nonconvexity and applications. - Yokohama Math., J., 1976, v.24, N 1-2, p.133-140.
5. H o l m e s R.B. A course on optimization and best approximation. Lecture Notes in Math., v.257, Springer-Verlag,1972.
6. R o u t l e d g e N.A. A result in Hilbert space. - Quart. J.Math.,Oxford Second Series. 1952, v.3, N 9, p.12-18. (см.также реферат на эту статью: Кли В. - Math.Rev.1952, v.13, N 7, p.661.
7. S i n g e r I. Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces. - Grundlehren math.Wissen, B.171. Springer-Verlag, 1970.

Gulevič N.M. An estimation of deviation of fixed points from a nonconvex set.

In this notes the estimation $\delta(\operatorname{Fix} f, A) \leq 2^{-\frac{1}{2}} d(A)$ is given, where A is an nonvoid closed bounded nonconvex set in a Hilbert space H, $f: \overline{co}\, A \longrightarrow H$ is a nonexpansive mapping and $f(\partial A) \subset A$, $\delta(\operatorname{Fix} f, A)$ is the deviation of the fixed point set of a mapping f from the set A, $d(A)$ is the diameter of the set A, ∂A is the boundary of the set A in H.