С. А. Пиунихин, Аналитическое выражение для размерности пространства конформных блоков в модели Весса–Зумино, *Функц. анализ и его прил.*, 1993, том 27, выпуск 4, 32–39

Функциональный анализ и его приложения
1993, т. 27, вып. 4, с. 32–39

УДК 517.986+515.14

Аналитическое выражение для размерности пространства конформных блоков в модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена с калибровочной группой $SU(2)$

© 1993. С. А. Пиунихин

§1. Введение

В 1988 г. Эрик Верлинде в своей знаменитой работе [1] получил выражение для размерности пространства конформных блоков V_g на римановой поверхности рода g через матрицу S действия модулярного преобразования $\tau \to -1/\tau$ на конформные блоки в роде один:

$$\dim(V_g) = \sum_{n=0}^{N-1} |S_{0n}|^{2-2g}, \tag{1.1}$$

где N — число примарных полей в данной конформной теории поля, а (S_{ij}) есть $N \times N$-матрица действия модулярного преобразования $\tau \to -1/\tau$ в N-мерном пространстве V_1, базисом которого являются эти примарные поля $\{\Phi_n\}$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Формула (1.1) получила в физической литературе название формулы Верлинде.

Сам Верлинде указал свою формулу в качестве гипотезы, в предположении, что матрица (S_{ij}) модулярного преобразования диагонализует «правила слияния» [1–3] данной теории. Для моделей Весса–Зумино–Новикова–Виттена (WZNW-моделей) [4, 5] эта гипотеза Верлинде была доказана Виттеном [6] с помощью полиномов зацеплений [7–9], обобщающих полином Джонса [10]. В общем случае гипотеза Верлинде была доказана Муром и Зайбергом [11–13] методами теории тензорных категорий [14, 15].

Существует другое, алгебро-геометрическое определение пространства конформных блоков [16]. Для WZNW-моделей пространство конформных блоков определяется как пространство сечений некоторого линейного расслоения на пространстве модулей плоских G-связностей на римановой поверхности рода g [2, 17–20], где G — калибровочная группа в WZNW-модели. Задача алгебро-геометрического доказательства формулы Верлинде является более сложной, чем задача, решенная Муром и Зайбергом, которые использовали комбинаторное определение пространства конформных блоков. Эта задача была решена независимо Д. Цагиром, Р. Боттом, А. Сенешем, А. Бертрамом и М. Таддеушем [17–20]. В настоящей работе мы будем пользоваться лишь комбинаторным определением.

Задача, рассматриваемая в настоящей работе, — получить аналитическое выражение для размерности пространства конформных блоков, используя сумму (1.1), возникающую в формуле Верлинде. В модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена (такая модель однозначно строится по простой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и положительному целому числу k) примарные поля $\{\Phi_n\}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми интегрируемыми представлениями $\{W_n\}$ алгебры Каца-Муди $\hat{\mathfrak{g}}$ [21–23] с центральным зарядом (*уровнем*) k. Матрица (S_{ij}) модулярного преобразования $\tau \to -1/\tau$ есть в этом случае матрица соответствующего модулярного преобразования, действующая на характерах представлений алгебры Каца-Муди $\hat{\mathfrak{g}}$ [21, 24–26]. Матричные элементы этой матрицы явно вычислены в [21, 24]. В случае $\mathfrak{g} = SU(2)$ ответ следующий:

$$S_{ij} = \sqrt{\frac{2}{k+2}}\,\sin\frac{(i+1)(j+1)\pi}{k+2}, \tag{1.2}$$

где $i, j = 0, 1, \dots, k$ — удвоенные старшие веса интегрируемых представлений алгебры $\widehat{SU(2)}$.

Среди примарных полей $\{\Phi_n\}$ существует одно выделенное примарное поле Φ_0 — *вакуум.* В WZNW-модели вакууму соответствует (единственное) одномерное представление алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}$ уровня k. Для матричных элементов $\{S_{0n}\}$ матрицы модулярного преобразования существует более простое выражение через *квантовую размерность* [21, 23–25, 27]:

$$S_{0n}/S_{00} = D_q(n), \tag{1.3}$$

где $D_q(n) = \mathrm{tr}_{V_n}(q^\rho)$, $q = e^{2\pi i/(k+c(\mathfrak{g}))}$, $c(\mathfrak{g})$ — дуальное число Кокстера алгебры Ли $\mathfrak{g}$ [21] (или собственное значение квадратичного оператора Казимира алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в присоединенном представлении), $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_+}\alpha$ — полусумма положительных корней в $\mathfrak{g}$, а след берется в пространстве V_n неприводимого представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$, полученного из W_n действием подалгебры $\mathfrak{g} \subset \hat{\mathfrak{g}}$ на старший вектор в W_n. Число $D_q(n)$ называется *квантовой размерностью* неприводимого представления V_n и имеет приложение в теории представлений квантовых групп [28] в корнях из единицы [29–31]. Оказывается [4, 21, 22, 25, 27], что квантовые размерности являются рациональными функциями переменной q, т.е. тригонометрическими функциями переменной k (уровня). Таким образом, задача сводится к вычислению тригонометрической суммы (1.1) как аналитического выражения от уровня k и от рода g римановой поверхности (при фиксированной калибровочной группе). В настоящей работе такое выражение получено для калибровочной группы $SU(2)$, где формула Верлинде принимает следующий вид:

$$\dim_{V_g}(\mathrm{WZNW}\,;\,SU(2)\,;\,k) = \left(\frac{k+2}{2}\right)^{g-1}\sum_{n=0}^{k}\sin^{2-2g}\left(\frac{(n+1)\pi}{k+2}\right). \tag{1.4}$$

Работа построена следующим образом:

В §2 дано комбинаторное описание пространства конформных блоков.

В §3 получено аналитическое выражение $(j_1+1)(k-j_2+1)$ для размерности пространства конформных блоков на торе с двумя внешними полями спинов $j_1/2$ и $j_2/2$, где $j_1 \leqslant j_2$, а также с помощью этого выражения доказана целочисленность тригонометрической суммы (1.4).

В §4 получено аналитическое выражение для производящей функции

$$D(t) = \sum_{g=0}^{\infty} t^g \dim[V_g(\mathrm{WZNW}, SU(2), k)]$$

размерностей пространств V_g $(g = 0, 1, \dots)$ конформных блоков:

$$D(t) = 1 + (k+1)t + (k+2)t^2 \left[\frac{1}{t(k+2)^2} - \frac{P'_{k+2}(z)}{1 - P_{k+2}(z)} \right], \tag{1.5}$$

где $z = 1 - t(k+2)$ и $P_{k+2}(z) = \cos((k+2)\arccos(z))$ — полином Чебышёва.

§2. Комбинаторное описание пространства конформных блоков

Пусть $\Gamma(g, n)$ — некоторый тривалентный граф, такой, что:

a) Γ имеет N внешних ребер, т.е. его граница состоит из N точек;

b) Γ есть g-петлевой граф, т.е. $H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^g$.

Для каждого натурального числа k существует $k+1$ различных неприводимых интегрируемых представлений алгебры Ли $SU(2)$ уровня k. Эти представления нумеруются своими старшими весами из множества $\{0, 1/2, 1, \dots, k/2\}$. Старший вес неприводимого интегрируемого представления алгебры Каца–Муди $\widehat{SU(2)}$ мы будем называть *спином* этого представления. Пусть даны N спинов (т.е. полуцелых чисел от 0 до $k/2$) $n_0/2, \dots, n_{N-1}/2$, и пусть Γ — плоский тривалентный g-петлевой граф с N свободными концами.

Определение. *Раскраской* графа Γ будет называться произвольное отображение $f\colon \{\text{ребра } \Gamma\} \to \{0, 1, \dots, k\}$, принимающее значения $n_0, \dots, n_{N-1}$ на N внешних ребрах графа Γ.

Определение. Раскраска графа Γ называется *допустимой*, если для каждой вершины V графа Γ выполняются *условия Клебша–Гордана*:

$$|f(c_1) - f(c_2)| \leqslant f(c_3) \leqslant f(c_1) + f(c_2), \qquad f(c_1) + f(c_2) + f(c_3) \in 2\mathbb{Z}, \tag{2.1}$$

и условие

$$f(c_1) + f(c_2) + f(c_3) \leqslant 2k, \tag{2.2}$$

где c_1, c_2, c_3 — ребра графа Γ, примыкающие к вершине V (два из этих трех ребер могут совпадать, т.е. образовывать петлю).

Определение. Комплексное линейное пространство $V_{g,N}(k; n_0, \dots, n_{N-1})$, порожденное допустимыми раскрасками графа Γ, будет называться *пространством конформных блоков на римановой поверхности рода g с N внешними полями спинов $n_0/2, \dots, n_{N-1}/2$*.

Можно показать [1, 3, 13], используя *ассоциативность* алгебры Верлинде, что размерность пространства конформных блоков не зависит от выбора графа Γ. В случае $N = 0$ размерность пространства $V_{g,0}(k)$ дается формулой

Верлинде (1.4). В случае наличия внешних полей формула Верлинде (1.1) была обобщена в [13]:

$$\dim(V_{g,N}(k\,;\,n_0,\ldots,n_{N-1})) = \sum_{j=0}^{k/2} S_{jn_0}\ldots S_{jn_{N-1}}(S_{0j})^{2-2g-N}, \tag{2.3}$$

где матричные элементы S_{ij} даются формулой (1.2).

Факт целочисленности тригонометрических сумм (1.4) и (2.3) очень важен. Он следует из *гипотезы Верлинде*, заключающейся в том, что матрица $S = (S_{ij})$ диагонализует матрицы $\{N_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, k$, *правил слияния* в *алгебре Верлинде* [1]:

$$(N_i)_{pj} = \sum_{l,s=0}^{k} S_{pl}(\Lambda_i)_{ls}\cdot(S^{-1})_{sj}, \tag{2.4}$$

где $((\Lambda_i)_{ls}) = (\delta^l_s\cdot(S_{il}/S_{i0}))$ есть диагональная матрица,

$$(N_i)_{pj} = \begin{cases} 1, & \text{если } |i-j|\leqslant p\leqslant i+j,\ i+j+p\in 2\mathbb{Z},\ i+j+p\leqslant 2k, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2.5}$$

Идея доказательства целочисленности правой части формулы (1.4) основана на двух следующих формулах:

$$\dim(V_{g,0}(k)) = \mathrm{Tr}\left[\sum_{i=0}^{k}(N_i)^2\right]^{g-1} \tag{2.6}$$

и

$$\left(\sum_{i=0}^{k}(N_i)^2\right)_{j_2j_1} = \sum_{l,s=0}^{k} S_{j_2l}(\delta^l_s(S_{l0})^{-2})(S^{-1})_{sj_1}. \tag{2.7}$$

§3. Аналитическое выражение для $\dim(V_{1,2}(k, j_1, j_2))$

Для вычисления $\dim(V_{1,2}(k, j_1, j_2))$ мы используем граф $\Gamma(1,2)$, изображенный на рис. 1.

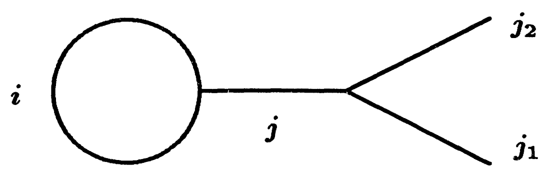

Рис. 1

Согласно определению чисел $\dim V_{1,2}(k, j_1, j_2)$, рассматриваемых как элементы матрицы $\dim V_{1,2}(k, *, *)$ с индексами j_1 и j_2, обозначенными звездочками, мы имеем

$$\dim(V_{g,0}(k)) = \mathrm{Tr}[\dim(V_{1,2}(k, *, *))]^{g-1}, \tag{3.1}$$

а также

$$\dim(V_{1,2}(k, j)) = \sum_{i=j}^{k-j} (N_i)_{ji} = k + 1 - j, \quad \text{если } j \in 2\mathbb{Z} \text{ и } j \leqslant k, \tag{3.2}$$

и $\dim(V_{1,2}(k, j)) = 0$ в противном случае.

Затем, используя (3.1) и (3.2), мы получаем

$$\dim(V_{1,2}(k, j_1, j_2)) = 0, \quad \text{если } j_1 + j_2 \in 2\mathbb{Z}\,;$$

$$\dim(V_{1,2}(k, j_1, j_2)) = \sum_{j=|j_2-j_1|}^{j_1+j_2} (k - j + 1), \quad \text{если } j_1 + j_2 \leqslant k \tag{3.3}$$

и

$$\dim(V_{1,2}(k, j_1, j_2)) = \sum_{j=|(k-j_1)-(k-j_2)|}^{(k-j_2)+(k-j_1)} (k - j + 1), \quad \text{если } j_1 + j_2 \geqslant k \tag{3.4}$$

(последнее условие эквивалентно неравенству $(k - j_1) + (k - j_2) \leqslant k$).

Пусть $j_1 \leqslant j_2$, $j_1 + j_2 \leqslant k$. Тогда (3.3) может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned} \sum_{j=j_2-j_1}^{j_1+j_2} (k - j + 1) &= (k+1)(j_1+1) - \sum_{j=j_2-j_1}^{j_1+j_2} j \\ &= (j_1+1)(k+1) - j_2(j_1+1) \\ &= (j_1+1)(k - j_2 + 1)\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Правая часть равенства (3.4) может быть преобразована таким же способом, как и правая часть (3.3), если мы заменим j_1 на $(k - j_2)$ и j_2 на $(k - j_1)$ во всех формулах. В этом случае мы получим (если $j_1 + j_2 \in 2\mathbb{Z}$ и $j_1 + j_2 \geqslant k$), что

$$\dim(V_{1,2}(k, j_1, j_2)) = (k - j_2 + 1)(k - (k - j_1) + 1) = (j_1 + 1)(k - j_2 + 1), \tag{3.6}$$

а это совпадает с выражением (3.5) при $j_1 + j_2 \leqslant k$.

Таким образом мы вычислили матричные элементы:

$$\dim(V_{1,2}(k, *, *))_{j_1 j_2} = \begin{cases} (\min(j_1\,;\, j_2) + 1)(k - \max(j_1\,;\, j_2) + 1), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } j_1 + j_2 \in 2\mathbb{Z}, \\ 0, \qquad\qquad\qquad \text{если } j_1 + j_2 \notin 2\mathbb{Z}\,. \end{cases} \tag{3.7}$$

Собственные значения этой $(k+1) \times (k+1)$-матрицы вычислил Э. Верлинде [1]: $\lambda^{(j)} = (S_{0j})^{-2}$ $(j \in \{0, 1, \ldots, k\})$, не зная самой матрицы.

Обозначив элементы этой $(k+1)\times(k+1)$-матрицы через $A_{j_1 j_2}$, мы можем записать (2.6) в виде

$$\dim(V_{g,0}(k)) = \mathrm{Tr}(A^{g-1}). \tag{3.8}$$

Выражение (3.8) позволяет увидеть, что $\dim(V_{g,0}(k))$ как функция от k может быть аналитически продолжена с натуральных значений k на всю комплексную плоскость и является полиномом степени $3g-3$ по k. Этот факт был также независимо получен в [2, 17–20] другими методами. Явного же выражения для полинома $\dim(V_{g,0}(k))$ до сих пор известно не было.

§4. Аналитическое выражение для $\dim(V_{g,0}(k))$

Прямыми вычислениями по формулам (3.7), (3.8) можно показать что

$$\dim(V_{2,0}(k)) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}, \tag{4.1}$$

и

$$\dim(V_{3,0}(k)) = \frac{1}{5}\,\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}\left[\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}+2\right], \tag{4.2}$$

но формулы (3.7) и (3.8) не дают аналитического выражения для $\dim(V_{g,0}(k))$ для произвольного рода g. Оказывается, формула (1.4) более полезна для этой цели.

Теорема 1. *Если $g \geqslant 2$, то*

$$\sum_{g=2}^{\infty} t^g \dim(V_{g,0}(k)) = t^2(k+2)\left[\frac{1}{t(k+2)} - \frac{P'_{k+2}(z)}{1-P_{k+2}(z)}\right], \tag{4.3}$$

где $z = 1 - t(k+2)$ и $P_{k+2}(z) = \cos((k+2)\arccos(z))$ — полином Чебышёва.

Доказательство. Согласно формуле (1.4),

$$\begin{aligned}
\sum_{g=2}^{\infty} t^g \dim(V_{g,0}(k)) &= t\sum_{s=1}^{k+1}\sum_{g=2}^{\infty} t^g \left(\frac{k+2}{2}\right)^{g-1}\left(\sin^{-2}\left(\frac{\pi s}{k+2}\right)\right)^{g-1} \\
&= t\sum_{s=1}^{k+1} \frac{\frac{1}{2}t(k+2)\sin^{-2}(\pi s/(k+2))}{1-\frac{1}{2}t(k+2)\sin^{-2}(\pi s/(k+2))} \\
&= t^2(k+2)\sum_{s=1}^{k+1}\frac{1}{2\sin^2(\pi s/(k+2)) - t(k+2)} \\
&= t^2(k+2)\sum_{s=1}^{k+1}\frac{1}{1-t(k+2)-\cos(2\pi s/(k+2))} \\
&= t^2(k+2)\sum_{s=0}^{k+1}\frac{1}{z-\cos(2\pi s/(k+2))} - \frac{1}{z-1}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Так как полином $1 - P_{k+2}(z) = 1 - \cos((k+2)\arccos(z))$ имеет нули в точках $\{\cos(2\pi s/(k+2))\}$ $(s = 0, 1, \ldots, k+1)$ и только в этих точках, то

$$\sum_{s=0}^{k+1} \frac{1}{z - \cos(2\pi s/(k+2))} = \frac{d(1 - P_{k+2}(z))/dz}{1 - P_{k+2}(z)}\,. \tag{4.5}$$

Из формул (4.4) и (4.5) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{g=2}^{\infty} t^g \dim(V_{g,0}(k)) &= t^2(k+2)\left[\frac{d(1 - P_{k+2}(z))/dz}{1 - P_{k+2}(z)} - \frac{1}{z-1}\right] \\ &= t^2(k+2)\left[-\frac{P'_{k+2}(z)}{1 - P_{k+2}(z)} + \frac{1}{t(k+2)}\right], \end{aligned}$$

что совпадает с выражением (4.3). Теорема доказана. □

Замечание. Выражение $[1/t(k+2)^2 - P'_{k+2}(z)/(1 - P_{k+2}(z))]$, где $z = 1 - t(k+2)$, голоморфно в точке $t = 0$, так как выражение $P'_{k+2}(z)/(1 - P_{k+2}(z))$ имеет в точке $t = 0$ полюс первого порядка с вычетом $1/(k+2)$.

Было бы очень интересно получить аналитическое выражение для $\dim_V(V_{g,0}(\mathrm{WZNW}, SU(N), k))$ как функцию трех переменных — рода g, уровня k и ранга $N-1$ группы Ли $SU(N) = A_{N-1}$ и найти ее аналитические свойства как функции от N. Аналогичный вопрос возникает и для других серий B_N, C_N и D_N классических простых алгебр Ли.

В заключение автор хотел бы выразить благодарность С. П. Новикову, Д. Цагиру, Б. Л. Фейгину, Я. Г. Синаю, К. Т. Ле Ты и В. А. Садову за плодотворные дискуссии.

Литература

1. *Verlinde E.* Fusion rules and modular transformations in $2D$ conformal field theory // Nuclear Phys. B. – 1988. – V. 300 [FS22]. – P. 360–376.
2. *Witten E.* On quantum gauge theories in two dimensions // Comm. Math. Phys. – 1991. – V. 141. – P. 153–209.
3. *Dijkgraaf R., Verlinde E.* Modular invariance and fusion algebra // Nuclear Phys. B Proc. Suppl. – 1988. – V. 5. – P. 87–97.
4. *Новиков С. П.* Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // УМН. – 1982. – Т. 37, вып. 5. – С. 3–49.
5. *Witten E.* Non-abelian bosonization in two dimensions // Comm. Math. Phys. – 1984. – V. 121, No. 3. – P. 455.
6. *Witten E.* Quantum field theory and Jones polynomial // Comm. Math. Phys. – 1989. – V. 121, No. 3. – P. 351–399.
7. *Reshetikhin N. Yu.* Quantized universal enveloping algebras, the Yang–Baxter equation and invariants of links. I. – Preprint/LOMI. – E-4-87.
8. *Reshetikhin N. Yu.* Quantized universal enveloping algebras, the Yang-Baxter equation and invariants of links. II. – Preprint/LOMI. – E-4-87.
9. *Kirillov A. N. and Reshetikhin N. Yu.* Representations of algebra $U_q(Sl(2,\mathbb{C}))$, q-orthogonal polynomials and invariants of links // Infinite-dimensional Lie algebras and groups. – World Scientific, 1988, P. 285–342.
10. *Jones V. F. R.* A polynomial invariant for links via von Neumann algebras // Bull. Amer. Math. Soc. – 1985. – V. 12. – P. 103–110.

11. *Moore G., Seiberg N.* Polynomial equations for rational conformal field theories // Phys. Lett. B. – 1988. – V. 212. – P. 451.
12. *Moore G., Seiberg N.* Naturally in conformal field theory // Nuclear Phys. B. – 1989. – V. 313. – P. 16.
13. *Moore G., Seiberg N.* Classical and quantum conformal field theory // Comm. Math. Phys. – 1989. – V. 123. – P. 177–254.
14. *Делинь П., Милн Дж.* Категории Танаки. Ходжевы циклы и мотивы. – М.: Мир, 1985.
15. *Mac Lane S.* Categories for working mathematician. – N.Y.: Springer, 1971.
16. *Friedan D., Shenker S.* The analytic geometry of two-dimensional conformal field theory // Nuclear Phys. B. – 1987. – V. 281. – P. 509–545.
17. *Szenes A.* Hilbert polynomials of moduli spaces of rank 2 vector bundles, I. – Preprint. – Harvard.
18. *Bertram A., Szenes A.* Hilbert polynomials of moduli spaces of rank 2 vector bundles, II. – Preprint. – Harvard.
19. *Thaddeus M.* Conformal field theory and the cohomology of the moduli space of stable bundles. – Preprint. – Oxford.
20. *Zagier D.* Letter to R. Bott. – 1991.
21. *Kac V. G.* Infinite-dimensional Lie algebras. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.
22. *Kac V. G., Peterson D.* Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms // Adv. in Math. – 1984. – V. 53. – P. 125–264.
23. *Gepner D., Witten E.* String theory on Group manifolds // Nuclear Phys. B. – 1986. – V. 278. – P. 493–549.
24. *Kac V. G., Wakimoto M.* Modular and conformal invariance constraints in representation theory of affine algebras // Adv. Math. – 1988. – V. 40, No. 1. – P. 156–236.
25. *Tsuchia A., Kanie Y.* Vertex operators in conformal field theory on P^1 and monodromy representations of braid group // Adv. Stud. Pure Math. – 1988. – V. 16. – P. 297–372.
26. *Alvarez-Gaume L., Sierra G., Gomez C.* Duality and quantum groups // Nuclear Phys. B. – 1990. – V. 330. – P. 347–398.
27. *Alvarez-Gaume L., Sierra G., Gomez C.* Topics in conformal field theory // Physics and Mathematics of String, Memorial volume for Vadim Knizhnik, World Scientific. – 1990. – P. 16–184.
28. *Rosso M.* Finite-dimensional representations of the quantum analog of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra // Comm. Math. Phys. – 1988. – V. 117. – P. 581–593.
29. *Keller G.* Fusion Rules of $U_q(Sl(2,\mathbb{C}))$, $q^m = 1$ // Lett. Math. Phys. – 1991. – V. 21. – P. 273–286.
30. *Concini G. De. Kac V. G.* Representation of quantum group at roots of 1 // Progress in Math. – V. 92. – P. 473–506. – Operator algebras, unitary representations, Enveloping algebras and invariant theory. – Birkhauser: Berlin, 1990.
31. *Lusztig G.* Quantum groups at roots of 1 // Geom. Dedicata. – 1990.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
9 сентября 1992 г.