ОБОБЩЕНИЕ АРИФМЕТИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СРЕДНЕГО

В. И. Левин

(Москва)

Один из замечательных фактов анализа состоит в том, что если, исходя из двух положительных чисел x и y $(x < y)$, образовать последовательности

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} y_{n-1}}, \quad y_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1}), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

полагая $x_0 = x$, $y_0 = y$, то эти последовательности имеют общий предел

$$\mu = \frac{\pi}{2} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{x^2 \cos^2 t + y^2 \sin^2 t}} \right\}^{-1}.$$

Число μ называется *арифметико-геометрическим средним* чисел x и y.

Целью настоящей статьи является выяснение того, что можно сказать об итерированных средних общего вида.

1. Пусть даны x и y, $0 < x < y$. Под средним этих величин будем понимать функцию $S(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $S(x, y)$ непрерывна в угле $0 < x < y$.

2) $S(\lambda x, \lambda y) = \lambda S(x, y)$ при любом $\lambda > 0$, т. е. $S(x, y)$ — однородная функция x и y со степенью однородности единица.

3) $S(x, y)$ является возрастающей функцией каждой из переменных при фиксированном значении другой.

4) $x < S(x, y) < y$. Отсюда вытекает, что существует

$$\lim_{y \to x+0} S(x, y) = S(x, x) = x,$$

так что мы будем считать $S(x, y)$ непрерывной в угле $0 < x \leqslant y$.

Если выполняется еще условие

5) $S(x, y) = S(y, x)$, определяющее функцию $S(x, y)$ в угле $0 < y < x$ так, что она будет непрерывна во всем квадранте $0 < x$, $0 < y$, то мы будем называть среднее $S(x, y)$ *симметричным*.

В силу условия 2)

$$S(x, y) = x S\left(1, \frac{y}{x}\right) = x\,\sigma(z),$$

где $z = \frac{y}{x} \geqslant 1$. Функцию $\sigma(z)$ будем называть *приведенным средним*. Она удовлетворяет следующим условиям, являющимся следствиями условий 1), 3) и 4):

1′) $\sigma(z)$ непрерывна на полуоси $z \geqslant 1$, причем $\sigma(1) = 1$.

3′) $\sigma(z)$ и $\frac{z}{\sigma(z)}$ являются возрастающими функциями z.

4′) $1 < \sigma(z) < z$, если $z > 1$. Для приведенного симметричного среднего из условия 5 вытекает условие

5′) $\sigma(z) = z\,\sigma\left(\frac{1}{z}\right)$, определяющее $\sigma(z)$ на интервале $0 < z < 1$ так, что она будет непрерывна на всей полуоси $0 < z$. Действительно,

$$x\,\sigma(z) = x S(1, z) = S(x, y) = S(y, x) = y S\left(1, \frac{x}{y}\right) =$$
$$= y S\left(1, \frac{1}{z}\right) = y\,\sigma\left(\frac{1}{z}\right),$$

откуда

$$\sigma(z) = \frac{y}{x}\,\sigma\left(\frac{1}{z}\right) = z\,\sigma\left(\frac{1}{z}\right).$$

Нетрудно проверить, что всякая функция $\sigma(z)$, удовлетворяющая условиям 1′), 3′) и 4′), является приведенным средним для среднего

$$S(x, y) = x\,\sigma\left(\frac{y}{x}\right)$$

и что если $\sigma(z)$ удовлетворяет еще условию 5′), то $S(x, y)$ является симметричным средним.

Примерами симметричных средних являются средние порядка $r \neq 0$:

$$S_r(x, y) = \left(\frac{x^r + y^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}$$

и геометрическое среднее

$$S_0(x, y) = \sqrt{xy}.$$

Соответствующие приведенные средние имеют вид

$$\sigma_r(z) = \left(\frac{1 + z^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}} \quad \text{и} \quad \sigma_0(z) = \sqrt{z}.$$

Взвешенные средние

$$\overline{S}_r(x, y) = (px^r + qy^r)^{\frac{1}{r}} \quad (r \neq 0),$$

и

$$\overline{S}_0(x, y) = x^p y^q$$

при $p>0$, $q>0$, $p+q=1$ представляют примеры средних, не являющихся симметричными.

2. Пусть даны два средних $S(x, y)$ и $T(x, y)$, удовлетворяющие условию

$$S(x, y)<T(x, y)$$

для всех $0<x<y$. Соответствующие приведенные средние обозначим через $\sigma(z)$ и $\tau(z)$, так что

$$\sigma(z)<\tau(z)$$

для $z>1$. Тогда можно, исходя из двух чисел x и y, $0<x<y$, образовать последовательности

$$x_n=S(x_{n-1}, y_{n-1}), \quad y_n=T(x_{n-1}, y_{n-1}), \qquad n=1, 2, 3, \ldots,$$

полагая $x_0=x$, $y_0=y$. В силу условия 4)

$$x_{n-1}<x_n<y_{n-1}, \quad x_{n-1}<y_n<y_{n-1}$$

и, кроме того,

$$x_n<y_n.$$

Отсюда вытекает, что последовательность $\{x_n\}$ — возрастающая и ограниченная сверху, а последовательность $\{y_n\}$ — убывающая и ограниченная снизу. Следовательно, существуют пределы.

$$\mu'=\lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{и} \quad \mu''=\lim_{n\to\infty} y_n.$$

По непрерывности среднего из $x_n=S(x_{n-1}, y_{n-1})$ следует, что

$$\mu'=S(\mu', \mu'');$$

но так как $S(x, y)$ — монотонная функция y и $\mu'=S(\mu', \mu')$, то мы заключаем, что $\mu''=\mu'$. Итак, последовательности итерированных средних $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют общий предел $\mu=\mu'=\mu''$, который мы назовем *ST-средним* x и y:

$$\mu=ST(x, y).$$

Заметим, что последовательность точек (x_n, y_n) лежит внутри треугольника AMB (см. рис. 1), где M — точка с координатами x, y, а предел этой последовательности — точка (μ, μ) лежит на гипотенузе AB (и отлична от A и от B).

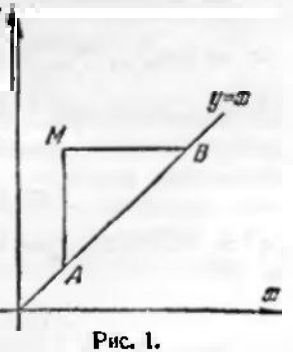

Рис. 1.

Арифметико-геометрическое среднее является S_0S_1-средним.

Исследуем теперь зависимость ST-среднего от x и y. Имеет место следующая

Теорема 1. *ST-среднее является непрерывной функцией x и y.*

Для доказательства заметим, что x_n и y_n как итерации конечного числа непрерывных функций сами являются непрерывными функциями

x и y. Далее, так как $x_n \to \mu$ и $y_n \to \mu$, то, начиная с некоторого номера n, точка (x_n, y_n) будет лежать как угодно близко к отрезку AB, но выше его. Пусть теперь задано произвольное $\varepsilon > 0$. Отметим на отрезке AB точки A' и B', отстоящие от точки (μ, μ) по разные стороны на расстоянии $\varepsilon\sqrt{2}$, и построим треугольник $A'M'B'$, расположенный выше AB и подобный треугольнику AMB (см. рис. 2). Для достаточно большого номера n точка (x_n, y_n) попадет внутрь треугольника $A'M'B'$. Далее, выберем настолько малую окрестность точки (x, y), что для любой точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ из нее точка $(x_n^{(0)}, y_n^{(0)})$ [где $x_n^{(0)} = S(x_{n-1}^{(0)}, y_{n-1}^{(0)})$, $y_n^{(0)} = T(x_{n-1}^{(0)}, y_{n-1}^{(0)})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, причем $x_0^{(0)} = x^{(0)}$, $y_0^{(0)} = y^{(0)}$] также будет лежать внутри треугольника $A'M'B'$ (это возможно в силу непрерывности x_n и y_n как функций x и y). Но тогда ST — среднее чисел $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$:

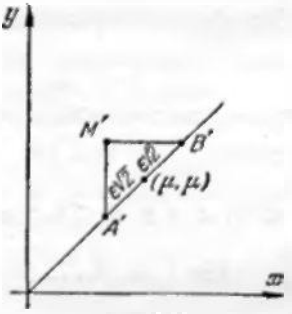

Рис. 2.

$$\mu^{(0)} = ST(x^{(0)}, y^{(0)}) = \lim_{n\to\infty} x_n^{(0)} = \lim_{n\to\infty} y_n^{(0)}$$

будет по предыдущему обладать тем свойством, что точка $(\mu^{(0)}, \mu^{(0)})$ лежит на отрезке $A'B'$, а это означает, что $|\mu - \mu^{(0)}| < \varepsilon$. Тем самым непрерывность $\mu = ST(x, y)$ доказана.

Теорема 2. *При любом* $\lambda > 0$

$$ST(\lambda x, \lambda y) = \lambda ST(x, y).$$

Для доказательства образуем последовательности

$$x'_n = S(x'_{n-1}, y'_{n-1}), \quad y'_n = T(x'_{n-1}, y'_{n-1}), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

полагая $x'_0 = \lambda x$, $y'_0 = \lambda y$. Тогда

$$x'_1 = S(\lambda x, \lambda y) = \lambda S(x, y) = \lambda x_1,$$

$$y'_1 = T(\lambda x, \lambda y) = \lambda T(x, y) = \lambda y_1$$

и т. д. Вообще, $x'_n = \lambda x_n$, откуда и вытекает утверждение теоремы, так как

$$ST(\lambda x, \lambda y) = \lim_{n\to\infty} x'_n.$$

Теорема 3. $ST(x, y)$ *является неубывающей функцией каждой из переменных при фиксированном значении другой.*

Пусть сначала $0 < x < y' < y''$. Тогда, полагая

$$x'_n = S(x'_{n-1}, y'_{n-1}) \quad y'_n = T(x'_{n-1}, y'_{n-1}), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

и $x'_0 = x$, $y'_0 = y'$, а также

$$x''_n = S(x''_{n-1}, y''_{n-1}), \quad y''_n = T(x'_{n-1}, y''_{n-1}), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

и $x''_n = x$, $y''_0 = y''$, последовательно найдем, что

$$x'_1 = S(x, y') < S(x, y'') = x''_1,$$
$$y'_1 = T(x, y') < T(x, y'') = y''_1,$$

и, далее, что

$$x'_2 = S(x'_1, y'_1) < S(x''_1, y'_1) < S(x''_1, y''_1) = x''_2,$$
$$y'_2 = T(x'_1, y'_1) < T(x''_1, y'_1) < T(x''_1, y''_1) = y''_2.$$

Вообще, мы таким образом найдем, что $x'_n < x''_n$, откуда вытекает неравенство

$$ST(x, y') = \lim_{n \to \infty} x'_n \leqslant \lim_{n \to \infty} x''_n = ST(x, y'').$$

Аналогично доказывается, что если $0 < x' < x'' < y$, то

$$ST(x', y) \leqslant ST(x'', y),$$

и теорема доказана.

Чтобы обеспечить строгое возрастание $ST(x, y)$, необходимы еще дополнительные условия.

Теорема 3 бис. *Если существует такая окрестность отрезка AB* (см. рис. 1), *в верхней части которой* $(x < y)$ *средние $S(x, y)$ и $T(x, y)$ удовлетворяют условию*

$$\left.\begin{aligned} S(\xi, y) - S(x, y) &\geqslant p(\xi - x), \\ T(\xi, y) - T(x, y) &\geqslant p(\xi - x) \end{aligned}\right\} 0 < x < \xi < y$$

и

$$\left.\begin{aligned} S(x, \eta) - S(x, y) &\geqslant q(\eta - y), \\ T(x, \eta) - T(x, y) &\geqslant q(\eta - y) \end{aligned}\right\} 0 < x < y < \eta,$$

где p и q — некоторые положительные числа, причем $p + q = 1$, то в треугольнике AMB $ST(x, y)$ является строго возрастающей функцией каждой из переменных при фиксированном значении другой.

Действительно, используя обозначения, введенные при доказательстве теоремы 3, заметим, что, начиная с некоторого номера n, точки (x'_n, y'_n) и (x''_n, y''_n) будут принадлежать верхней части указанной в теореме окрестности отрезка AB (см. начало доказательства теоремы 1), так что

$$\begin{aligned} x''_{n+1} - x'_{n+1} &= S(x''_n, y''_n) - S(x'_n, y'_n) = \\ &= S(x''_n, y''_n) - S(x'_n, y''_n) + S(x'_n, y''_n) - S(x'_n, y_n) \geqslant \\ &\geqslant p(x''_n - x'_n) + q(y''_n - y'_n) \end{aligned}$$

и аналогично

$$y''_{n+1} - y'_{n+1} \geqslant p(x''_n - x'_n) + q(y''_n - y'_n).$$

причем, как видно из доказательства теоремы 3,

$$x''_n - x'_n > 0 \quad \text{и} \quad y''_n - y'_n > 0.$$

Далее,

$$x''_{n+2} - x'_{n+2} = S(x''_{n+1}, y''_{n+1}) - S(x'_{n+1}, y'_{n+1}) =$$
$$= S(x''_{n+1}, y''_{n+1}) - S(x'_{n+1}, y''_{n+1}) + S(x'_{n+1}, y''_{n+1}) - S(x'_{n+1}, y'_{n+1}) \geqslant$$
$$\geqslant p(x''_{n+1} - x'_{n+1}) + q(y''_{n+1} - y'_{n+1}) \geqslant p(x''_n - x'_n) + q(y''_n - y'_n)$$

и аналогично

$$y''_{n+2} - y'_{n+2} \geqslant p(x''_n - x'_n) + q(y''_n - y'_n).$$

Продолжая таким же образом, мы установим, что, вообще, для любого $N > n$

$$x''_N - x'_N \geqslant p(x''_n - x'_n) + q(y''_n - y'_n),$$

откуда и вытекает, что

$$ST(x, y'') - ST(x, y') \geqslant p(x''_n - x'_n) + q(y''_n - y'_n) > 0.$$

Аналогично показывается, что и

$$ST(x'', y'') - ST(x', y) > 0,$$

и теорема доказана.

Теоремы 1, 2 и 3 бис показывают, что при некотором дополнительном условии, сформулированном в последней из них, ST-среднее удовлетворяет условиям 1), 2), 3), налагаемым на среднее. Выполнение ST-средним условия 4) вытекает из того, что точка (μ, μ) лежит между точками A и B (см. рис. 1).

Что касается упомянутого выше дополнительного условия, то оно, в частности, выполняется средними $S_r(x, y)$ и $S_0(x, y)$, а также взвешенными средними $\bar{S}_r(x, y)$ и $\bar{S}_0(x, y)$. Ограничимся проверкой его для среднего $S_r(x, y)$. Очевидно, что достаточно показать выполнение неравенства

$$\frac{\partial S_r}{\partial x} + \frac{\partial S_r}{\partial y} > 1;$$

но это легко усматривается из того, что

$$\frac{\partial S_r}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+z^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}-1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial S_r}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+z^{-r}}{2}\right)^{\frac{1}{r}-1},$$

где $z = \frac{y}{x}$, так как

$$\left(\frac{1+z^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}-1} > z^{\frac{r}{2}\left(\frac{1}{r}-1\right)}, \quad \left(\frac{1+z^{-r}}{2}\right)^{\frac{1}{r}-1} > z^{-\frac{r}{2}\left(\frac{1}{r}-1\right)}$$

а

$$z^{\frac{r}{2}\left(\frac{1}{r}-1\right)}+z^{-\frac{r}{2}\left(\frac{1}{r}-1\right)}>2,$$

причем левая часть как угодно близка к 2, если z достаточно близко к 1.

3. Таким образом, при выполнении дополнительного условия теоремы 3 бис, ST-среднее является некоторым средним:

$$\mu=ST(x,\ y)=U(x,\ y),$$

где $U(x,\ y)$ удовлетворяет условиям 1) — 4). Отметим еще, что если средние $S(x,\ y)$ и $T(x,\ y)$ симметричны, то и $U(x,\ y)$ — симметричное среднее.

Установим теперь еще одно свойство среднего $U(x,\ y)$. Так как

$$\mu=U(x,\ y)=\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} y_n$$

является ST-средним не только чисел x и y, но и чисел $x_1=S(x,\ y)$ и $y_1=T(x,\ y)$, то должно иметь место соотношение

$$U(x,\ y)=U\{S(x,\ y),\ T(x,\ y)\}, \tag{1}$$

являющееся функциональным уравнением для $U(x,\ y)$ при заданных $S(x,\ y)$ и $T(x,\ y)$.

Для арифметико-геометрического среднего

$$S(x,\ y)=S_0(x,\ y)=\sqrt{xy},\quad T(x,\ y)=S_1(x,\ y)=\frac{x+y}{2}$$

и

$$U(x,\ y)=\frac{\pi}{2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{x^2\cos^2 t+y^2\sin^2 t}}\right\}^{-1}.$$

В этом случае полученное функциональное уравнение примет вид

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{x^2\cos^2 t+y^2\sin^2 t}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{xy\cos^2 t+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\sin^2 t}}.$$

Это равенство является следствием гауссова преобразования эллиптических функций и представляет собой весьма сложную формулу анализа.

В рассматриваемое функциональное уравнение (1) входит три средних: $S(x,\ y)$, $T(x,\ y)$, $U(x,\ y)$. Определение отсюда последнего из этих средних по данным первым двум является, вообще говоря, трудной задачей. Более простая задача возникает, если мы зададим $U(x,\ y)$ и одно из средних $S(x,\ y)$ или $T(x,\ y)$.

Преобразуем функциональное уравнение (1) к приведенным средним, которые являются функциями только одной переменной. Обозначая через $\varphi(z)$ приведенное среднее для $U(x, y)$, будем иметь

$$U(x, y) = x\varphi(z), \quad S(x, y) = x\sigma(z), \quad T(x, y) = x\tau(z)$$

и

$$U\{S(x, y), T(x, y)\} = U\{x\sigma(z), x\tau(z)\} = x\sigma(z)\varphi\left\{\frac{\tau(z)}{\sigma(z)}\right\},$$

так что функциональное уравнение (1) примет вид

$$\varphi(z) = \sigma(z)\varphi\left\{\frac{\tau(z)}{\sigma(z)}\right\}. \tag{2}$$

В первую очередь заметим, что функциональному уравнению (2) удовлетворяют функции $\varphi(z) = \sqrt{z}$ (приведенное среднее для геометрического среднего $S_0(x, y) = \sqrt{xy}$),

$$\sigma(z) = \left(\frac{1 + z^{-r}}{2}\right)^{-\frac{1}{r}} \qquad (r \neq 0)$$

(приведенное среднее для $S_{-r}(x, y)$) и

$$\tau(z) = \left(\frac{1 + z^{r}}{2}\right)^{\frac{1}{r}}$$

(приведенное среднее для $S_r(x, y)$), так как в этом случае действительно

$$\varphi(z) = \sqrt{z} = \sqrt{\sigma(z)\tau(z)} = \sigma(z)\varphi\left\{\frac{\tau(z)}{\sigma(z)}\right\}.$$

Отсюда вытекает, что для любого $r \neq 0$

$$S_{-r}S_r(x, y) = S_0(x, y).$$

В частности, представляет некоторый интерес случай $r = 1$. Так как

$$S_{-1}(x, y) = \left(\frac{x^{-1} + y^{-1}}{2}\right)^{-1}$$

является гармоническим средним, то мы находим, что гармонико-арифметическое среднее есть просто геометрическое среднее. Это приводит к быстро сходящимся рациональным приближениям квадратных иррациональностей вида $\sqrt{R}$, где R — свободное от квадратов рациональное число. Представляя R в виде ab, где a и b — рациональные числа, образуем итерированные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, полагая $a_0 = a$, $b_0 = b$ и

$$a_n = \left\{\frac{a_{n-1}^{-1} + b_{n-1}^{-1}}{2}\right\}^{-1}, \quad b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Тогда, по предыдущему,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{R}.$$

Например, при $a_0 = \frac{7}{5}$ и $b_0 = \frac{10}{7}$ получаем, таким образом, следующие рациональные приближения $\sqrt{2}$:

$$a_1 = \frac{140}{99}, \qquad b_1 = \frac{99}{70},$$
$$a_2 = \frac{27720}{19601}, \qquad b_2 = \frac{19601}{13860}$$

и т. д., причем

$$a_2 < \sqrt{2} < b_2$$

и $b_2 - a_2 = \frac{1}{271669860} < 0{,}000000004$.

С помощью функционального уравнения (2) легко также установить, что предел итерированных взвешенных геометрических средних есть вновь взвешенное геометрическое среднее (что можно, впрочем, усмотреть и непосредственно). Действительно, полагая $\sigma(z) = z^{q_1}$, $0 < q_1 < 1$, $\tau(z) = z^{q_2}$, $0 < q_1 < q_2 < 1$ и $\varphi(z) = z^{\alpha}$, из уравнения (2) найдем, что

$$z^{\alpha} = z^{q_1 + \alpha(q_2 - q_1)},$$

т. е. что

$$\alpha = \frac{q_1}{1 - (q_2 - q_1)}.$$

Это означает, что если $x_0 = x$, $y_0 = y$ и

$$x_n = x_{n-1}^{p_1} y_{n-1}^{p_1}, \quad y_n = x_{n-1}^{p_2} y_{n-1}^{q_2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x^{1-\alpha} y^{\alpha}.$$

Аналогично устанавливается, что предел итерированных взвешенных арифметических средних есть также взвешенное арифметическое среднее. Действительно, полагая $\sigma(z) = p_1 + q_1 z$, $p_1 + q_1 = 1$, $\tau(z) = p_2 + q_2 z$, $p_2 + q_2 = 1$, $q_1 < q_2$ и $\varphi(z) = 1 - \alpha + \alpha z$, из уравнения (2) найдем, что

$$1 - \alpha + \alpha z = (p_1 + q_1 z)\left\{1 - \alpha + \alpha \frac{p_1 + q_2 z}{p_1 + q_1 z}\right\},$$

т. е.

$$1 - \alpha + \alpha z = (1 - \alpha)(p_1 + q_1 z) + \alpha(p_2 + q_2 z),$$

или

$$1 - \alpha = p_1(1 - \alpha) + \alpha p_2,$$
$$\alpha = q_1(1 - \alpha) + \alpha q_2,$$

откуда

$$\alpha = \frac{1 - p_1}{1 - (p_1 - p_2)} = \frac{q_1}{1 - (q_2 - q_1)}.$$

Это означает, что если $x_0 = x$, $y_0 = y$ и

$$x_n = p_1 x_{n-1} + q_1 y_{n-1}, \quad y_n = p_2 x_{n-1} + q_2 y_{n-1},$$

то

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = (1 - \alpha) x + \alpha y.$$

Более интересные случаи ST-средних могут быть получены из функционального уравнения (2), если ему придать вид

$$\tau(z) = \sigma(z) \varphi^{-1} \left\{ \frac{\varphi(z)}{\sigma(z)} \right\},$$

и считать приведенные средние $\sigma(z)$ и $\varphi(z)$ заданными.