2000. Т. 36, № 12. С. 1631 — 1635

УДК 517.936

О ПОЛНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Е. К. Макаров

Пусть E и F — вещественные банаховы пространства, $L(E,F)$ — банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из E в F, $U \subset E$ — связное открытое множество, $B_F(0,R) := \{y \in F : \ \|y\| < R\}$. Рассмотрим квазилинейное уравнение в полных производных [1, с. 161]

$$y'h = A(x)hy + f(x,y)h, \quad x \in U, \quad y \in B_F(0,R), \quad h \in E, \tag{1}$$

где коэффициент линейной части задается непрерывным отображением $A : U \to L(E, L(F,F))$, а нелинейное возмущение f определено и непрерывно в произведении $U \times B_F(0,R)$ при некотором $R > 0$, принимает значения в $L(E,F)$ и всюду на области определения удовлетворяет оценке

$$\|f(x,y)\| \le a(x)\|y\|^{1+m}, \tag{2}$$

в которой число $m > 0$ одно и то же для всех $x \in U$ и $y \in B_F(0,R)$, а вещественнозначная функция a определена и конечна при всех $x \in U$.

Замечание 1. Из оценки (2) вытекает, что $y \equiv 0$ является решением уравнения (1).

Будем говорить, что уравнение (1) вполне интегрируемо (вполне разрешимо) на множестве $G \subset U \times B_F(0,R)$, если [1, с. 160; 2, с. 21] для любой пары $(x_0, y_0) \in G$ существует единственное решение y уравнения (1), определенное в некоторой окрестности $W(x_0,y_0) \subset U$ точки x_0 и удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим также линейное уравнение

$$y'h = A(x)hy, \quad x \in U, \quad y \in F, \quad h \in E, \tag{3}$$

традиционно называемое уравнением линейного (первого) приближения [1, с. 162] для квазилинейного уравнения (1). Имеется целый ряд работ (см., например, [1, с. 162; 3 — 7]), в которых изучение уравнений (1) проводится путем сопоставления их с соответствующими уравнениями линейного приближения (3). Этот подход хорошо известен в теории обыкновенных дифференциальных уравнений (т. е. в случае $E = \mathbb{R}$) и является классическим. В указанных же работах установлено, что многие результаты, полученные на его основе для обыкновенных уравнений, в том числе и теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению, имеют близкие аналоги для вполне интегрируемых уравнений в полных производных, причем важнейшим условием наличия такого сходства является выполнение условия полной разрешимости уравнения (3).

В большинстве случаев [1, с. 162; 4, 5, 7] требование полной разрешимости уравнения линейного приближения считается независимым и как таковое вводится в исходные предположения или непосредственно в формулировки доказываемых утверждений. В [6] полная интегрируемость уравнения (3), соответствующего уравнению (1) с голоморфной правой частью, предполагается очевидной. В [3] для многомерного уравнения

$$dy = a_1(x,y)dx_1 + \ldots + a_m(x,y)dx_m, \tag{4}$$

в котором $x = (x_1, \dots, x_m)^{\mathrm{T}} \in E = \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, $y \in F = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, а коэффициенты a_i, $i = \overline{1,m}$, определены и непрерывно дифференцируемы в некоторой области $U \times B_F(0, R) \subset \subset \mathbb{R}^{m+n}$, рассматривается уравнение в вариациях

$$dz = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial a_i}{\partial y}(x, \eta(x)) z\, dx_i \tag{5}$$

относительно произвольного решения η уравнения (4), удовлетворяющего на всей своей области определения $V \subset U$ условию $\eta(x) \in B_F(0, R)$. Нетрудно видеть, что если уравнение (4) может быть представлено в виде (1), (2), то при $\eta \equiv 0$ уравнение (5) является уравнением линейного приближения для него, т.е. совпадает с соответствующим уравнением (3). Случай же $\eta \not\equiv 0$ заменой переменной $\tilde{y} = y - \eta$ в уравнении (4) сводится к предыдущему. Согласно теореме 1 из [3], если существуют и непрерывны все частные производные $\partial^2 a_i / \partial x_r \partial x_s$ и $\partial^2 a_i / \partial x_r \partial y_k$, $i, k = \overline{1, n}$; $r, s = \overline{1, m}$, то выполнение условий теоремы Фробениуса [2, с. 21] для уравнения (4) всюду в области $V \times B_F(0, R)$ влечет за собой их выполнение здесь и для уравнения (5), что эквивалентно полной интегрируемости этого уравнения.

В настоящей работе установлены достаточные условия полной разрешимости уравнения линейного приближения (3), соответствующего вполне разрешимому квазилинейному уравнению (1), для которого не предполагаются выполненными какие-либо инфинитезимальные признаки полной интегрируемости [1, с. 160; 8, с. 357; 9, 10], аналогичные теоремам Фробениуса, Перова и др.

Пусть уравнение (1) вполне разрешимо на некотором подмножестве $G \subset U \times B_F(0, R)$. Каждой паре $(x_0, y_0) \in G$ поставим в соответствие открытое множество

$$H(x_0, y_0) = \operatorname{Int} \bigcap_{\mu \in]0,1]} W(x_0, \mu y_0) \subset U,$$

где Int — оператор взятия внутренности, а окрестность $W(x_0, \mu y_0)$ точки x_0 представляет собой гарантируемую определением полной разрешимости область существования и единственности локального решения задачи Коши для уравнения (1) с начальными данными $y(x_0) = \mu y_0$.

Замечание 2. Хорошо известно [1, с. 25; 2, с. 28; 11], что в общем случае окрестность $W(x_0, y_0)$ может определяться неоднозначно, даже если рассматривать только решения, непродолжимые в каком-либо классе подмножеств пространства E. Разумеется, неоднозначно также и приведенное выше определение множества $H(x_0, y_0)$. Это, однако, не препятствует его использованию в дальнейших построениях, поскольку для их выполнимости достаточно, чтобы окрестности $W(x_0, y_0)$ и определенные на них локальные решения уравнения (1) существовали.

Теорема. *Если для каких-либо $x_0 \in U$, $y_0 \in F$, $y_0 \neq 0$, уравнение (1) вполне разрешимо на множестве $\{x_0\} \times \{\mu y_0 : \mu \in]0, 1]\}$, функция a ограничена в окрестности $V(x_0) \subset U$ точки x_0 и выполнено условие $H(x_0, y_0) \neq \varnothing$, то задача Коши для уравнения (3) с начальным условием $y(x_0) = y_0$ имеет единственное решение y, определенное в некотором шаре $B \subset V(x_0) \cap H(x_0, y_0)$ с центром x_0.*

Доказательство. Поскольку отображение $A : U \to L(E, L(F, F))$ непрерывно на U, существуют такие числа $M \geq 0$ и $\rho > 0$, что для всех $x \in B_E(x_0, \rho)$ выполнено неравенство $\|A(x)\| \leq M$. Без ограничения общности можно считать ρ настолько малым, что $B_E(x_0, \rho) \subset \subset V(x_0) \cap H(x_0, y_0)$, а M настолько большим, что для всех $x \in B_E(x_0, \rho)$ выполнено также неравенство $a(x) \leq M$.

Возьмем любую замкнутую кусочно-гладкую кривую Γ, проходящую через x_0 и полностью содержащуюся в $B_E(x_0, \rho)$. Для этой кривой зафиксируем какую-либо ее кусочно-непрерывно дифференцируемую параметризацию $\gamma : [0, 1] \to E$, удовлетворяющую условию $\gamma(0) = \gamma(1) = = x_0$, и положим $b := \sup\{\|\dot{\gamma}(t)\| : t \in [0, 1]\} < +\infty$.

Из включения $B_E(x_0, \rho) \subset H(x_0, y_0)$ вытекает, что при каждом $\mu \in]0, 1]$ задача Коши для уравнения (1) с начальным условием $y_\mu(x_0) = \mu y_0$ имеет единственное решение y_μ, определенное по крайней мере на $B_E(x_0, \rho)$. Определим функцию u_μ равенством $u_\mu = y_\mu(\gamma(t))$.

Очевидно, она удовлетворяет условию $u_\mu(0) = u_\mu(1) = \mu y_0$ и уравнению

$$\dot{u} = P(t)u + g(t,u), \quad t \in [0, 1], \quad u \in F, \tag{6}$$

где $P(t) = A(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)$, $g(t,u) = f(\gamma(t),u)\dot{\gamma}(t)$, причем по выбору ρ и M имеют место оценки $\|P(t)\| \leq Mb$ и $\|g(t,u)\| \leq Mb\|u\|^{1+m}$ при всех $t \in [0,1]$.

Замечание 3. Условия, наложенные на уравнение (1), не обеспечивают однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения (6).

Пусть теперь v — решение задачи Коши для уравнения

$$\dot{v} = P(t)v, \quad t \in [0,1], \quad v \in F, \tag{7}$$

с начальным условием $v(x_0) = y_0$, единственное в силу ограниченности P. Обозначим оператор Коши уравнения (7) (эволюционный оператор [12, с. 147]) через $Z(t,s)$. Тогда по формуле Коши для уравнений в банаховом пространстве [12, с. 148] будем иметь представление

$$u_\mu(t) = \mu Z(t,0)y_0 + \int_0^t Z(t,s)g(s,u_\mu(s))\,ds = \mu v(t) + \int_0^t Z(t,s)g(s,u_\mu(s))\,ds. \tag{8}$$

Согласно [12, с. 148], при $1 \geq t \geq s \geq 0$ для эволюционного оператора Z справедлива оценка $\|Z(t,s)\| \leq \exp \int_s^t \|P(\tau)\|\,d\tau \leq \exp Mb$, поэтому для u_μ выполняются неравенства

$$\|u_\mu(t)\| \leq \mu\|Z(t,0)\|\,\|y_0\| + \int_0^t \|Z(t,s)\|\,\|g(s,u_\mu(s))\|ds \leq e^{Mb}\mu\|y_0\| + \int_0^t e^{Mb}Mb\|u_\mu(s)\|^{1+m}\,ds.$$

Применяя лемму Бихари [13, с. 112; 1, с. 161], получим, что при $0 \leq t \leq (mM_1)^{-1}\|\mu y_0\|^{-m}$ имеет место оценка $\|u_\mu(t)\| \leq e^{Mb}\mu\|y_0\|(1 - tmM_1\|\mu y_0\|^m)^{-1/m}$, где $M_1 := Mb\exp(m+1)Mb$. Если теперь $\mu \leq \varepsilon := \|y_0\|^{-1}(2mM_1)^{-1/m}$, то при всех $t \in [0,1]$ выполнено неравенство $\|u_\mu(t)\| \leq 2^{-1/m}e^{Mb}\mu\|y_0\|$, поэтому в силу (8) справедливы соотношения

$$\mu\|y_0 - v(1)\| = \|u_\mu(1) - \mu v(1)\| \leq \int_0^1 \|Z(t,s)\|\,\|g(s,u_\mu(s))\|\,ds \leq$$

$$\leq \int_0^1 e^{Mb}Mb\|u_\mu(s)\|^{1+m}\,ds \leq Mbe^{Mb}(2^{-1/m}e^{Mb}\mu\|y_0\|)^{1+m} =: K\mu^{1+m}.$$

Это означает, что $\|v(1) - y_0\| \leq K\mu^m$ для всех $0 < \mu \leq \varepsilon$, т.е. $v(1) = y_0 = v(0)$.

Пусть $\bar{y}$ — радиальное решение [1, с. 15; 2, с. 23] уравнения (3) с начальным условием $\bar{y}(x_0) = y_0$, т.е. отображение, определенное в некоторой окрестности точки x_0 равенством $\bar{y}(x) = z_x(1)$, где z_x представляет собой решение задачи Коши с начальными данными $z_x(0) = y_0$ для уравнения

$$\dot{z} = A(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)z, \quad t \in [0,1], \quad z \in F. \tag{9}$$

Так как отображение A ограничено в шаре $B_E(x_0,\rho)$, радиальное решение $\bar{y}$ определено и единственно по крайней мере в $x \in B_E(x_0,\rho)$. Поэтому если уравнение (3) имеет решение y задачи Коши с начальным условием $y(x_0) = y_0$, то оно совпадает с $\bar{y}$ при всех $x \in B_E(x_0,\rho)$ из своей области существования.

Покажем, что радиальное решение $\bar{y}$ является решением уравнения (3) в обычном смысле. Для этого возьмем произвольные точки $x, x+h \in B_E(x_0,\rho)$ и рассмотрим треугольник с вершинами x_0, x, $x+h$. В силу выпуклости всякого шара в нормированном пространстве этот треугольник полностью содержится в $B_E(x_0,\rho)$. Возьмем в качестве кривой Γ

его границу и зафиксируем для нее кусочно-линейную параметризацию γ следующего вида: $\gamma(t) = x_0 + 3t(x - x_0)$ при $t \in [0, 1/3[$, $\gamma(t) = x + (3t-1)h$ при $t \in [1/3, 2/3]$ и $x_0 + (3-3t)(x + h - x_0)$ при $t \in]2/3, 1]$. Рассмотрим сужение уравнения (3) на кривую Γ с выбранной параметризацией. Это сужение является уравнением вида (7), поэтому для его решения v с начальным условием $v(0) = y_0$ по доказанному имеем равенство $v(1) = y_0$. Кроме того, по определению радиального решения и выбору γ выполняется равенство $v(1/3) = \bar{y}(x)$, а с учетом единственности решения задачи Коши, имеющей место для уравнений (7) и (9), еще и равенство $v(2/3) = \bar{y}(x+h)$.

Оценим разность

$$S = (\bar{y}(x+h) - \bar{y}(x)) - A(x)h\bar{y}(x) =$$

$$= v(2/3) - v(1/3) - P(1/3)v(1/3)/3 = \int\limits_{1/3}^{2/3} (P(t)v(t) - P(1/3)v(1/3))\,dt.$$

Для P, как и выше, справедлива оценка $\|P(t)\| \le 3Mh$, поэтому справедливо неравенство

$$\|v(2/3) - v(1/3)\| \le \int\limits_{1/3}^{2/3} \|P(t)v(t)\|\,dt \le \int\limits_{1/3}^{2/3} 3M\|h\|\,\|v(1/3)\| \exp M\|h\|(3t-1)\,dt \le$$

$$\le \|\bar{y}(x)\|(\exp M\|h\| - 1).$$

Помимо этого при $t \in [1/3, 2/3]$ имеем также неравенство $\|P(t) - P(1/3)\| \le \|A(\gamma(t)) - -A(x)\|\,\|h\|$. Это позволяет получить оценку

$$S \le 3^{-1} \sup\{\|P(t)v(t) - P(1/3)v(1/3)\| : t \in [1/3, 2/3]\} \le$$

$$\le \|\bar{y}(x)\|\,\|h\|(M((\exp M\|h\| - 1)) + \sup\{\|A(\gamma(t)) - A(x)\| : t \in [1/3, 2/3]\}).$$

Поскольку A непрерывно, отсюда следует, что $S = o(\|h\|)$, т.е. $\bar{y}$ дифференцируемо по Фреше в точке x и выполнено равенство $\bar{y}'h = A(x)h\bar{y}(x)$. Таким образом, $\bar{y}$ является решением уравнения (3) в обычном смысле, определенным по крайней мере в $B_E(x_0, \rho)$ и единственным там. Теорема доказана.

Будем говорить, что функция a финально ограничена в области U, если всякая точка $x_0 \in U$ обладает такой окрестностью V, в которой функция a ограничена.

Следствие 1. *Если уравнение (1) вполне разрешимо в $U \times B_F(0, R)$, множество $H(x_0, y_0)$ непусто для всех $x_0 \in U$, $y_0 \in B_F(0, R)$, а функция a финально ограничена в U, то уравнение (3) вполне разрешимо в $U \times F$.*

Следствие 2. *Если уравнение (1) вполне разрешимо в $U \times B_F(0, R)$, отображения A и f непрерывно дифференцируемы всюду в своей области определения, а функция a финально ограничена в U, то уравнение (3) вполне разрешимо в $U \times F$.*

Доказательство. Возьмем любые $x_0 \in U$, $y_0 \in B_F(0, R)$. По условию следствия найдутся такие числа $\rho > 0$ и $M \ge 0$, что $B_E(x_0, \rho) \subset U$ и для всех $x \in B_E(x_0, \rho)$ выполнены неравенства $\|A(x)\| \le M$, $a(x) \le M$. Кроме того, полагая $\delta = R - \|y_0\|$, для любого $\mu \in]0, 1]$ будем иметь включение $B_F(\mu y_0, \delta) \subset B_F(0, R)$. Таким образом, множество $B_E(x_0, \rho) \times B_F(\mu y_0, \delta)$ содержится в $U \times B_F(0, R)$, а правая часть уравнения (1) определена и ограничена на нем.

Поскольку правая часть уравнения (1) непрерывно дифференцируема в $U \times B_F(0, R)$, для него справедлива теорема Фробениуса [8, с. 357], согласно которой решение задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием $y_\mu(x_0) = \mu y_0$ определено и единственно по крайней мере в шаре $B_E(x_0, \alpha)$, где $\alpha = \min\{\rho, \delta/(2N)\}$, а N оценивает сверху нормы значений правой части уравнения (1), рассматриваемых как элементы $L(E, F)$. Из (1) и (2) по выбору ρ имеем оценку $\|y'h\| \le MR(1 + R^m)\|h\|$, поэтому можно положить $N = MR(1 + R^m)$. Тогда α не зависит от y_0, и, следовательно, $H(x_0, y_0) \supset B_E(x_0, \alpha) \ne \varnothing$. Применение следствия 1 завершает доказательство.

Работа выполнена в Институте математики Национальной академии наук Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований "Математические структуры" при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Литература

1. *Гайшун И. В.* Линейные уравнения в полных производных. Минск, 1989.
2. *Гайшун И. В.* Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Минск, 1983.
3. *Боже Д. А.* // Латв. мат. ежегодник. 1975. Вып. 16. С. 181 — 184.
4. *Большаков Н. Е., Потапенко П. П.* // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 5. С. 934 — 936.
5. *Гайшун И. В., Портянко Н. А.* // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 6. С. 1071 — 1073.
6. *Грудо Э. И.* // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 4. С. 589 — 599.
7. *Ласый П. Г.* // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 3. С. 529 — 532.
8. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. М., 1964.
9. *Перов А. И.* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 10. С. 1881 — 1884.
10. *Перов А. И., Назаров Ф.* // Изв. АН ТаджССР. Отд-ние физ.-мат. и геол.-хим. наук. 1971. № 4. С. 3 — 8.
11. *Мышкис А. Д.* // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 8. С. 1331 — 1337.
12. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.
13. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

Институт математики НАН Беларуси

Поступила в редакцию
12 декабря 1999 г.