ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ИЮНЬ 1976 г., ТОМ XII, № 6

УДК 517.927

ОБ ОДНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ, НЕ УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕЙ УСЛОВИЮ С. Н. БЕРНШТЕЙНА И ИМЕЮЩЕЙ ПРИЛОЖЕНИЕ В ТЕОРИИ КАПИЛЛЯРНЫХ ЯВЛЕНИЙ

А. Д. МЫШКИС, Г. В. ЩЕРБИНА

1. Свободная поверхность капиллярной жидкости, находящейся в состоянии равновесия и ограниченной слева вертикальной стенкой $x=a$, описывается дифференциальным уравнением

$$y''=by(1+y'^2)^{3/2}; \qquad (a\leqslant x<\infty,\ \infty=+\infty,\ b=\rho g\sigma^{-1}=\mathrm{const}), \tag{1}$$

где ρ и σ — плотность и поверхностное натяжение жидкости, g — ускорение силы тяжести. При этом наиболее естественные краевые условия таковы:

$$y'(a)=-\operatorname{ctg}\alpha, \quad y(\infty)=0, \tag{2}$$

где α — заданный угол смачивания. Уравнение (1) интегрируется в элементарных функциях. Непосредственно проверяется, что задача (1), (2) имеет ровно одно решение, причем графики этих решений при произвольных a и α заполняют полосу $|y|\leqslant\sqrt{\frac{2}{b}}$, так что через каждую ее точку проходит ровно один график; решение непрерывно зависит от (a, α, b) и монотонно по каждому из этих параметров. Все это отвечает и физическому смыслу задачи.

Аналогичная задача для осесимметричного состояния равновесия описывается уравнением

$$y''=(1+y'^2)^{3/2}\left(by-\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}}\right) \qquad (a<x<\infty) \tag{3}$$

и краевыми условиями (2), где x — расстояние от оси симметрии. Разрешимость этой задачи (при $a>0$) доказана в работе [1]. Здесь графики решений заполняют некоторую полосу $|y|<\Psi(x)$, причем из физических соображений естественно ожидать, что $\Psi(+0)=0$, $\Psi(\infty)=\sqrt{\frac{2}{b}}$, а остальные свойства, перечисленные в предыдущем абзаце, сохраняются без изменения.

В динамических задачах теории капиллярной жидкости встречается уравнение

$$y''=(1+y'^2)^{3/2}(by+f(x)), \tag{4}$$

оно рассматривалось в работе [2]. И. Д. Борисов указал нам также уравнение

$$y''=(1+y'^2)^{3/2}\left(by-\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}}-\frac{q}{x}\right), \tag{5}$$

описывающее равновесные осесимметричные формы намагничивающейся капиллярной жидкости.

Для всех приведенных уравнений характерно невыполнение известного, принадлежащего С. Н. Бернштейну [3], условия роста правой части по y'. Именно это и обеспечивает конечную высоту полосы, заполненной графиками решений, в плоскости x, y.

Предельные краевые задачи для уравнений с бернштейновским ростом изучались в работах [4—6] и некоторых других; при этом, говоря о таком росте применительно к краевой задаче вида

$$y''=F(x, y, y'); \quad (a\leqslant x<\infty,\ y'(a)=\gamma,\ y(\infty)=0), \tag{6}$$

мы будем иметь в виду небольшое расширение условия Бернштейна, принадлежащее Нагумо:

$$\exists C(x, y)>0 \quad (x\geqslant a,\ |y|<\infty),$$
$$\exists\varphi(z)>0 \quad (|z|<\infty), \qquad C \text{ и } \varphi \text{ непрерывны},$$

$$\int^{\infty}\frac{z}{\varphi(z)}\,dz=\int_{-\infty}\frac{|z|dz}{\varphi(z)}=\infty; \qquad |F(x, y, z)|\leqslant C(x, y)\varphi(z).$$

В работе [7] приведены условия разрешимости задачи (6) в случае небернштейновского роста, именно если

$$\exists\varphi(z)>0 \quad (|z|<\infty),\ \varphi \text{ непрерывна}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|z|dz}{\varphi(z)}<\infty, \tag{7}$$

$$F(x, y, z)\sim\varphi(z)\Phi_i(x, y) \quad ((-1)^i z\to\infty),$$

причем $\exists Y_i(x)\subset \operatorname{loc}\operatorname{Lip}(0, \infty)$, $\operatorname{sgn}\Phi_i(x, y)=\operatorname{sgn}(y-Y_i(x))$. (Показано также [8], что включение $Y_i(x)\subset C^{\alpha}$ недостаточно для существования классического решения). Полученные результаты применимы, в частности, ко всем уравнениям (1) и (3)—(5).

Целью настоящей работы является более подробное изложение и дальнейшее развитие этих результатов с основным упором на рассмотрение совокупности всех решений задачи (6) при произвольных a и γ. В частности, результаты п. 2, примыкающего к работам [4, 5, 7], получены без какого-либо предположения о росте правой части. В пп. 3—7 требуется небернштейновость этого роста. Мы не стремились к максимальной общности, так что доказанные утверждения допускают разнообразные обобщения.

Отметим, между прочим, что для уравнений (1) и (3)—(5) характерна еще одна особенность, в данной работе не использованная, именно третья степень роста правой части по y'. Уравнения, обладающие этой особенностью, допускают переход в точках (x, y), где $y'=\pm\infty$, к зависимости $x(y)$. Это не только представляет дополнительное средство исследования, но и дает возможность перехода к краевым задачам, в которых решение $y(x)$ — неоднозначная функция, представимая в параметрическом виде. Думается, что уравнения с такой особенностью должны быть специальным объектом исследования.

2. Итак, мы будем рассматривать краевую задачу (6), предполагая, что функция $F(x, y, z)$ непрерывна при $a_0<x<\infty$, $-\infty<y, z<\infty$, $-\infty\leqslant a_0<\infty$, и обеспечивает единственность решения задачи Коши; $a_0<a$, $|\gamma|\leqslant\infty$ (если $\gamma=\pm\infty$, то функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению только при $x>a$). Леммы 1, 2 и 4 известны и приводятся для удобства читателей; лемма 3 обобщает соответствующее утверждение работы [7], где была использована «небернштейновость» задачи.

Обозначим через $y(x;\ a,\ l,\ \gamma)$ решение задачи Коши

$$y''=F(x,\ y,\ y'),\qquad y(a)=l,\qquad y'(a)=\gamma;\qquad (a_0<a<x,\ |l|+|\gamma|<\infty),$$

а через $[a,\ A(a,\ l,\ \gamma))$ — максимальный интервал, на который это решение можно продолжить.

Лемма 1. *Пусть*

$$\forall p\in(a_0,\ \infty)\quad \exists k_p\in[0,\ \infty),\quad \operatorname{sgn}[yF(x,\ y,\ 0)]>0$$
$$(p<x<\infty,\ k_p<|y|<\infty).$$

Тогда возможны только следующие случаи:

1) $y(x)+y'(x)\to\infty$ *при* $x\to A$;
2) $y(x)+y'(x)\to-\infty$ *при* $x\to A$;
3) $A=\infty$, $y(x)$ *ограничено на* $[a,\ \infty)$.

Здесь $y(x)$ *и* A *всюду означают* $y(x;\ a,\ l,\ \gamma)$ *и* $A(a,\ l,\ \gamma)$.

Лемма 2. *Пусть*

$$\forall k\in(0,\ \infty),\qquad \liminf_{|y|>k,\ |z|<k,\ x\to\infty}[\operatorname{sgn} y\cdot F(x,\ y,\ z)]>0.$$

Тогда любое решение $y(x)$, *ограниченное при* $x\to\infty$, *стремится к нулю при* $x\to\infty$.

Лемма 3. *Пусть*

1) $\forall p\in[a_0,\ \infty)$, $\forall q$ $\liminf\limits_{x>p,\ z\operatorname{sgn} y>q,\ |y|\to\infty}[\operatorname{sgn} y\cdot F(x,\ y,\ z)]>0$;

2) $\exists z_0>0$, $\exists Y(x,\ z)$ $(a_0<x<\infty,\ |z|>z_0)$, $\operatorname{sgn} F(x,\ y,\ z)=\operatorname{sgn}[y-Y(x,\ z)]$ $(a_0<x,\ |z|>z_0)$, *причем существуют локально равномерные пределы* $\lim\limits_{(-1)^i z\to\infty} Y(x,\ z)=Y_i(x)$, $(a_0<x,\ i=1,\ 2)$, *а функции* $Y(x,\ z)$ *локально удовлетворяют по* x *условию Липшица, равномерно по* $z\to\pm\infty$. *Тогда* $\forall\ a\in(a_0,\ \infty)$, $\forall\ \gamma\in(-\infty,\ \infty)$ $\exists\ l=l_{a,\gamma}\in(-\infty,\ \infty)$ *такое, что для* $y(x;\ a,\ l,\ \gamma)$ *реализуется случай 3 леммы 1.*

Для доказательства леммы 3 надо рассмотреть решения $y(x;\ a,\ l,\ \gamma)$ при фиксированных a, γ и произвольном l. Если представить множество $(-\infty,\ \infty)$ всех значений l в виде объединения попарно не пересекающихся множеств L_1, L_2, L_3 в соответствии с поведением решений в силу леммы 1, то из условия 1) получаем, что для всех достаточно больших l будет $l\in L_1$, $-l\in L_2$. Кроме того, нетрудно проверить, что множества L_1 и L_2 открытые. Значит, множество L_3 непусто; лемма 3 доказана.

Замечание. Для уравнений с бернштейновским ростом условие 2) в лемме 3 является излишним.

Лемма 4. *Пусть функция* $F(x,\ y,\ z)$ *возрастающая по* y. *Тогда при любых* $a\in(a_0,\ \infty)$, γ, $l_1<l_2$

$$\operatorname{sgn}(x-a)[y'(x;\ a,\ l_2,\ \gamma)-y'(x;\ a,\ l_1,\ \gamma)]>0,$$
$$y(x;\ a,\ l_1,\ \gamma)<y(x;\ a,\ l_2,\ \gamma)-(l_2-l_1)\qquad (x\neq a),$$

причем оба неравенства справедливы при $x\gtrless a$ на общей части интервалов определения обоих решений.

Из приведенных лемм следует

Теорема 1. *Пусть выполнены условия лемм 2—4. Тогда краевая задача (6) при* $|\gamma|<\infty$ *имеет единственное решение* $\bar y(x;\ a,\ \gamma)$. *При этом* $\bar y$ *непрерывно по* $(x,\ a,\ \gamma)$ *и убывает по* γ. *Совокупность графиков таких решений при всевозможных* $a\in(a_0,\ \infty)$, γ *заполняет некоторую область* $G=\{(x,\ y)\,|\,a_0<x<\infty,\ \Psi^-(x)<y<\Psi^+(x)\}$, $(-\infty\leqslant\Psi^-(x)<\Psi^+(x)\leqslant$

$\leqslant\infty$), *причем через каждую точку* $(x, y)\in G$ *проходит ровно один график, а их угловые коэффициенты непрерывно зависят от* x, y *и убывают по* y. *Функция* $\Psi^+(x)$ $(=\Psi^+(x, F))$ *непрерывна снизу, а* $\Psi^-(x)$ — *сверху.*

3. Теперь мы добавим предположение о неберштейновском росте.

Теорема 2. *Пусть в дополнение к условиям теоремы 1 существует функция* $\varphi(z)$, *удовлетворяющая условиям (7), и* $\forall p\in(a_0, \infty)$, $\exists r_0\in(0, \infty)$, $\exists C_p\in(0, \infty)$ *такие, что*

$$\operatorname{sgn} y\cdot F(x, y, z)>C_p\varphi(z), \quad (p\leqslant x<\infty,\ |y|\geqslant r_p,\ |z|<\infty). \tag{8}$$

Тогда

$$-r_x-\frac{1}{C_x}\int\limits_0^\infty\frac{zdz}{\varphi(z)}\leqslant\Psi^-(x)<\Psi^+(x)\leqslant r_x+\frac{1}{C_x}\int\limits_{-\infty}^0\frac{|z|dz}{\varphi(z)}. \tag{9}$$

Через точки $(a, \Psi^-(a))$ *и* $(a, \Psi^+(a))$ *проходят графики решений задачи (6) соответственно при* $\gamma=\infty$ *и* $\gamma=-\infty$.

Чтобы проверить утверждение, допустим, что при некоторых

$$l\geqslant l_0\underset{\text{def}}{=}r_a+\frac{1}{C_a}\int\limits_{-\infty}^0\frac{|z|dz}{\varphi(z)}, \qquad \gamma\in(-\infty, \infty)$$

для решения $y(x;\ a, l, \gamma)$ реализуется случай 3 леммы 1, и сравним $y(x)$ с решением $v(x)$ задачи

$$v''=C_a\varphi(v'), \quad v(a)=l_0, \quad v'(a+0)=-\infty.$$

Это решение определено на интервале $a\leqslant x\leqslant a_1=a+\dfrac{1}{C_a}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{\varphi(z)}$, причем $v'(a)=-\infty$, $v'(a_1)=\infty$, $\min\limits_{a\leqslant x\leqslant a_1} v(x)=r_a$; поэтому

$$\exists a_2\in(a, a_1),\ v'(a_2)=y'(a_2),\ y(x)>v(x) \quad (a<x\leqslant a_2).$$

Однако отсюда легко получить противоречие с (8). Аналогично проверяется первое неравенство (9).

Рассмотрим теперь последовательность решений

$$\bar y_n(x)\underset{\text{def}}{=}\bar y(x;\ a, \gamma_n)\ (a\leqslant x<\infty),\ \text{где}\ \gamma_1>\gamma_2>\ \ldots\ \to-\infty. \tag{10}$$

Она ограниченная и возрастающая; пусть, например, все $|\bar y_n(x)|\leqslant K$. Выберем произвольно $a_1\in(a, \infty)$, $a_2\in(a_1, \infty)$ и обозначим

$$M_n=\{x\in[a_1, a_2]\,|\,\bar y_n'(x)\geqslant-2K/(a_2-a_1)\}.$$

Ясно, что это замкнутые непустые множества, причем $M_1\supset M_2\supset\ \ldots$ Пусть

$$\bar a\in\bigcap_{n=1}^\infty M_n, \quad \bar l=\lim_{n\to\infty}\bar y_n(\bar a), \quad \bar\gamma=\lim_{n\to\infty}\bar y_n'(\bar a).$$

Тогда все $\bar y_n'(x)>y'(x;\ \bar a, \bar l, \bar\gamma)$ $(a\leqslant x<\infty)$. В силу произвольности a_1, a_2 отсюда вытекает, что последовательность $\bar y_n'(x)$, а потому и $\bar y_n''(x)$ равномерно ограничены на любом $[a_1, a_2]$ $(a<a_1<a_2<\infty)$. Отсюда легко следует, что последовательности (10) и $\bar y_n'(x)$ равномерно сходятся на каждом таком отрезке. Значит, $\tilde y(x)\underset{\text{def}}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\bar y_n(x)$ $(a<x)$ представляет собой решение уравнения $y''=F(x, y, y')$, причем по лемме 2 $\tilde y(\infty)=0$. Предел $\tilde y(a+0)$ существует,

причем от противного легко проверяется, что $\tilde{y}(a+0)=\Psi^+(a)$, $\tilde{y}'(a+0)=-\infty$. Аналогично рассматривается задача (6) при $\gamma=\infty$. Теорема 2 доказана.

4. Как показывают примеры, в условиях теоремы 1 (а возможно, и теоремы 2) задача (6) при $\gamma=\pm\infty$ может иметь более одного решения. Мы укажем здесь условие единственности такого решения; другое условие будет указано в п. 5.

Теорема 3. *Пусть в дополнение к условиям теоремы 2 существует функция $\varphi_1(z)$, удовлетворяющая условиям (7), для которой существуют локально равномерные пределы*

$$\lim_{(-1)^i z\to\infty}\frac{F(x,y,z)}{\varphi_1(z)}=\Phi_i(x,y)\qquad(i=1,2),$$

причем функции Φ_i возрастающие по y. Тогда решение задачи (6) при $\gamma=\infty$, а также при $\gamma=-\infty$ единственно, а функции $\Psi^-(x)$ и $\Psi^+(x)$ непрерывны.

Доказательство. Пусть задача (6) имеет при $\gamma=-\infty$ решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, причем $y_1(a)<y_2(a)$. Тогда $\forall x>a$,

$$0<\int\limits_{y_2'(x)}^{y_1'(x)}\frac{dz}{\varphi_1(z)}=\int\limits_a^x\left[\frac{F(x,y_1,y_1')}{\varphi_1(y_1')}-\frac{F(x,y_2,y_2')}{\varphi_1(y_2')}\right]dx.$$

Однако при достаточно малом $x-a$ функция в квадратных скобках как угодно близка к $\Phi_1(a,y_1(a))-\Phi_1(a,y_2(a))<0$, что приводит к противоречию. Единственность решений $\bar{y}(x;a,\pm\infty)$ доказана.

Чтобы проверить непрерывность функции $\Psi^+(x)$, допустим от противного, что дана последовательность $a_n\to a$, для которой

$$b_n\underset{\text{def}}{=}\bar{y}_n(a_n;a_n,-\infty)\underset{n\to\infty}{\to}\bar{b}>b\underset{\text{def}}{=}\bar{y}(a;a,-\infty).$$

Тогда для $y(x)=\bar{y}(x;a,-\infty)$, $y_n(x)=\bar{y}(x;a_n,-\infty)$, $\forall x>\max\{a,a_n\}$

$$\int\limits_{y'(x)}^{y_n'(x)}\frac{zdz}{\varphi_1(z)}=\int\limits_{y(x)}^{b}\frac{F(x,y,y')}{\varphi_1(y')}dy-\int\limits_{y_n(x)}^{b_n}\frac{F(x,y_n,y_n')}{\varphi_1(y_n')}dy.$$

Отсюда при любом фиксированном $x>a$, переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем

$$0=-\int\limits_b^b\Phi_1(a,y)dy.$$

Однако $\Phi_1(a,b)\geqslant 0$ и потому последнее равенство противоречит условию возрастания Φ_1 по y. Аналогично доказывается непрерывность функции $\Psi^-(x)$. Теорема 3 доказана.

Замечание. Совершенно аналогично единственности решений $\bar{y}(x;a,\pm\infty)$ доказывается монотонность зависимости функций $\Psi^\pm(x)$ от F. Более точно, пусть функции $F_k(x,y,z)$ $(k=1,2)$ удовлетворяют условиям теоремы 3 с одной и той же функцией $\varphi_1(z)$, причем

$$F_1(x,y,z)\leqslant F_2(x,y,z)\qquad(a_0<x<\infty,\ |y|+|z|<\infty).\tag{11}$$

Тогда $\Psi_2^{\pm}(x) \leqslant \Psi_1^{\pm}(x)$ $(a_0 < x < \infty)$. Несколько более сильное утверждение: $\Psi_2^{+}(x) \leqslant \Psi_1^{+}(x)$ $(\Psi_2^{-}(x) \leqslant \Psi_1^{-}(x))$ $\forall x \in (a_0, \infty)$, если неравенство (11) выполняется при $|z| < \infty$ в некоторой области, заведомо содержащей все графики $\bar{y}_k(x; a, -\infty)$ (соответственно $\bar{y}_k(x; a, \infty)$).

5. Уравнение (1) при его вариационном выводе первоначально появляется в форме уравнения Эйлера

$$\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = by,$$

причем выражение, стоящее под знаком d/dx, стабилизируется при $y' \to \pm\infty$. В аналогичной форме можно переписать и уравнения (3)—(5). Оказывается, что эта возможность представляет дополнительное средство исследования соответствующей краевой задачи. Мы воспользуемся еще одной простой общей леммой.

Лемма 5. *Пусть*

$$\exists p \in (a_0, \infty), \exists k > 0, \ |F(x, y, z)| < \text{const} \ (p < x < \infty, \ |y| + |z| < k).$$

Тогда если решение $y(x) \underset{x\to\infty}{\to} 0$, *то и* $y'(x) \underset{x\to\infty}{\to} 0$.

Теорема 4. *Пусть в дополнение к условиям теоремы 2 и леммы 5 уравнение* $y'' = F(x, y, y')$ *можно записать в виде*

$$\frac{d}{dx} F^1(x, y, y') = F^2(x, y, y') \quad (a_0 < x < \infty, \ |y| + |y'| < \infty), \tag{12}$$

где функция F^1 *непрерывно дифференцируема и* $F^1_{y'} \neq 0$. *Пусть при этом существуют конечные пределы*

$$F_0^1 = \lim_{x\to\infty, \ |y|+|z|\to 0} F_1(x, y, z), \quad F^1(x, y, \pm\infty) = \lim_{z\to\pm\infty} F^1(x, y, z),$$

причем два последних — локально равномерные. Пусть при каждом $x \in (a_0, \infty)$ *каждая из функций* $F^1(x, y, -\infty)$ *и* $F^1(x, y, \infty)$ *не убывает по* y, *а функция* $F^2(x, y, z)$ *возрастает по* y *и не возрастает по* z, *либо не убывает по* y *и убывает по* z. *Тогда при* $\gamma = \infty$ *и при* $\gamma = -\infty$ *решение задачи (6) единственно.*

Доказательство. Подставим в уравнение (12) какое-либо решение $\bar{y}(x)$ задачи (6) при $\gamma = -\infty$, проинтегрируем результат от $p \in (a, \infty)$ до $q \in (p, \infty)$ и перейдем к пределу при $p \to a$, $q \to \infty$; мы получим равенство

$$F_0^1 - F^1(a, \bar{y}(a), -\infty) = \int_a^\infty F^2(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))\,dx. \tag{13}$$

Если $\bar{y}_1(x)$ — другое решение той же задачи, то $\bar{y}_1(a) \neq \bar{y}(a)$. Пусть для определенности $\bar{y}(a) < \bar{y}_1(a)$; тогда из леммы 4 следует, что

$$\bar{y}(x) < \bar{y}_1(x), \quad \bar{y}_1'(x) < y(x) \quad (a < x < \infty).$$

Поэтому при переходе в равенстве (13) от $\bar{y}$ к $\bar{y}_1$ левая часть не возрастает, а правая возрастает, что невозможно. Аналогично рассматривается случай $\gamma = \infty$.

Теорема 5. *Пусть в дополнение к условиям теоремы 4 для любого* $i = 1, 2$ *и любого компактного множества* $M \subset \{a_0 < x < \infty, \ |y| < \infty\}$, *не*

пересекающегося с графиком $y=Y_i(x)$, *существуют* $l_M\in(0, \infty)$ *и* $C_M\in\in(0, \infty)$ *такие, что*

$$F(x, y, z)\operatorname{sgn}[y-Y_i(x)]>C_M\varphi(z) \quad ((x, y)\in M,\ (-1)^i z>l_M).$$

Тогда функции $\Psi^{\pm}(x)$ $(a_0<x<\infty)$ *непрерывны.*

Доказательство. Пусть $\Psi^+(x)$ разрывна при некотором $x=a$. Тогда $\exists a_n\to a$, $\Psi^+(a_n)\to b>\Psi^+(a)$. Из теоремы 4 следует, что $\forall\bar b\in\in(\Psi^+(a), b)$, $\exists n_0, \forall\ n>n_0, \exists\ \bar a_n\in(a_n, \infty)$,

$$\bar y(\bar a_n; a_n, -\infty)<\bar b, \quad \max_{[a_n, \bar a_n]} \bar y'(x; a_n, -\infty)\underset{n\to\infty}{\to}-\infty.$$

Отсюда легко получить противоречие аналогично первой части доказательства теоремы 2. Подобным образом рассматривается и функция $\Psi^-(x)$. Теорема 5 доказана.

Замечание. Если в формулировке теоремы 5 заменить «теоремы 4» на «теоремы 2», то функции $\Psi^{\pm}(x)$ непрерывны слева.

6. Итак, в предположениях теоремы 3 или теоремы 5 графики всех решений задачи (6) заполняют полосу $\Psi^-(x)\leqslant y\leqslant\Psi^+(x)$ $(a_0<x<\infty)$. Один из способов численного построения этой полосы в конкретных примерах таков: исходя из асимптотического разложения решений уравнения $y''=F$, для которых $y(\infty)=0$, численно решать это уравнение в сторону убывания x, пока не станет $|y'|=\infty$ (последнее распознается по какому-либо критерию, а для уравнений с 3-й степенью роста F по y' — путем перехода, о котором говорилось в конце п. 1). Например, для уравнения (3) асимптотическое разложение таких решений имеет вид

$$y=cK_0(\sqrt{b}\,x)+O(K_0^3) \qquad (x\to\infty),$$

где c — произвольная постоянная, а K_0 — функция Макдональда.

7. Ситуация несколько упрощается, если предположить дополнительно, что

$$F(x, y, z)=-F(x, -y, -z).$$

Тогда вся картина симметрична относительно оси x: отсюда

$$\Psi^+(x)\equiv-\Psi^-(x)>0 \text{ и } y'(x; a, \gamma)<0 \text{ при } \bar y>0.$$

Если, кроме того, задана оценка

$$F_1(x, y, z)\leqslant F(x, y, z)\leqslant F_2(x, y, z) \quad (a_0<x<\infty;\ y>0;\ z<0),$$

где $F_1(x, y+l, z)$ и $F_2(x, y-s, z)$ при некоторых $l\geqslant0$, $s\geqslant0$ удовлетворяют условиям теоремы 5, то

$$\bar y_2(x; a, \gamma)\leqslant\bar y(x; a, \gamma)\leqslant\bar y_1(x; a, \gamma) \quad (a\leqslant x<\infty;\ -\infty\leqslant\gamma<0),$$

$$\Psi_2^+(x)\leqslant\Psi^+(x)\leqslant\Psi_1^+(x) \quad (a_0<x<\infty)$$

при естественном смысле обозначений. Отсюда получаем, что если функция $F(x, y, z)$ при $z<0$ не возрастает (не убывает) по x, то функция $\Psi^+(x)$ неубывающая (соответственно невозрастающая). Другое следствие, пусть $\varphi(-z)\equiv\varphi(z)$ (см. теорему 2) и существует непрерывная возрастающая нечетная функция $\zeta(y)$ $(-\infty<y<\infty)$, для которой

$$\forall\varepsilon_1, \varepsilon_2\geqslant0\ \exists\ p_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}\in(a_0, \infty),\ \zeta(y-\varepsilon_1)\leqslant\frac{F(x, y, z)}{\varphi(z)}\leqslant\zeta(y+\varepsilon_2)$$

$$(p_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}\leqslant x<\infty;\ y>0,\ |z|<\infty).$$

Тогда $l_0-\varepsilon_2\leqslant\Psi^+(x)\leqslant l_0+\varepsilon_1$ $(x\geqslant p_{\varepsilon_1,\varepsilon_2})$, где l_0 находится из уравнения

$$\int_0^{l_0}\zeta(y)\,dy=\int_0^{\infty}\frac{u\,du}{\varphi(u)}.$$

В частности, для (3) получаем

$$\max\left\{\sqrt{\frac{2}{b}}-\frac{1}{bx},\ 0\right\}\leqslant\Psi^+(x)\leqslant\sqrt{\frac{2}{b}}\qquad(x>0),$$

причем функция $\Psi^+(x)$ неубывающая. Естественно ожидать, что эти неравенства строгие.

Было бы интересно более детально изучить функцию $\Psi^+(x)$, в частности, получить для нее асимптотические выражения при $x\to a_0$ и при $x\to\infty$.

8. Отметим в заключение, что из наших рассмотрений непосредственно вытекают утверждения о разрешимости краевой задачи:

$$y''=F(x,y,y')\qquad(a\leqslant x<\infty),$$

$$U(a,y(a),y'(a))=d;\qquad y(\infty)=0,$$

где функция $U(x,y,z)$ $(x\geqslant a_0,\ |y|+|z|<\infty)$ при каждом x непрерывна по (y,z), не убывает по y, не возрастает по z и не имеет областей постоянства. Именно в условиях теоремы 1 решение, понимаемое в классическом смысле, существует и единственно, если

$$\inf_{(a,y)\in G}U(a,y,\infty)<d<\sup_{(a,y)\in G}U(a,y,-\infty),$$

и не существует в противном случае. Если допускать обращение $|y'(a)|$ в бесконечность, то в условиях теорем 3 или 4 решение существует и единственно, если

$$U(a,\Psi^-(a),\infty)\leqslant d\leqslant U(a,\Psi^+(a),-\infty),$$

и не существует в противном случае.

Литература

1. Johnson W. E., Perko L. M. Arch. Rat. Mech. Anal., 29, 1968.
2. Темкина В. С. Мех. жидкости и газов, № 6, 1974.
3. Bernstein S. Ann. Ec. Norm., 29, 431—485, 1912.
4. Hartman P., Wintner A. Amer. J. Math., 73, 390—401, 1951.
5. Клоков Ю. А. ДАН СССР, **139**, № 4, 1961.
6. Щербина Г. В. ДАН СССР, **178**, № 2, 1968.
7. Щербина Г. В. Вопросы гидродинамики и теплообмена в криогенных системах, т. IV. ФТИНТ, Харьков, 1974.
8. Щербина Г. В. Матем. физика и функц. анализ, т. V. ФТИНТ, Харьков, 1974.

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта,
Физико-технический институт низких температур АН УССР

Поступила в редакцию 6 января 1975 г.