A. A. Tuganbaev, Automorphism-extendable modules, *Diskr. Mat.*, 2015, Volume 27, Issue 2, 106–111

https://www.mathnet.ru/eng/dm1328

Дискретная математика

том 27 выпуск 2 * 2015

УДК 512.55 DOI 10.4213/dm1328

Автоморфизм-продолжаемые модули

© 2015 г. А. А. Туганбаев*

Исследуются модули, у которых все автоморфизмы подмодулей продолжаются до эндоморфизмов (автоморфизмов) всего модуля.

Автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований. Проект 08-01-00693-а: Структурная теория колец, проект 14-01-000452-А.

Ключевые слова: автоморфизм-продолжаемый модуль, автоморфизм-инвариантный модуль, сильно автоморфизм-продолжаемый модуль.

Данная работа является продолжением статьи [9]. Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули унитарными. Подмодуль M модуля E называется *характеристическим*, если $\alpha(M) \subseteq M$ для каждого автоморфизма α модуля E.

Рассмотрим три условия на модуль M.

I) M – *автоморфизм-инвариантный* модуль, т.е. M – характеристический подмодуль своей инъективной оболочки. Автоморфизм-инвариантные модули изучались в ряде работ; см., например, [1], [2], [3], [5], [6], [10], [12]. В [2; Theorem 16] доказано, что модуль M является автоморфизм-инвариантным в точности тогда, когда M – *псевдоинъективный* модуль, т.е. если для любого подмодуля X в M каждый мономорфизм $X \to M$ продолжается до эндоморфизма модуля M. Псевдоинъективные модули изучались в ряде работ; см., например, [4], [7], [2].

II) M – *сильно автоморфизм-продолжаемый* модуль, т.е. для любого подмодуля X в M каждый автоморфизм модуля X продолжается до автоморфизма модуля M.

III) M – *автоморфизм-продолжаемый* модуль, т.е. для любого подмодуля X в M каждый автоморфизм модуля X продолжается до эндоморфизма модуля M. Автоморфизм-продолжаемые и сильно автоморфизм-продолжаемые модули изучались в работах [9] и [11].

Замечание 1. Импликация I) $\Rightarrow$ II) доказана в лемме 3 данной работы, а импликация II) $\Rightarrow$ III) очевидна. В общем случае импликация II) $\Rightarrow$ I) не верна. Действительно, аддитивная группа рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является инъективной оболочкой модуля $\mathbb{Z}$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Кроме того, $\mathbb{Z}$ не является автоморфизм-инвариантным модулем, поскольку $\alpha(\mathbb{Z}) \not\subseteq \mathbb{Z}$, где $\alpha\colon q \to q/2$ – автоморфизм $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Q}$. Тем не менее, непосредственно проверяется, что любой нетождественный автоморфизм α произвольного ненулевого подмодуля X модуля

*Место работы: Национальный исследовательский университет ”МЭИ”, e-mail: tuganbaev@gmail.com

$\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ является умножением на -1; поэтому α продолжается до автоморфизма модуля $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$.

Замечание 2. Пусть A – кольцо и M – правый A-модуль. Автору не известно, верна ли импликация III) $\Rightarrow$ II) для произвольного модуля M. В [11] доказано, что импликация III) $\Rightarrow$ II) верна в следующих случаях:

1) $M = X \oplus T$, где X – несингулярный модуль, T – инъективный модуль (в частности, импликация III) $\Rightarrow$ II) верна для несингулярных модулей);

2) A – ограниченное нетерово первичное кольцо. В частности, импликация III) $\Rightarrow$ II) верна для модулей над коммутативными дедекиндовыми кольцами.

Замечание 3. Если M – артинов (например, конечный) модуль, то по теореме 2 из [9] M является автоморфизм-продолжаемым модулем в точности тогда, когда M – автоморфизм-инвариантный модуль.

В связи с замечаниями 1, 2 и 3 мы сформулируем теорему 1, которая применима к конечным кольцам и является основным результатом данной работы.

Теорема 1. *Пусть A – кольцо.*

1) *Если A полупримарно (например, если кольцо A конечно), то автоморфизм-продолжаемые A-модули совпадают с автоморфизм-инвариантными модулями.*

2) *Если кольцо A нетерово справа, то автоморфизм-продолжаемые правые A-модули совпадают с сильно автоморфизм-продолжаемыми модулями.*

Доказательство теоремы 1 разбито на ряд утверждений, некоторые из которых представляют самостоятельный интерес. Приведем необходимые определения и обозначения.

Модуль M называется *нетеровым*, если M не содержит бесконечных строго возрастающих цепей подмодулей. Слова типа “A – нетерово кольцо” означают, что A_A и ${}_AA$ – нетеровы модули. Подмодуль X модуля M называется *существенным*, если $X \cap Y \neq 0$ для любого ненулевого подмодуля Y из M; в этом случае M называется *существенным расширением* подмодуля X. Модуль E называется *инъективным*, если для любого модуля X и каждого подмодуля Y в X любой гомоморфизм $Y \to E$ продолжается до гомоморфизма $X \to E$. Если E – инъективный модуль и E – существенное расширение модуля M, то E – называется *инъективной оболочкой* модуля M. Прямые суммы простых модулей называются *полупростыми* модулями. Для модуля M через $\mathrm{Soc}(M)$ обозначается *цоколь* модуля M, т.е. $\mathrm{Soc}(M)$ – наибольший полупростой подмодуль модуля M ($\mathrm{Soc}(M) = 0$, если M не содержит полупростых подмодулей). Говорят, что модуль M имеет *конечную цокольную длину* n, если M содержит такую строго возрастающую конечную цепь (цокольный ряд) подмодулей $M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n$, что $M_0 = 0$, $M_n = M$, M_i/M_{i-1} – цоколь модуля M/M_{i-1}, причем M/M_{i-1} – существенное расширение ненулевого полупростого модуля M_i/M_{i-1}, $i = 1, \ldots, n$. Кольцо A называется *наследственным справа*, если каждый его правый идеал изоморфен прямому слагаемому прямой суммы изоморфных копий модуля A_A. Правый модуль M над кольцом A называется *несингулярным*, если M не имеет таких ненулевых элементов m, что правый идеал $\{a \in A \,|\, ma = 0\}$ является существенным правым идеалом в A. Кольцо A называется *ограниченным справа*, если каждый его существенный правый идеал содержит ненулевой идеал кольца A. Кольцо A называется *первичным*, если произведение любых двух его ненулевых идеалов не равно нулю. Кольцо A называется *полупримарным*, если его радикал Джекобсона нильпотентен, а фактор-кольцо $A/J(A)$ является полупростым кольцом.

Лемма 1. *Пусть M – модуль.*

1) *Для любого подмодуля X' в M каждый эндоморфизм (соотв. автоморфизм) модуля X' продолжается до эндоморфизма (соотв. автоморфизма) некоторого существенного подмодуля X в M.*
2) *M является автоморфизм-продолжаемым в точности тогда, когда для любого существенного подмодуля X в M каждый автоморфизм модуля X продолжается до эндоморфизма модуля M.*
3) *M является сильно автоморфизм-продолжаемым в точности тогда, когда для любого существенного подмодуля X в M каждый автоморфизм модуля X продолжается до автоморфизма модуля M.*

Доказательство. 1), 2) Утверждения доказаны в [9; Лемма 1].

3) Утверждение вытекает из 1).

Лемма 2. *Пусть M – модуль и E – инъективная оболочка модуля M. Равносильны условия:*

1) *M – автоморфизм-инвариантный модуль;*
2) *$M = \alpha(M) = \alpha^{-1}(M)$ для любого автоморфизма α модуля E;*
3) *каждый изоморфизм между любыми существенными подмодулями модуля M продолжается до эндоморфизма модуля M;*
4) *каждый изоморфизм между любыми существенными подмодулями модуля M продолжается до автоморфизма модуля M.*

Доказательство. Импликации 1) $\Rightarrow$ 2) и 4) $\Rightarrow$ 3) очевидны.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) следует из того, что $\alpha(M) \subseteq M$ и $\alpha^{-1}(M) \subseteq M$.

Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 3) доказана в [9; Лемма 2].

2) $\Rightarrow$ 4). Пусть X и Y – существенные подмодули модуля M и $f\colon X \to Y$ – изоморфизм. Так как инъективная оболочка E модуля M является существенным расширением модуля M и M – существенное расширение модулей X и Y, то E – существенное расширение модулей X и Y. Поскольку модуль E инъективен, то f продолжается до эндоморфизма α модуля E. Тогда $X \cap \mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Ker}(f) = 0$. Поскольку E – существенное расширение модуля X, то $\mathrm{Ker}(\alpha) = 0$, α – мономорфизм и модуль $\alpha(E)$ инъективен. Тогда $\alpha(E)$ – прямое слагаемое модуля E и $Y = f(X) = \alpha(X) \subseteq \alpha(E)$. Так как E – существенное расширение модуля Y, то $\alpha(E)$ – существенное прямое слагаемое модуля E. Поэтому $E = \alpha(E)$ и α – автоморфизм модуля E. По условию 2) $M = \alpha(M) = \alpha^{-1}$. Поэтому α индуцирует автоморфизм g модуля M, который является искомым продолжением изоморфизма f.

Лемма 3. *Если M – автоморфизм-инвариантный модуль, то M – сильно автоморфизм-продолжаемый модуль.*

Доказательство. Пусть X – подмодуль в M и f – автоморфизм модуля X. Надо доказать, что f продолжается до автоморфизма модуля M. По лемме 1(3) без ограничения общности можно считать, что X – существенный подмодуль в M. Так как f – изоморфизм существенного подмодуля X автоморфизм-инвариантного модуля M на существенный подмодуль X в M, то по лемме 2 f продолжается до автоморфизма модуля M.

Лемма 4. *Пусть M – автоморфизм-продолжаемый модуль и для любого эндоморфизма $h \in \operatorname{End}(M)$, ядро которого является существенным подмодулем в M, эндоморфизм $1_M - h$ модуля M является автоморфизмом. Тогда M – сильно автоморфизм-продолжаемый модуль.*

Доказательство. Пусть X – подмодуль в M и f – автоморфизм модуля X. Надо доказать, что f продолжается до автоморфизма модуля M. По лемме 1(3) без ограничения общности можно считать, что X – существенный подмодуль в M. Так как M – автоморфизм-продолжаемый модуль, то f и f^{-1} продолжаются до эндоморфизмов α и β модуля M соответственно. Обозначим через h_1 и h_2 эндоморфизмы $1_M - \beta\alpha$ и $1_M - \alpha\beta$ модуля M соответственно. Так как $h_1(X) = 0 = h_2(X)$, то $\operatorname{Ker}(h_1)$ и $\operatorname{Ker}(h_2)$ – существенные подмодули в M. Так как $\beta\alpha = 1_M - h_1$ и $\alpha\beta = 1_M - h_2$, то по условию $\beta\alpha$ и $\alpha\beta$ – автоморфизмы модуля M. Поэтому α – автоморфизм модуля M.

Лемма 5. *Пусть M – автоморфизм-продолжаемый модуль и для каждого элемента $x \in M$ и любого эндоморфизма $h \in \operatorname{End}(M)$, ядро которого является существенным подмодулем в M, существует такое натуральное число $n = n(x, h)$, что $h^n(x) = 0$. Тогда M – сильно автоморфизм-продолжаемый модуль.*

Доказательство. Пусть $h \in \operatorname{End}(M)$ и $\operatorname{Ker}(h)$ – существенный подмодуль в M. По лемме 4 достаточно доказать, что эндоморфизм $1_M - h$ модуля M является автоморфизмом. Составим формальный ряд $1_M + \sum_{k=1}^{\infty} h^k$. Так как для каждого элемента $x \in M$ существует такое натуральное число $n = n(x, h)$, что $h^n(x) = 0$, то $1_M + \sum_{k=1}^{\infty} h^k$ – корректно определенный эндоморфизм модуля M. Непосредственно проверяется, что

$$(1_M - h)(1_M + \sum_{k=1}^{\infty} h^k) = (1_M + \sum_{k=1}^{\infty} h^k)(1_M - h) = 1_M.$$

Поэтому $1_M - h$ – автоморфизм модуля M.

Предложение 1. *Пусть M – автоморфизм-продолжаемый модуль и каждый циклический подмодуль модуля M является нетеровым модулем. Тогда M – сильно автоморфизм-продолжаемый модуль.*

Доказательство. Пусть X – произвольный ненулевой циклический подмодуль модуля M и h – такой эндоморфизм модуля M, что $\operatorname{Ker}(h)$ – существенный подмодуль в M. По лемме 5 достаточно доказать, что $h^n(X) = 0$ для некоторого натурального числа n. Обозначим $X_0 = 0$ и $X_i = X \cap \operatorname{Ker}(h^i)$, $i = 1, 2, 3 \ldots$. Тогда $X_{i-1} \subseteq X_i$ и $h(X_i) \subseteq h(X_{i-1})$, $i = 1, 2, 3 \ldots$. По условию X – нетеров модуль. Поэтому существует такое натуральное число n, что $X_n = X_{n+1}$. Пусть $f\colon X \to M$ – ограничение гомоморфизма h^n на модуль X. Так как $X_n = X \cap \operatorname{Ker}(h_n) = \operatorname{Ker}(f)$, то гомоморфизм f индуцирует изоморфизм $g\colon X/X_n \to g(X/X_n) \subseteq M$. Так как $\operatorname{Ker}(h)$ – существенный подмодуль модуля M, то $\operatorname{Ker}(h) \cap g(X/X_n)$ – существенный подмодуль в $g(X/X_n)$. Поскольку $g\colon X/X_n \to g(X/X_n)$ – изоморфизм, то $g^{-1}(\operatorname{Ker}(h) \cap g(X/X_n))$ – существенный подмодуль в X/X_n. Обозначим через Y – полный прообраз в X подмодуля $g^{-1}(\operatorname{Ker}(h) \cap g(X/X_n))$ в X/X_n при действии g. Тогда

$$h^{n+1}(Y) = h(h^n(Y)) = h(f(Y)) = h(g(g^{-1}(\operatorname{Ker}(h) \cap g(X/X_n)))) \subseteq$$
$$\subseteq h(\operatorname{Ker}(h) \cap g(X/X_n)) = 0.$$

Поэтому $Y \subseteq X_{n+1}$ и $Y/X \subseteq X_{n+1}/X_n = 0$. Тогда $\mathrm{Ker}(h) \cap g(X/X_n) = g(Y/X) = 0$. Так как $\mathrm{Ker}(h) \cap g(X/X_n)$ – существенный подмодуль в $g(X/X_n)$, то $g(X/X_n) = 0$. Поэтому $h^n(X) = f(X) = g(X/X_n) = 0$, что и требовалось доказать.

Лемма 6. *Если M – сильно автоморфизм-продолжаемый модуль и X – характеристический подмодуль в M, то X – сильно автоморфизм-продолжаемый модуль.*

Доказательство. Пусть Y – подмодуль в X и f – автоморфизм модуля X. Так как M – сильно автоморфизм-продолжаемый модуль, то f продолжается до автоморфизма α модуля M. Поскольку X – характеристический подмодуль в M, то автоморфизм α индуцирует требуемый автоморфизм g модуля X, являющийся продолжением автоморфизма f модуля Y.

Лемма 7. *Пусть M – модуль конечной цокольной длины n.*

1) *$h^n(M) = 0$ для любого эндоморфизма $h \in \mathrm{End}(M)$ с существенным в M ядром.*

2) *Если M – автоморфизм-продолжаемый модуль, то M – сильно автоморфизм-продолжаемый модуль.*

Доказательство. 1) Будем использовать индукцию по n. При $n = 1$ утверждение следует из того, что любой существенный подмодуль полупростого модуля совпадает со всем модулем. Допустим, что утверждение верно для модулей конечной цокольной длины $n-1$. Модуль M конечной цокольной длины n содержит такой подмодуль X, что X – модуль конечной цокольной длины $n-1$ и M/X – полупростой модуль. По предположению индукции $X \subseteq \mathrm{Ker}(h^{n-1})$. Кроме того, M/X – полупростой модуль. Поэтому $h^{n-1}(M)$ – полупростой модуль. Тогда $h^{n-1}(M)$ содержится в существенном подмодуле $\mathrm{Ker}(h)$ модуля M. Поэтому $h^n(M) = 0$.

2) Утверждение следует из 1) и леммы 5.

Предложение 2. *Если M – автоморфизм-продолжаемый модуль конечной цокольной длины n, то M – автоморфизм-инвариантный модуль.*

Доказательство. Пусть $M \neq 0$. Будем вести индукцию по n. При $n = 1$ M – полупростой модуль; в частности, M – автоморфизм-инвариантный модуль.

Допустим, что каждый автоморфизм-продолжаемый модуль конечной цокольной длины $n-1$ – автоморфизм-инвариантный модуль. Модуль M содержит такую строго возрастающую конечную цепь подмодулей $M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n$, что $M_0 = 0$, $M_n = M$, M_i/M_{i-1} – цоколь модуля M/M_{i-1}, причем M/M_{i-1} – существенное расширение полупростого модуля M_i/M_{i-1}, $i = 1, \ldots, n$. Непосредственно проверяется, что M_{n-1} – характеристический подмодуль в $M = M_n$. По лемме 7(2) M – сильно автоморфизм-продолжаемый модуль. По лемме 6 M_{n-1} – сильно автоморфизм-продолжаемый модуль конечной цокольной длины $n-1$. По предположению индукции M_{n-1} – автоморфизм-инвариантный модуль. Пусть E – инъективная оболочка модуля M и α – автоморфизм модуля E. Надо доказать, что $\alpha(M) \subseteq M$.

Так как E – существенное расширение модуля M и M – существенное расширение модуля M_1, то E – существенное расширение полупростого модуля M_1, лежащего в M_{n-1}. Поэтому E – инъективная оболочка автоморфизм-инвариантного модуля M_{n-1}. Поэтому $M_{n-1} = \alpha(M_{n-1})$ и α индуцирует автоморфизм f подмодуля M_{n-1} сильно автоморфизм-продолжаемого модуля M. Следовательно, f продолжается до автоморфизма g модуля M. Обозначим через β – ограничение α на модуль M. Если $(\beta - g)(M) = 0$, то $\alpha(M) = \beta(M) = g(M) = M$, что и требовалось.

Допустим, что $(\beta - g)(M) \neq 0$. Обозначим $X = M_1 \cap (\beta - g)(M) \subseteq M$. Так как M_1 – существенный подмодуль в E, то X – существенный подмодуль ненулевого модуля $(\beta - g)(M)$. Кроме того, $(\beta - g)(M_{n-1}) = (f - g)(M_{n-1}) = 0$. Пусть Y – полный прообраз модуля X в модуле M при действии $\beta - g$. Так как X – существенный подмодуль ненулевого модуля $(\beta - g)(M)$ и $(\beta - g)(M_{n-1}) = 0$, то Y/M_{n-1} – существенный подмодуль полупростого модуля M/M_{n-1}. Поэтому

$$M/M_{n-1} = Y/M_{n-1}, \quad M = Y,$$
$$\beta(M) = \beta(Y) \subseteq g(Y) + (\beta - g)(Y) \subseteq M + M_1 = M.$$

Тогда $\alpha(M) = \beta(M) \subseteq M$, что и требовалось.

Замечание 4. Хорошо известно, что каждый модуль над полупримарным кольцом является модулем конечной цокольной длины.

Окончание доказательства теоремы 1. Утверждение 1) теоремы 1 вытекает из замечания 4, предложения 2 и леммы 3. Утверждение 2) теоремы 1 вытекает из предложения 1 и того, что все циклические правые модули над нетеровыми справа кольцами являются нетеровыми модулями.

Замечание 5. Если A – полупримарное кольцо, то автоморфизм-продолжаемые A-модули совпадают с сильно автоморфизм-продолжаемыми A-модулями.

Замечание 5 вытекает из леммы 7(2) и замечания 4.

Список литературы

1. Alahmadi A., Er N, Jain S.K., “Modules which are invariant under monomorphisms of their injective hulls”, *J. Australian Math. Soc.*, **79**:3 (2005), 2265-2271.
2. Er N., Singh S., Srivastava A.K., “Rings and modules which are stable under automorphisms of their injective hulls”, *J. Algebra*, **379** (2013), 223-229.
3. Guil Asensio P.A., Srivastava A.K., “Automorphism-invariant modules satisfy the exchange property”, *J. Algebra*, **388** (2013), 101-106.
4. Jain S.K., Singh S., “Quasi-injective and pseudo-injective modules”, *Canadian Math. Bull.*, **18**:3 (1975), 359-366.
5. Lee T.K., Zhou Y., “Modules which are invariant under automorphisms of their injective hulls”, *J. Algebra Appl.*, **6**:2 (2013).
6. Singh S., Srivastava A.K., “Rings of invariant module type and automorphism-invariant modules”, *Contemp. Math.*, **609**, 299–311.
7. Teply M.L., “Pseudo-injective modules which are not quasiinjective”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **49**:2 (1975), 305-310.
8. Tuganbaev A., *Semidistributive Modules and Rings*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1998.
9. Туганбаев А.А., “Автоморфизмы подмодулей и их продолжение”, *Дискрет. матем.*, **25**: 1 (2013), 144–151.
10. Туганбаев А.А., “Характеристические подмодули инъективных модулей”, *Дискрет. матем.*, **25**:2 (2013), 85–90.
11. Туганбаев А.А., “Продолжения автоморфизмов подмодулей”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **18**: 3 (2013), 179–198.
12. Туганбаев А.А., “Характеристические подмодули инъективных модулей над строго первичными кольцами”, *Дискрет. матем.*, **26**: 3 (2014), 121–126.

Статья поступила 05.05.2015.