А. А. Арутюнов, Редукция нелокальных псевдодифференциальных операторов на некомпактном многообразии к классическим псевдодифференциальным операторам на компактном многообразии удвоенной размерности, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 4, 493–502

DOI: 10.4213/mzm10523

Математические заметки

Том 97 выпуск 4 апрель 2015

УДК 515.168.5+517.983.37

Редукция нелокальных псевдодифференциальных операторов на некомпактном многообразии к классическим псевдодифференциальным операторам на компактном многообразии удвоенной размерности

А. А. Арутюнов

В настоящей работе получены критерии фредгольмовости и показана формула для индекса нелокальных псевдодифференциальных операторов, действующих в пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, порожденных сдвигами и умножениями на периодические функции. Эти результаты существенно отличаются от известных автору работ по данной тематике тем, что впервые получены критерии фредгольмовости и получена формула для индекса нелокальных псевдодифференциальных операторов, действующих над некомпактным многообразием $\mathbb{R}^n$.

Библиография: 14 названий.

DOI: 10.4213/mzm10523

1. Введение

Задача вычисления индекса эллиптических псевдодифференциальных операторов была впервые поставлена Гельфандом в 1960 г. в работе [1]. В 1962 г. была опубликована известная работа [2], в которой приведена формула Атьи–Зингера, позволяющая вычислять индекс эллиптического псевдодифференциального оператора на компактном многообразии через гомотопические инварианты.

Одним из основных направлений развития задачи об изучении индекса эллиптических операторов является изучение нелокальных псевдодифференциальных операторов (ПДО со сдвигом). Как и в случае обычных псевдодифференциальных операторов, есть большое количество весьма общих работ, в которых вычисляется индекс для нелокальных псевдодифференциальных операторов на компактных многообразиях. Так, в работе [3] показана формула для вычисления индекса нелокальных ПДО с конечной группой сдвигов. Для случая бесконечных групп отметим монографию [4], в которой данная задача решается при изометричном действии группы, т.е. сохраняет некоторую метрику на многообразии.

В настоящей работе получены критерии фредгольмовости и показана формула для индекса нелокальных псевдодифференциальных операторов, действующих в пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, порожденных сдвигами и умножениями на периодические функции. Эти результаты существенно отличаются от указанных выше работ тем, что впервые получены критерии фредгольмовости и получена формула для индекса нелокальных псевдодифференциальных операторов, действующих над некомпактным многообразием $\mathbb{R}^n$.

Нам потребуются результаты, полученные ранее в работах [5] и [6] автором в соавторстве с проф. А. С. Мищенко. Приведем основные результаты этих работ.

Определим класс символов псевдодифференциальных операторов, действующих в пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, эквивалентный классу так называемых SG-операторов (см. [7], [8]). Класс интересующих нас символов состоит из бесконечно-дифференцируемых функций $\sigma(x,\xi)$, удовлетворяющих при некоторых вещественных параметрах (m_1,m_2) и при всех мультииндексах α, β неравенству

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|x|)^{m_1-|\alpha|}(1+|\xi|)^{m_2-|\beta|} \qquad \text{для всех} \quad x,\xi. \tag{1.1}$$

Класс таких символов мы будем обозначать через $\mathcal{S}^{m_1,m_2}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, а пару (m_1,m_2) будем называть *обобщенным порядком* роста символа. Псевдодифференциальные операторы, действующие в пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, с символами из класса $\mathcal{S}^{m_1,m_2}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ мы будем называть *биградуированными операторами* обобщенного порядка (m_1,m_2).

Как показано в работах [5] и [6], операторы с такими символами отождествляются с псевдодифференциальными операторами, действующими в пространстве гладких сечений некоторого одномерного расслоения тора $\mathbb{T}^{2n}$ удвоенной размерности. Это пространство $M(\mathbb{R}^{2n})$ можно также понимать как функциональное пространство, состоящее из бесконечно-дифференцируемых функций, определенных на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, удовлетворяющих условию косопериодичности. А именно, бесконечно-дифференцируемая функция $h(t,v)\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ лежит в пространстве $M(\mathbb{R}^{2n})$, если для нее выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} h(t+e,v) &= h(t,v),\\ h(t,v+e) &= e^{-2\pi i t e}h(t,v) \end{aligned} \tag{1.2}$$

для всякого целочисленного вектора $e\in\mathbb{Z}^n$. Здесь и далее запись te обозначает скалярное произведение векторов t и e.

Редукцию осуществляет преобразование Λ, определяемое следующим образом:

$$\Lambda\colon f(x)\to \sum_{u\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i u t} f(u+v). \tag{1.3}$$

Преобразование Λ устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $M(\mathbb{R}^{2n})$ (см. работы [5], [6]). Будем здесь и далее через $\mathbb{I}^n$ обозначать стандартный n-мерный единичный куб с вершинами $x_i\in\{0,1\}$, $i=1,\dots,n$.

Теорема 1. *Ряд (1.3) сходится абсолютно. Пространство Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ изоморфно пространству $M(\mathbb{R}^{2n})$ относительно отображения Λ. Обратное преобразование Λ^{-1} задается по формуле*

$$f(x) := \Lambda^{-1}h(t,v) = \int_{\mathbb{I}^n} h(t,x)\,dt. \tag{1.4}$$

Ранее теорема 1 в одномерном случае была приведена также в работе [4; лемма 12.1].

При помощи теоремы 1 в работах [5] и [6] указывается редукция класса псевдодифференциальных операторов над пространством шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ к псевдодифференциальным операторам над пространством $M(\mathbb{R}^{2n})$. Определим псевдодифференциальные операторы (см. [9; с. 28]).

Определение 1. Абстрактный оператор $A\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ будем называть *псевдодифференциальным оператором с символом* $\sigma(x,\xi)\in\mathcal{S}^{m_1,m_2}$, если он определяется по формуле

$$A\colon f(x)\to(2\pi)^{-n}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}e^{i\xi(x-y)}\sigma(x,\xi)f(y)\,dy\,d\xi,\qquad x,y,\xi\in\mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

Мы также будем пользоваться эквивалентным операторным видом записи последней формулы

$$A\colon f(x)\to\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\sigma(x,\xi)\mathcal{F}_{x\to\xi}f(x), \tag{1.6}$$

где $\mathcal{F}$ – преобразование Фурье.

Теперь приведем определение ПДО в пространстве $M(\mathbb{R}^{2n})$, которое отождествляется с пространством гладких сечений некоторого одномерного расслоения (см. [5]).

Рассмотрим функции на торе $\phi,\psi\in C^\infty(\mathbb{T}^{2n})$. Пусть их носители $\operatorname{supp}\phi$, $\operatorname{supp}\psi$ лежат в множестве U, где U – некоторая карта на торе, диффеоморфная $\mathbb{R}^{2n}$, и χ – диффеоморфизм между картой U и $\mathbb{R}^{2n}$.

Обозначим через χ^* изоморфизм, индуцированный диффеоморфизмом между пространством $\mathcal{D}(U)$ гладких функций с компактными носителями на карте U и пространством $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ гладких функций с компактным носителем в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$.

Обозначим через μ вложение $\mu\colon \mathcal{D}(U)\hookrightarrow M(\mathbb{R}^{2n})$, определенное следующим образом.

Пусть отображение $p\colon \mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{T}^{2n}$ таково, что стандартный куб $\mathbb{I}^n$ изоморфен тору $\mathbb{T}^{2n}$ с точностью до отождествления точек на границе. Тогда возьмем карту $U\subset\mathbb{T}^{2n}$. Прообраз $p^{-1}(U)$ состоит из объединения несвязных областей $p^{-1}(U)=\coprod_{k\in\mathbb{Z}^n}V_k$. Не теряя общности, можно считать, что $V_0\subset\mathbb{I}^{2n}\subset\mathbb{R}^{2n}$. Возьмем отображение p_0^{-1} таким, что $pp_0^{-1}(v)=\mathrm{id}$ для всех $v\in V_0$. Определим вложение μ. Если $z\in\mathcal{D}(U)$, то $(\mu z)(p_0^{-1}x)=z(x)$ и продолжим эту функцию, определенную на множестве V_0, по условию косой периодичности (1.2).

Будем через $\phi\times$ обозначается оператор умножения на функцию ϕ. И обозначим сужение оператора $\widetilde{A}$ на карту U следующим образом:

$$\widetilde{A}_U=(\phi\times)\widetilde{A}(\psi\times)|_{\mathcal{D}(U)}. \tag{1.7}$$

Определим псевдодифференциальные операторы следующим образом (см. [10; § 2, с. 19]).

Определение 2. Абстрактный оператор $\widetilde{A}\colon M(\mathbb{R}^{2n})\to M(\mathbb{R}^{2n})$ будем называть *псевдодифференциальным оператором*, если для любых определенных выше функций ϕ, ψ существует такой псевдодифференциальный оператор $\widetilde{B}_U$, действующий в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
M(\mathbb{R}^{2n}) \arrow[r, "(\phi\times)\,\widetilde{A}(\psi\times)"'] & M(\mathbb{R}^{2n}) \\
\mathcal{D}(U) \arrow[u, "\mu"] \arrow[r, "\widetilde{A}_U"'] \arrow[d, "\chi^*"'] & \mathcal{D}(U) \arrow[u, "\mu"'] \arrow[d, "\chi^*"] \\
\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n}) \arrow[r, "(\chi^*(\phi)\times)\widetilde{B}_U\chi^*(\psi)\times"'] & \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})
\end{tikzcd} \tag{1.8}$$

коммутативна.

Сразу заметим, что в силу определения оператора $\widetilde{A}_U$ верхняя часть диаграммы (1.8) коммутативна.

Пусть A является ПДО с символом $\sigma(x,\xi)$ обобщенного порядка (m_1,m_2). Рассмотрим оператор $\widetilde{A}=\Lambda A\Lambda^{-1}$, действующий в пространстве $M(\mathbb{R}^{2n})$.

Теорема 2. *Оператор $\widetilde{A}$ является псевдодифференциальным оператором в пространстве $M(\mathbb{R}^{2n})$ с символом $\sigma(\xi_1/(2\pi)+v,\xi_2)$. Для любых $2n$-мерных мультииндексов $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ и $\beta=(\beta_1,\beta_2)$ найдется такая неотрицательная константа $C_{\alpha,\beta}$, что имеет место неравенство*

$$\left|\partial^\beta_{t,v}\partial^\alpha_{\xi_1,\xi_2}\sigma\left(\frac{\xi_1}{2\pi}+v,\xi_2\right)\right| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|\xi_1|)^{m_1-|\alpha_1|}(1+|\xi_2|)^{m_2-|\alpha_2|}. \tag{1.9}$$

Оператор $\widetilde{A}$ задается по формуле

$$\widetilde{A}h(t,v)=\iiiint_{\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}} e^{i\xi_1(t-t_y)}e^{i\xi_2(v-v_y)}\sigma\left(\frac{\xi_1}{2\pi}+v,\xi_2\right)h(t_y,v_y)\,đ\xi_1 đ\xi_2\,dt_y\,dv_y. \tag{1.10}$$

Здесь и далее будем пользоваться обозначением $đ\xi=(2\pi)^{-n}\,d\xi$.

Формулу (1.10) следует понимать в следующем смысле. Если взять функцию $h\in M(\mathbb{R}^{2n})$ и применить к ней как к обобщенной функции оператор $\widetilde{A}$, определенный в формуле (1.10) и действующий, вообще говоря, в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$, то получается функция, лежащая в пространстве $M(\mathbb{R}^{2n})$.

Теорема 2 доказана в работе [6].

Поскольку пространство $M(\mathbb{R}^{2n})$ отождествлено с пространством гладких сечений расслоения тора, к оператору $\widetilde{A}$ в случае, если он является эллиптическим псевдодифференциальным оператором, можно применять формулу Атьи-Зингера. Напомним, что символ оператора называется *эллиптическим*, если он обратим. Псевдодифференциальный оператор называется *эллиптическим*, если его символ эллиптический [2; с. 130].

Теорема 3. *Пусть A и $\widetilde{A}$ – операторы из условия теоремы 2 обобщенного порядка (m_1,m_2). Если оператор $\widetilde{A}$ является эллиптическим, то для любых вещественных параметров s_1, s_2 операторы A и $\widetilde{A}$ продолжаются до фредгольмовых операторов*

$$\begin{aligned} &A\colon H^{s_1,s_2}\to H^{s_1-m_1,s_2-m_2},\\ &\widetilde{A}\colon H^{s_1,s_2}_M\to H^{s_1-m_1,s_2-m_2}_M. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Имеет место следующая формула для индекса

$$\operatorname{index} A = \operatorname{index} \widetilde{A} = \left(\operatorname{ch}\left[\sigma\left(\frac{\xi_1}{2\pi} + v, \xi_2\right)\right], [\mathbb{T}^{2n}]\right). \tag{1.12}$$

В формуле (1.12) мы обозначаем через $\operatorname{ch}[\sigma]$ характер Черна (см. [11; с. 81]) расслоения, задаваемого символом $[\sigma]$, приведенным к базе $\mathbb{T}^{2n}$ при помощи изоморфизма Тома [4; с. 141].

Теорема 3 доказана в работе [6].

2. Применение редукции к случаю нелокальных ПДО

Редукция, определенная формулой (1.3), порождающая редукцию пространства псевдодифференциальных операторов, действующих в пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ к псевдодифференциальным операторам, действующим в пространстве $M(\mathbb{R}^{2n})$, не исчерпывает всех действующих в пространстве $M(\mathbb{R}^{2n})$ псевдодифференциальных операторов. Это позволяет расширить класс изученных в работах [5] и [6] псевдодифференциальных операторов, дополнив их нелокальными псевдодифференциальными операторами (псевдодифференциальными операторами со сдвигами).

2.1. Расширение класса ПДО в пространстве $M(\mathbb{R}^{2n})$. Расширим сначала класс рассматриваемых символов $\mathcal{S}^{m_1,m_2}$.

Определение 3. Будем говорить, что бесконечно-дифференцируемая функция $\widehat{\sigma}(a,b,c,d) \in C^\infty(\mathbb{R}^{4n})$ лежит в классе функций $\mathcal{S}_M^{m_1,m_2}$, если она периодична по первым двум переменным

$$\widehat{\sigma}(a+e_1, b+e_2, c, d) = \widehat{\sigma}(a,b,c,d) \qquad \text{для всех} \quad e_{1,2} \in \mathbb{Z}^n \tag{2.1}$$

и, кроме того, для всяких n-мерных мультииндексов α, β существует такая неотрицательная константа $C_{\alpha,\beta}$, что выполняется неравенство

$$|\partial_c^\alpha \partial_d^\beta \widehat{\sigma}(a,b,c,d)| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|c|)^{m_1-|\alpha|}(1+|d|)^{m_2-|\beta|}. \tag{2.2}$$

Пару (m_1, m_2) мы будем называть *обобщенным порядком роста* символа $\widehat{\sigma}$.

Имеет место естественное вложение рассмотренного выше класса $\mathcal{S}^{m_1,m_2}$ в новый класс функций $\mathcal{S}_M^{m_1,m_2}$. А именно, функции $\sigma(c,d) \in \mathcal{S}^{m_1,m_2}$ поставим в соответствие функцию $\widehat{\sigma}(a,b,c,d) \equiv \sigma(c,d)$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}^n$. Для такой функции $\widehat{\sigma}$ очевидно будут выполняться условия из определения 3, следовательно, введенный класс $\mathcal{S}_M^{m_1,m_2}$ содержит в себе класс $\mathcal{S}^{m_1,m_2}$.

Пусть функция $\widehat{\sigma}$ обладает обобщенным порядком (m_1,m_2): $\widehat{\sigma} \in \mathcal{S}_M^{m_1,m_2}$. Тогда в силу периодичности по первым двум группам переменных она разложима в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье

$$\widehat{\sigma}(t,v,c,d) = \sum_{l,k\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i l t} e^{2\pi i k v} \widehat{\sigma}_{l,k}(c,d), \tag{2.3}$$

где функции $\widehat{\sigma}_{l,k}(c,d)$ определяются по формуле

$$\widehat{\sigma}_{l,k}(c,d) = \iint_{\mathbb{T}^{2n}} \widehat{\sigma}(a,b,c,d) e^{2\pi i l a} e^{2\pi i k b}\, da\, db. \tag{2.4}$$

Предложение 1. *Функции $\widehat{\sigma}_{l,k}$, определенные формулой* (2.4), *принадлежат пространству $\mathcal{S}^{m_1,m_2}$.*

Доказательство. Бесконечная дифференцируемость функций $\sigma_{l,k}$ следует из теорем о непрерывности и гладкости интегралов, зависящих от параметра. Значит, для доказательства предложения, остается проверить, что функции $\widehat{\sigma}_{l,k}$ удовлетворяют неравенству (1.1). Зафиксируем мультииндексы α, β и найдем такую неотрицательную константу $C_{\alpha,\beta}$, что для всех $c, d \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$\left| \iint_{\mathbb{I}^{2n}} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \widehat{\sigma}(a,b,c,d) e^{2\pi i l a} e^{2\pi i k b}\, da\, db \right| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|c|)^{m_1}(1+|d|)^{m_2}. \tag{2.5}$$

Преобразуем левую часть неравенства (2.5):

$$\begin{aligned}
&\left| \iint_{\mathbb{I}^{2n}} \partial_x^\alpha\, \partial_\xi^\beta \widehat{\sigma}(a,b,c,d) e^{2\pi i(la+kb)}\, da\, db \right| \\
&\qquad \leqslant \left| \iint_{\mathbb{I}^{2n}} \sup_{a,b\in\mathbb{I}^{2n}} \partial_x^\alpha\, \partial_\xi^\beta \widehat{\sigma}(a,b,c,d) e^{2\pi i(la+kb)}\, da\, db \right| \\
&\qquad = \left| \sup_{a,b\in\mathbb{I}^{2n}} \partial_x^\alpha\, \partial_\xi^\beta \widehat{\sigma}(a,b,c,d) \right| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|c|)^{m_1}(1+|d|)^{m_2}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

при некоторой неотрицательной константе $C_{\alpha,\beta}$ в силу неравенства (2.2) из определения 3.

Формально определим оператор $\widetilde{A}$, действующий, вообще говоря, в пространстве обобщенных функций, по символу $\widehat{\sigma} \in \mathcal{S}_M^{m_1,m_2}$ следующим образом:

$$\widetilde{A}h(t,v) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi_2\to v}\mathcal{F}^{-1}_{\xi_1\to t}\widehat{\sigma}\left(t, v, \frac{\xi_1}{2\pi} + v, \xi_2\right)\mathcal{F}_{v_y\to\xi_2}\mathcal{F}_{t_y\to\xi_1}h(t_y, v_y). \tag{2.7}$$

Будем говорить, что $\widetilde{A}$ обладает *обобщенным порядком* (m_1, m_2). Пусть функция $\widehat{\sigma}(a,b,c,d) \in \mathcal{S}_M^{m_1,m_2}$.

Предложение 2. *Оператор $\widetilde{A}$, определенный формулой* (2.7), *действует в пространстве $M(\mathbb{R}^{2n})$:*

$$\widetilde{A}\colon M(\mathbb{R}^{2n}) \to M(\mathbb{R}^{2n}).$$

Иными словами, формула (2.7) определена для каждой функции $h(t,v) \in M(\mathbb{R}^{2n})$ и задает оператор, являющийся псевдодифференциальным оператором в пространстве $M(\mathbb{R}^{2n})$.

Доказательство. В силу неравенства (2.2) для всякой пары мультииндексов α, β имеет место неравенство

$$\begin{aligned}
&|\partial_t^\alpha \partial_v^\beta \widetilde{A}h(t,v)| \\
&\qquad = \left| \mathcal{F}^{-1}_{\xi_2\to v}\mathcal{F}^{-1}_{\xi_1\to t}\partial_t^\alpha\, \partial_v^\beta \widehat{\sigma}\left(t, v, \frac{\xi_1}{2\pi} + v, \xi_2\right)\mathcal{F}_{v_y\to\xi_2}\mathcal{F}_{t_y\to\xi_1}h(t_y, v_y) \right| \\
&\qquad \leqslant C_{\alpha,\beta}\bigl|\mathcal{F}^{-1}_{\xi_2\to v}\mathcal{F}^{-1}_{\xi_1\to t}(1+|\xi_1|)^{m_1-|\alpha|}(1+|\xi_2|)^{m_2-|\beta|}\mathcal{F}_{v_y\to\xi_2}\mathcal{F}_{t_y\to\xi_1}h(t_y, v_y)\bigr|.
\end{aligned}$$

Значит, для любой функции $h(t,v)$, лежащей в пространстве $M(\mathbb{R}^{2n})$, и для всякой пары мультииндексов α, β согласно теореме 2 значение $|\partial_t^\alpha\,\partial_v^\beta \widetilde{A}h(t,v)|$ ограничено сверху значением псевдодифференциального оператора с символом

$$C_{\alpha,\beta}(1+|\xi_1|)^{m_1-|\alpha|}(1+|\xi_2|)^{m_2-|\beta|}.$$

Значит, в каждой точке (t,v) определено значение функции $|\partial_t^\alpha\,\partial_v^\beta \widetilde{A}h(t,v)|$.

Непрерывность и дифференцируемость этой функции следует из теорем о непрерывности и дифференцируемости функций, зависящих от параметра [12; утверждение 1, с. 480, утверждение 2, с. 482]. Периодичность следует из периодичности функции $\widehat{\sigma}(t,v,\xi_1,\xi_2)$, косопериодичность – из теоремы 2.

Остается проверить псевдодифференциальность оператора $\widetilde{A}$. В карте U из доказательства теоремы 2 укажем символ $\widehat{\sigma}_U(t,v,\xi_1,\xi_2)$ оператора $\widetilde{B}_U$ из диаграммы (1.8) следующим образом, аналогичным доказательству теоремы 2, приведенному в работе [6]:

$$\widehat{\sigma}_U(t,v,\xi_1,\xi_2)=\widehat{\sigma}\biggl(\chi_1(t),\chi_2(v),\frac{\xi_1^*}{2\pi}+\xi_2(v),\xi_2^*\biggr).$$

Здесь мы пользуемся обозначениями из доказательства теоремы 4 работы [6]. В силу определения диффеоморфизма χ коммутативность диаграммы (1.8) следует из доказательства теоремы 4, приведенной в работе [6].

2.2. Нелокальные ПДО в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Определим теперь класс нелокальных псевдодифференциальных операторов (ПДО со сдвигом), действующих над пространством Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Обозначим через T_g параллельный перенос на вектор $g\in\mathbb{Z}^n$. То есть

$$T_g\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\qquad T_g\colon x\mapsto x-g. \tag{2.8}$$

Пусть A_{lk} – псевдодифференциальные операторы обобщенного порядка (m_1,m_2) для всех $l,k\in\mathbb{Z}^n$. Рассмотрим линейный непрерывный оператор A, действующий в пространстве Шварца $A\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 4. Если оператор A представим в виде

$$A=\sum_{l,k\in\mathbb{Z}^n}T_l e^{2\pi ikx}A_{l,k}, \tag{2.9}$$

то будем называть такой оператор *нелокальным псевдодифференциальным оператором обобщенного порядка* (m_1,m_2).

Обычно в литературе (см., например, [4], [3]) рассматривают более узкий класс операторов, у которых отличны от нуля только слагаемые $A_{l,0}$, т.е. рассматривается ряд (2.9) без умножения на периодические функции.

Ниже будут указаны условия, при которых операторный ряд (2.9) из определения 4 является оператором, действующим в пространстве Шварца.

Пусть оператор $\widetilde{A}$ – псевдодифференциальный оператор из формулировки предложения 2 обобщенного порядка (m_1,m_2), действующий в пространстве $M(\mathbb{R}^{2n})$.

Рассмотрим оператор $A = \Lambda^{-1}\widetilde{A}\Lambda$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\Lambda"'] \arrow[d, "A"'] & M(\mathbb{R}^{2n}) \arrow[d, "\widetilde{A}"] \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\Lambda"'] & M(\mathbb{R}^{2n}) \end{tikzcd} \tag{2.10}$$

Теорема 4. *Оператор A является нелокальным* ПДО *обобщенного порядка* (m_1, m_2) *и задается в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда*

$$A = \sum_{l,k} T_l e^{2\pi ikx} A_{\widehat{\sigma}_{l,k}}, \tag{2.11}$$

где $A_{\widehat{\sigma}_{l,k}}$ – это псевдодифференциальные операторы с символами $\widehat{\sigma}_{l,k}(x,\xi)$.

Доказательство. В силу предложения 1 действие оператора $\widetilde{A}$ на функцию $h(t,v) \in M(\mathbb{R}^{2n})$ может быть записано в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда

$$\widetilde{A}h(t,v) = \sum_{l,k\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi ilt} e^{2\pi ikv} \widetilde{A}_{\widehat{\sigma}_{l,k}} h(t,v), \tag{2.12}$$

где операторы $\widetilde{A}_{\widehat{\sigma}_{l,k}}$ – псевдодифференциальные операторы в пространстве $M(\mathbb{R}^{2n})$ обобщенного порядка (m_1, m_2) с символами $\widehat{\sigma}_{l,k}$. В силу эквивалентности норм в пространствах $M(\mathbb{R}^{2n})$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (см. [6; теорема 2]) для доказательства теоремы достаточно проверить коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\Lambda"'] \arrow[d, "T_l e^{2\pi ikx} A_{\sigma_{l,k}}"'] & M(\mathbb{R}^{2n}) \arrow[d, "e^{2\pi ilt} e^{2\pi ikv} \widetilde{A}_{\widehat{\sigma}_{l,k}}"] \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\Lambda"'] & M(\mathbb{R}^{2n}) \end{tikzcd} \tag{2.13}$$

при произвольных $l, k \in \mathbb{Z}^n$. Зафиксируем пару $(l,k) \in \mathbb{Z}^{2n}$ и функцию $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Обозначим $\Lambda f(x) = h(t,v)$. Вычислим образ функции $f(x)$ относительно композиции преобразования в левой части диаграммы и преобразования Λ

$$\Lambda[T_l e^{2\pi ikx} A_{\sigma_{l,k}} f(x)] = \sum_{u\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi iut} e^{2\pi ik(u+v)} [A_{\sigma_{l,k}} f](u+v-l) = e^{2\pi ilt} e^{2\pi ikv} \widetilde{A}_{\widehat{\sigma}_{l,k}} h(t,v).$$

Здесь мы воспользовались условием косопериодичности.

2.3. Сравнение нелокальных ПДО и ПДО в пространстве $M(\mathbb{R}^{2n})$. Теорема 4 позволяет дать определение символа нелокальных ПДО. А именно, зафиксируем функцию $\widehat{\sigma}(a,b,c,d) \in \mathcal{S}_M^{m_1,m_2}$. Определим нелокальный псевдодифференциальный оператор A

$$A = \widehat{\sigma}\left(\overset{4}{T_l}, \overset{3}{e^{2\pi ikx}}, \overset{2}{x}, \overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right). \tag{2.14}$$

В смысле монографии Маслова [13; с. 23; с. 47] будем говорить, что A – нелокальный псевдодифференциальный оператор с символом $\widehat{\sigma}$.

Теорема 4 дает возможность выяснить, при каких условиях на операторы A_g формальная запись нелокального ПДО из определения 4 корректно определяет нелокальный псевдодифференциальный оператор, т.е. при каких условиях оператор A действует в пространстве Шварца $A\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 3. *Оператор A из определения 4 корректно определен тогда и только тогда, когда абсолютно и равномерно сходится ряд*

$$\widehat{\sigma}(t, v, \xi_1, \xi_2) := \sum_{l,k \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i l t} e^{2\pi i k x} \sigma_{l,k}\left(\frac{\xi_1}{2\pi} + v, \xi_2\right), \tag{2.15}$$

где $\sigma_{l,k}$ – символ оператора $A_{l,k}$.

Доказательство. Пусть ряд в правой части выражения (2.15) сходится абсолютно и равномерно. Тогда оператор A, определенный следующим образом:

$$A = \sum_{l,k \in \mathbb{Z}^n} T_l e^{2\pi i k x} A_{\widehat{\sigma}_{l,k}}$$

в силу теоремы 4 действует в пространстве Шварца.

Проверим обратное утверждение. Если оператор A, определенный как

$$A = \sum_{l,k \in \mathbb{Z}^n} T_l e^{2\pi i k x} A_{\widehat{\sigma}_{l,k}},$$

действует в пространстве Шварца, значит, ряд в правой части последнего выражения сходится равномерно и абсолютно. Следовательно, и интересующий нас ряд (2.15) также сходится равномерно и абсолютно.

Из теоремы 3 вытекает следующее предложение, позволяющее вычислить индекс нелокального ПДО.

Теорема 5. *Пусть A и $\widetilde{A}$ – операторы из теоремы 4. Тогда, если символ оператора $\widetilde{A}$ эллиптический, то операторы A и $\widetilde{A}$ фредгольмовы в соответствующих нормах, т.е. для любых вещественных параметров $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ фредгольмовы операторы*

$$A\colon H^{s_1,s_2} \to H^{s_1-m_1,s_2-m_2}, \tag{2.16}$$

$$\widetilde{A}\colon H^{s_1,s_2}_M \to H^{s_1-m_1,s_2-m_2}_M. \tag{2.17}$$

Имеет место формула для индекса

$$\operatorname{index} A = \operatorname{index} \widetilde{A} = \left(\operatorname{ch}\left[\sigma\left(\frac{\xi_1}{2\pi} + v, \xi_2\right)\right], [\mathbb{T}^{2n}]\right), \tag{2.18}$$

где через $\operatorname{ch}[\sigma]$ обозначен характер Черна (см. [11; с. 81]) расслоения, задаваемого символом $[\sigma]$, приведенным к базе $\mathbb{T}^{2n}$ при помощи изоморфизма Тома.

Доказательство. Поскольку оператор $\widetilde{A}$ псевдодифференциален в пространстве $M(\mathbb{R}^{2n})$ и обладает эллиптическим символом, к нему можно применить теорему 3.

Фредгольмовость нелокальных операторов ранее изучалась в монографии [14]. Формула (2.18) для индекса эллиптического нелокального оператора, действующего в пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ранее в литературе по-видимому не встречалась.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора А. С. Мищенко за научное руководство и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] И. М. Гельфанд, “Об эллиптических уравнениях”, *УМН*, **15**:3 (1960), 121–132.

[2] M. F. Atiyah, I. M. Singer, “The index of elliptic operators on compact manifolds”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 422–433.

[3] А. Б. Антоневич, “Эллиптические псевдодифференциальные операторы с конечной группой сдвигов”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **37**:3 (1973), 663–675.

[4] V. E. Nazaikinskii, A. Yu. Savin, B. Yu. Sternin, *Elliptic Theory and Noncommutative Geometry. Nonlocal Elliptic Operators*, Oper. Theory Adv. Appl., **183**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.

[5] А. А. Арутюнов, А. С. Мищенко, “Редукция ПДО исчисления на некомпактном многообразии к компактному многообразию удвоенной размерности”, *Докл. РАН*, **451**:4 (2013), 369–373.

[6] А. А. Арутюнов, А. С. Мищенко, “Редукция исчисления псевдодифференциальных операторов на некомпактном многообразии к исчислению на компактном многообразии удвоенной размерности”, *Матем. заметки*, **94**:4 (2013), 488–505.

[7] F. Nicola, L. Rodino, *Global Pseudo-Differential Calculus on Euclidian Spaces*, Pseudo Diff. Oper., **4**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.

[8] F. Nicola, “K-Theory of SG-pseudo-differential algebras”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131**:9 (2003), 2841–2848.

[9] М. А. Шубин, *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория*, Добросвет, 2003.

[10] М. С. Агранович, “Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях”, *Дифференциальные уравнения с частными производными* – 6, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **63**, ВИНИТИ, М., 1990, 5–129.

[11] А. С. Мищенко, *Векторные расслоения и их применения*, Наука, М., 1984.

[12] В. А. Зорич, *Математический анализ*, Т. II, МЦНМО, М., 2002.

[13] В. П. Маслов, *Операторные методы*, Наука, М., 1973.

[14] V. Rabinbovich, S. Roch, B. Silbermann, *Limit Operators and Their Applications in Operator Theory*, Oper. Theory Adv. Appl., **150**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.

А. А. Арутюнов
Московский физико-технический институт
(государственный университет),
г. Долгопрудный Московской обл.
E-mail: Andronick.Arutyunov@gmail.com

Поступило
17.02.2014