А.Б.Гулисашвили

О СЛЕДАХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ НА ПОДМНОЖЕСТВАХ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

В этой работе изучаются задачи о следах и продолжениях для функций, принадлежащих пространствам С.Л.Соболева $W_1^k(\mathbb{R}^n)$ и пространствам О.В.Бесова $B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$. Множество Γ из $\mathbb{R}^n$, на котором рассматриваются следы и с которого делаются продолжения, предполагается измеримым по α-мерной мере Хаусдорфа $\mathcal{H}_\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant n$, а следы понимаются либо в операторном смысле, либо в смысле строгой определенности функции $\mathcal{H}_\alpha$-почти всюду на Γ.

Работа состоит из четырех параграфов. В § I приведены определения следов функций в различных смыслах, а также необходимые обозначения. В § 2 получено уточнение теорем вложения, принадлежащих В.Г.Мазье и автору, основанное на использовании максимальной функции. В § 3 приведены следствия из теорем, доказанных в § 2, касающиеся существования следов, и, в частности, полностью решена задача об условиях существования оператора следа $Tr: B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\Gamma, \mathcal{H}_\alpha), 1 \leqslant p \leqslant \infty, 0 < s < \infty$. И наконец, в § 4 дано описание пространства следов $Tr\left(B^{\frac{n-m}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^n)\right)$ в случае, когда существует оператор $Tr: B^{\frac{n-m}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\Gamma, \mathcal{H}_m)$ и множество Γ является счетно $(\mathcal{H}_m, m)$-спрямляемым подмножеством $\mathbb{R}^n$.

Данной работе предшествовал препринт [7] и некоторые из доказанных теорем были первоначально получены в [7].

§ I. Определения и обозначения.

Через Γ везде будет обозначаться подмножество $\mathbb{R}^n$, измеримое по некоторой мере Хаусдорфа $\mathcal{H}_\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant n$, причем значение α будет ясно из контекста. Предположим, что задано функциональное банахово пространство A на $\mathbb{R}^n$, такое, что пространство Шварца быстро убывающих функций $S(\mathbb{R}^n)$ плотно вложено в A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Оператором следа $Tr: A \longrightarrow L^p(\Gamma, \mathcal{H}_\alpha)$, $p \geqslant 1$ называется ограниченный линейный оператор, действующий из A в $L^p(\Gamma, \mathcal{H}_\alpha)$, значение которого на каждой функции из $S(\mathbb{R}^n)$ совпадает с ее сужением на Γ.

Пусть функция f локально интегрируема на $\mathbb{R}^n$ по n-мерной мере Лебега m_n. Обозначим через $B(x, \xi)$ открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x и радиусом ξ, и рассмотрим

средние

$$(\Lambda_\xi f)(x)=\frac{1}{m_n(B(x,\xi))}\int\limits_{B(x,\xi)} f(u)du, \xi>0, x\in\mathbb{R}^n.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. По определению, функция $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ имеет след Λf в смысле строгой определенности на Γ, если предел $(\Lambda f)(x)=\lim\limits_{\xi\to 0}(\Lambda_\xi f)(x)$ существует и конечен $\mathcal{H}_d$ - почти всюду на Γ.

Следы в смысле строгой определенности функции применялись в [3], [II] и [I3].

Максимальная функция Mf для функции $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ задается следующим образом:

$$M(f)(x)=\sup_{\xi>0}\frac{1}{m_n(B(x,\xi))}\int\limits_{B(x,\xi)}|f(u)|du, x\in\mathbb{R}^n.$$

Функция Mf определена в каждой точке, может принимать бесконечное значение и является борелевской функцией.

§ 2. Максимальная функция и теоремы вложения.

В этой работе будут рассматриваться пространства С.Л.Соболева $W_1^k(\mathbb{R}^n)$, пространства О.В.Бесова $B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$, $1\leqslant p<\infty$, $0<s<\infty$, и пространства С.Л.Соболева - Л.Н.Слободецкого $W_1^s(\mathbb{R}^n)$, которые при целом s совпадают с пространством С.Л.Соболева, а при нецелом s - с пространством О.В.Бесова $B^s_{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Определения этих пространств, а также необходимые сведения из теории пространств гладких функций можно найти в монографиях [I], [2], [I0], [II], [I2].

В работе В.Г.Мазьи [8] дано необходимое и достаточное условие для того, чтобы имело место ограниченное на множестве $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ вложение пространства $W_1^s(\mathbb{R}^n)$ в пространство $L^1(d\mu)$, где μ - борелевская мера на $\mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА I. (В.Г.Мазья [8], [9]). Неравенство

$$\|f\|_{L^1(d\mu)}\leqslant C\|f\|_{W_1^s(\mathbb{R}^n)},\quad 0<s<\infty \tag{I}$$

выполнено для всех функций $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с постоянной C, не

зависящей от f, в том и только в том случае, если

$$\pi_s(\mu) \overset{def}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}^n, 0<r<s} \left\{ r^{-n+s} \mu(B(x,r)) \right\} < \infty. \qquad (2)$$

Наименьшая постоянная C в (I) эквивалентна величине $\pi_s(\mu)$.

В работах автора [6] и [7] получен L^p-аналог этой теоремы.

ТЕОРЕМА 2 (см. [6], случай $0<s\leq\frac{1}{p}$; [7], общий случай). Неравенство

$$\|f\|_{L^p(d\mu)} \leq C \|f\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)}, \quad 1<p<\infty, \ 0<s<\infty \qquad (3)$$

выполнено для всех функций $f\in S(\mathbb{R}^n)$ с постоянной C, не зависящей от f, в том и только в том случае, если

$$\pi_{ps}(\mu) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, 0<r<1} \left\{ r^{-n+ps} \mu(B(x,r)) \right\} < \infty. \qquad (4)$$

Наименьшая постоянная C в (3) эквивалентна величине $[\pi_{ps}(\mu)]^{1/p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условия (4) доказывается при помощи подстановки в неравенство (3) функций $\varphi\left(\frac{x-x_0}{r}\right)$, $x, x_0 \in \mathbb{R}$, $0<r<\infty$, где φ - какая-нибудь функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, для которой $\varphi(x)=1$ при $x\in B(0,1)$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset B(0,2)$.

Достаточность. Пусть сначала p - целое число. Предположим, что выполнено условие (4) и задана функция $f\in S(\mathbb{R}^n)$. Имеет место разложение $f=\sum_{k=0}^{\infty} f_k$, где f_k - след на $\mathbb{R}^n$ целой аналитической функции от n комплексных переменных экспоненциального типа $(c\,2^k)$, причем

$$\|f\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \sim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{ks} \|f_k\|_p \qquad (5)$$

(см. [2], [I2]).

Экспоненциальный тип функции $(f_k)^p$ не превосходит $\mathrm{const}\cdot 2^k$, поэтому применяя теорему I и обобщенное неравенство С.Н.Бернштейна, приходим к заключению, что

$$\|f_k\|^p_{L^p(d\mu)} = \|(f_k)^p\|_{L^1(d\mu)} \leq C\pi_{ps}(\mu) \|(f_k)^p\|_{W^{ps}_1(\mathbb{R}^n)} \leq \qquad (6)$$

$$\leqslant C\,2^{kps}\mathcal{T}_{ps}(\mu)\|(f_k)^p\|_1 = C\,2^{kps}\mathcal{T}_{ps}(\mu)\|f_k\|_p^p .$$

Ввиду того, что

$$|f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)| \tag{7}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$, из (5) и (6) выводим неравенство

$$\|f\|_{L^p(d\mu)} \leqslant C\mathcal{T}_{ps}(\mu)^{1/p}\|f\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)}, \; f \in S(\mathbb{R}^n)$$

и достаточность условия (4) доказана в случае целых p.

Пусть теперь p не является целым числом. Найдем такие целые числа p_1, p_2, что $1 \leqslant p_1 < p < p_2 < \infty$. Затем выберем s_1 и s_2 так, чтобы были выполнены равенства $p_1 s_1 = p_2 s_2 = ps$. По разобранному выше случаю, имеем

$$\|f\|_{L^{p_1}(d\mu)} \leqslant C\mathcal{T}_{ps}(\mu)^{1/p_1}\|f\|_{B^{s_1}_{p_1,1}(\mathbb{R}^n)}; \; \|f\|_{L^{p_2}(d\mu)} \leqslant C\mathcal{T}_{ps}(\mu)^{1/p_2}\|f\|_{B^{s_2}_{p_2,1}(\mathbb{R}^n)}$$

для всех $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Применив $\mathcal{K}$-метод интерполяции (см. [2], [I2]), получим при $\theta = (p^{-1} - p_1^{-1})(p_2^{-1} - p_1^{-1})^{-1}$ неравенство

$$\|f\|_{L^p(d\mu)} = \|f\|_{(L^{p_1}(d\mu), L^{p_2}(d\mu))_{\theta,p}} \leqslant C\mathcal{T}_{ps}(\mu)^{1/p}\|f\|_{(B^{s_1}_{p_1,1}(\mathbb{R}^n), B^{s_2}_{p_2,1}(\mathbb{R}^n))_{\theta,p}} \tag{8}$$

По теореме Петре (см. [I2], замечание 4 к пункту 2.4.I) справедливо вложение

$$B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n) \subset (B^{s_1}_{p_1,1}(\mathbb{R}^n), B^{s_2}_{p_2,1}(\mathbb{R}^n))_{\theta,p} \tag{9}$$

Теорема 2 доказана, ввиду (8) и (9). ●

Следующие две теоремы уточняют теоремы I и 2.

ТЕОРЕМА 3. Неравенство

$$\|Mf\|_{L^1(d\mu)} \leqslant C\|f\|_{W^s_1(\mathbb{R}^n)}, \; 0 < s < \infty \tag{I0}$$

выполнено для всех функций $f \in W^s_1(\mathbb{R}^n)$ с постоянной C, не зависящей от f, в том и только в том случае, если $\mathcal{T}_s(\mu) < \infty$. Наименьшая постоянная C в (I0) эквивалентна величине $\mathcal{T}_s(\mu)$.

ТЕОРЕМА 4. Неравенство

$$\|Mf\|_{L^p(d\mu)} \leqslant C\|f\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)}, \quad 1<p<\infty, \ 0<s<\infty \qquad (II)$$

выполнено для всех функций $f \in B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ с постоянной C, не зависящей от f, в том и только в том случае, если $\pi_{ps}(\mu)<\infty$. Наименьшая постоянная C в (II) эквивалентна величине $[\pi_{ps}(\mu)]^{1/p}$.

Доказательства теорем 3 и 4 опираются на схему доказательств теорем I и 2 в [8] и [6]. Поэтому отметим только основные моменты.

Необходимость доказывается, как и в теоремах I и 2, подстановкой в (I0) и (II) стандартных пробных функций.

Достаточность в теореме 4. Пусть пока $0<s<1$. Из определения пространств $B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ и из ограниченности максимального оператора M в L^p, $p>1$ следует ограниченность M в $B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$, $0<s<1$.

Предположим, что выполнено условие (4) и задана функция $f \in B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим разложение $f=\sum f_k$, такое как в доказательстве теоремы 2. Ввиду того, что $f_k \in Lip\,1$, $k\geqslant 0$, функции Mf_k, $k\geqslant 0$ непрерывны. Легко видеть, что неравенство (3) имеет место для всех непрерывных функций из $B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$, поскольку и в этом случае неравенство (7) выполнено в каждой точке. Отсюда делаем заключение, что

$$\|Mf_k\|_{L^p(d\mu)} \leqslant C\pi_{ps}(\mu)^{1/p}\|f_k\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C2^{ks}\pi_{ps}(\mu)^{1/p}\|f_k\|_p, \ k\geqslant 0.$$

Суммируя по k предыдущие неравенства, получаем оценку

$$\|Mf\|_{L^p(d\mu)} \leqslant C\pi_{ps}(\mu)^{1/p}\|f\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)}.$$

В полной общности теорема 4 выводится из теоремы 3 так же, как теорема 2 выводилась из теоремы I. Покажем теперь, как при помощи бесселева потенциала $\mathcal{J}_1$ перейти от случая $0<s<1$ к случаю $1<s<2$ в теореме 3. Предположим, что $\pi_s(\mu)<\infty$.

Определим меру ν при помощи равенства

$$\nu(E) = \int_E dx \int_{\mathbb{R}^n} Q_s(x-y)\,d\mu(y),$$

где $\mathcal{E}$ - борелевское множество, а Q_1 - ядро бесселевого потенциала $\mathcal{J}_1$ (см. [II]).

Рассуждая аналогично доказательству теоремы Адамса в [9] (лемма на стр.4I в [9]) и используя свойства ядер Q_1 , доказываем, что

$$\mathfrak{N}_{s-1}(\nu) \leqslant c\mathfrak{N}_s(\mu). \tag{I2}$$

По теореме об изоморфизме для пространства О.В.Бесова (см. [2]) имеем $\mathcal{J}_{-1} f \in B^{s-1}_{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Разобранный выше случай и неравенство (I2) дают

$$\|M(\mathcal{J}_{-1} f)\|_{L^1(d\nu)} \leqslant c\mathfrak{N}_s(\mu) \ \|f\|_{B^s_{1,1}(\mathbb{R}^n)}. \tag{I3}$$

Далее имеем

$$\|M(\mathcal{J}_{-1} f)\|_{L^1(d\nu)} = \int_{\mathbb{R}^n} d\mu(y) \int_{\mathbb{R}^n} [M(\mathcal{J}_{-1} f)](x) Q_1(x-y)dx \ . \tag{I4}$$

Используя неравенство Гельдера и неравенство $\|Q_1\|_1 < \infty$ (см. [II]), получаем, что

$$M(f)(y) = M(\mathcal{J}_1 \circ \mathcal{J}_{-1})(f)(y) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} M(\mathcal{J}_{-1} f)(x) Q_1(x-y)dx. \tag{I5}$$

Из (I3), (I4) и (I5) вытекает теорема 3 в случае $1 < s < 2$

Чтобы включить случай $s=1$, воспользуемся приемом из доказательства теоремы 2 (см.неравенства (8) и (9)). Случай, когда $s \geqslant 2$, рассматривается аналогично. На этом завершается доказательство теоремы 4. ●

Достаточность в теореме3.Доказательство отличается от доказательства теоремы 4, так как максимальный оператор не ограничен в L^1 . Используется схема доказательства теоремы I (см. [8], [9]), модифицированная для максимальной функции.

Введем такую характеристику меры μ :

$$\tilde{\mathfrak{N}}_s(\mu) = \sup_{x \in R^n, 0<r<\infty} \left\{ r^{-n+s} \mu(B(x,r)) \right\}.$$

Если $\tilde{\mathfrak{N}}_1(\mu) < \infty$, то тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} M(\chi_{B(x,r)})(u)\,d\mu(u) \leq \int_0^1 \mu(u : M(\chi_{B(x,r)})(u) > t)\,dt \leq c\tilde{\pi}_1(\mu) r^{n-1}. \quad (16)$$

При доказательстве неравенств (16) использовался слабый тип (1, 1) для максимального оператора и радиальная симметричность функции $M(\chi_{B(0,r)})$.

Пусть теперь $\mathcal{O}$ – открытое множество с гладкой границей. При помощи леммы Гастина (см. [9], стр.39) из (16) получается оценка

$$\int_{\mathbb{R}^n} M(\chi_{\mathcal{O}})(u)\,d\mu(u) \leq c\tilde{\pi}_1(\mu)\,\mathcal{H}_{n-1}(\partial\mathcal{O}),$$

где $\partial\mathcal{O}$ обозначает границу $\mathcal{O}$. Отсюда, используя формулу Кронрода – Федерера (см. [9], стр.36), делаем заключение, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} M(f)(u)\,d\mu(u) \leq c\tilde{\pi}_1(\mu)\|f\|_{\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in S(\mathbb{R}^n) \quad (17)$$

В неравенстве (17) через $\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^n)$ обозначено однородное пространство С.Л.Соболева.

Из (17) стандартными рассуждениями с использованием разбиения единицы (см. [8], [9]) получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} M(f)(u)\,d\mu(u) \leq c\pi_1(\mu)\|f\|_{W_1^1(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in S(\mathbb{R}^n). \quad (18)$$

Возьмем теперь любую функцию f из $W_1^1(\mathbb{R}^n)$ и представим ее в виде ряда $f = \sum g_k$, такого, что $\sum \|g_k\|_{W_1^1(\mathbb{R}^n)} \leq 2\|f\|_{W_1^1(\mathbb{R}^n)}$; $g_k \in S(\mathbb{R}^n)$ (это можно сделать ввиду того, что $S(\mathbb{R}^n)$ плотно в $W_1^1(\mathbb{R}^n)$). Тогда в каждой точке x справедливо неравенство $M(f)(x) \leq \sum M(g_k)(x)$. Отсюда и из неравенства (18) следует, что теорема 3 доказана для пространства $W_1^1(\mathbb{R}^n)$.

В случае, когда $0 < s < 1$, из условия $\tilde{\pi}_s(\mu) < \infty$ следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} M(\chi_{\mathcal{O}}(u))\,d\mu(u) \leq c\tilde{\pi}_s(\mu)\,m_n(\mathcal{O})^{1-s}\,\mathcal{H}_{n-1}(\partial\mathcal{O})^s \quad (19)$$

для любого открытого множества $\mathcal{O}$ с гладкой границей. При выводе неравенства (19) используется лемма Гастина.

Пусть $f \in B^s_{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Разложим f в ряд по целым функциям $f = \sum f_k$. Аналогично тому, как доказывалась теорема 2 в [6], выводим из неравенства (I9) следующую оценку:

$$\int_{\mathbb{R}^n} M(f_k)(u)\,d\mu(u) \leqslant c\tilde{\pi}_s(\mu)\,2^{ks}\|f_k\|_1, \quad k \geqslant 1. \tag{20}$$

Суммируя неравенства (20) по k и используя (5), имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} M(f)(u)\,d\mu(u) \leqslant c\tilde{\pi}_s(\mu)\|f\|_{B^s_{1,1}(\mathbb{R}^n)}. \tag{2I}$$

При помощи подходящего разбиения единицы, из (2I) получаем аналогичное неравенство с $\pi_s(\mu)$ вместо $\tilde{\pi}_s(\mu)$.

Теорема 3 доказана в случае, когда $0 < s < 1$.

Если $s > 1$ и s не является целым числом, то, пользуясь бесселевым потенциалом $\mathcal{J}_1$, проводим доказательство, как было указано выше. Если s - целое число, то пользуемся интегральным представлением С.Л.Соболева, как в доказательстве теоремы I в [9], стр.4I.

Теорема 3 полностью доказана. ●

§ 3. О существовании следов.

Известно, что существует оператор следа $Tr: W^1_1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{H}_{n-1})$ (Гальярдо [I5]). В этой же работе доказана возможность ограниченного нелинейного продолжения из $L^1(\mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{H}_{n-1})$ в $W^1_1(\mathbb{R}^n)$.

Известно также, что линейного продолжения не существует (Петре [I6]). В работе Ю.Д.Бураго и В.Г.Мазьи [3] дано необходимое и достаточное условие для существования следа пространства $W^1_1(\mathcal{O})$ на приведенной границе $\partial^*\mathcal{O}$ открытого множества $\mathcal{O}$ с конечным периметром и для принадлежности следов пространству $L^1(\partial^*\mathcal{O}, \mathcal{H}_{n-1})$. Этот результат был впоследствии независимо получен в работе Анчелотти и Джакуинта [I3], в которой доказана также и возможность нелинейного продолжения.

Для пространств О.В.Бесова известно (см., напр. [I2], теорема 2.9.4(c)), что при $1 < p < \infty$, $1 \leqslant m < n$ существует оператор следа $Tr: B^{\frac{n-m}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^m, \mathcal{H}_m)$. В.И.Буренков и М.Л. Гольдман [4], [5] доказали возможность соответствующего ограниченного нелинейного продолжения, а в работе [4] доказано, что линейного продолжения не существует.

Пусть Γ - подмножество $\mathbb{R}^n$, измеримое по мере $\mathcal{H}_\alpha, 0 \leq \alpha \leq n$. Если взять в качестве меры μ в теореме 2 меру $\mathcal{H}_\alpha$, суженную на Γ, то получим такое следствие.

СЛЕДСТВИЕ I. Оператор следа $T_r : B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\Gamma, \mathcal{H}_\alpha)$, где $1 \leq p < \infty$, $0 < s < \infty$, существует тогда и только тогда, когда

$$\pi_{ps}(\mathcal{H}_\alpha|_\Gamma) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, 0<r<1} \left\{ r^{-n+ps} \mathcal{H}_\alpha(\Gamma \cap B(x,r)) \right\} < \infty.$$

Норма оператора T_r эквивалентна величине $[\pi_{ps}(\mathcal{H}_\alpha|_\Gamma)]^{1/p}$.

Это следствие полностью решает задачу о существовании оператора $T_r : B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\Gamma, \mathcal{H}_\alpha)$. Если m - целое число, для которого $1 \leq m < n$, то из следствия I вытекает утверждение, обобщающее упоминавшуюся выше теорему о следах на подпространстве $\mathbb{R}^m$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Оператор следа $T_r : B^{\frac{n-m}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\Gamma, \mathcal{H}_m)$ существует тогда и только тогда, когда

$$\pi_m(\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, 0<r<1} \left\{ r^{-m} \mathcal{H}_m(\Gamma \cap B(x,r)) \right\} < \infty. \quad (22)$$

Норма оператора T_r эквивалентна величине $\pi_m(\Gamma)^{1/p}$.

Из теорем 3 и 4 при помощи стандартных рассуждений (см. [II], стр.I8-I9) получаем такие следствия.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если мера μ удовлетворяет условию $\pi_s(\mu) < \infty$ для некоторого $s > 0$, то тогда для любой функции $f \in W^s_1(\mathbb{R}^n)$ предел средних $(\Lambda f)(x) = \lim_{\xi \to 0} (\Lambda_\xi f)(x)$ существует μ - почти всюду на $\mathbb{R}^n$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если мера μ удовлетворяет условию $\pi_{ps}(\mu) < \infty$ для некоторых p и s, таких что $1 < p < \infty$, $0 < s < m$, то тогда для любой функции $f \in B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ предел средних $(\Lambda f)(x) = \lim_{\xi \to 0} (\Lambda_\xi f)(x)$ существует μ - почти всюду на $\mathbb{R}^n$.

Следующее утверждение вытекает из следствий I и 4:

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть выполнены условия следствия I и имеет

место неравенство $\pi_{ps}(\mathcal{H}_\alpha|_\Gamma)<\infty$. Тогда функции $Tr\, f$ и Λf совпадают $\mathcal{H}_\alpha$ - почти всюду на Γ для любой функции $f\in B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть теперь задано множество Γ, измеримое по мере $\mathcal{H}_\alpha$, $0\leqslant\alpha<n$, и такое, что $\mathcal{H}_\alpha(\Gamma\cap B(x,r))<\infty$ для всех $x\in\mathbb{R}^n$, $0<r<1$. Оказывается, что при этих минимальных предположениях на множестве Γ существует след в смысле строгой определенности у любой функции $f\in B^{\frac{n-\alpha}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$, $1\leqslant p<\infty$, $0\leqslant\alpha<n$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Если множество Γ удовлетворяет приведенным выше условиям, то тогда любая функция $f\in B^{\frac{n-\alpha}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ имеет след Λf на множестве Γ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множество W измеримо по мере $\mathcal{H}_\alpha$, и кроме того, $0<\mathcal{H}_\alpha(W)<\infty$. Тогда по теореме 2.10.18(3) из [14] имеем оценку $\lim\limits_{r\to 0+}\sup r^{-\alpha}\mathcal{H}_\alpha(W\cap B(x,r))<c$ для $\mathcal{H}_\alpha$- почти всех $x\in W$ и некоторой постоянной c. Отсюда вытекает, что Γ представимо в виде $\Gamma=\bigcup\limits_{i\geqslant 1}\Gamma_i$, где $\pi_{n-\alpha}(\mathcal{H}_\alpha|_{\Gamma_i})<\infty$, $i\geqslant 1$. Остается применить следствия 3 и 4. ●

§ 4. Продолжение функций со счетно-спрямляемых множеств.

Множество $\Gamma\subset\mathbb{R}^n$ называется m-спрямляемым (m - натуральное число, $1\leqslant m<n$), если существует функция $\lambda:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ класса $Lip\,1$, отображающая некоторое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^m$ на Γ. Множество Γ называется счетно $(\mathcal{H}_m,m)$-спрямляемым, если существует представление $\Gamma=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}\Gamma_i$, такое, что $\mathcal{H}_m(\Gamma_0)=0$, а каждое Γ_i, $i\geqslant 1$ является m-спрямляемым множеством (см. [14], 3.2.14).

Из теоремы 3.2.29 и утверждений пункта 3.1.19 в [14] выводится следующая полезная лемма, позволяющая применять метод локальных координат к счетно $(\mathcal{H}_m,m)$-спрямляемым множествам.

ЛЕММА 1. Пусть Γ - счетно $(\mathcal{H}_m,m)$-спрямляемое $\mathcal{H}_m$-измеримое множество и задано $\varepsilon>0$. Тогда существуют а) открытые кубы $\{K_i\}_{i\geqslant 1}$ в $\mathbb{R}^m=\{x\in\mathbb{R}^n: x_j=0,\ m+1\leqslant j<n\}$ с центрами в начале координат и ребрами, параллельными осям координат;

b) функции $\Lambda_i : K_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ класса C^1 ; c) отображения $L_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, являющиеся композициями сдвигов и ортогональных преобразований;

d) попарно не пересекающиеся компакты Γ_i в $\mathbb{R}^n$, такие, что I) $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i \subset \Gamma$; 2) для $\Gamma_0 = \Gamma \setminus (\bigcup_{i \geq 1} \Gamma_i)$ имеем $\mathcal{H}_m(\Gamma_0) = 0$; 3) $\Gamma_i \subset$ $\subset L_i(\Lambda_i(K_i))$, $i \geq 1$; 4) для любой координатной функции $(\Lambda_i)_j$, $1 \leq i < \infty$, $1 \leq j \leq n$, справедливо неравенство $\left|\frac{\partial}{\partial t_k}(\Lambda_i)_j(t)\right| \leq 1 + \varepsilon$ при $1 \leq k \leq m$, $t \in K_i$.

В следствии 2 содержится необходимое и достаточное условие для существования оператора следа $Tr : B_{p,1}^{\frac{n-m}{p}}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\Gamma, \mathcal{H}_m)$. Следующая теорема обобщает теорему В.И.Буренкова и М.Л. Гольдмана о продолжении, упоминавшуюся в § 3, и дает полное решение соответствующей задачи о продолжениях в классе счетно-спрямляемых множеств.

ТЕОРЕМА 5. Пусть Γ - счетно $(\mathcal{H}_m, m)$-спрямляемое $\mathcal{H}_m$-измеримое подмножество $\mathbb{R}^n$. Если выполнено условие (22), то тогда для любой функции $f \in L^p(\Gamma, \mathcal{H}_m)$, $1 \leq p < \infty$ существует функция $F \in B_{p,1}^{\frac{n-m}{p}}(\mathbb{R}^n)$, такая что $Tr\, F = f$ и, кроме того, справедливо неравенство

$$\| F \|_{B_{p,1}^{\frac{n-m}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq c \| f \|_{L^p(\Gamma, \mathcal{H}_m)}.$$

В частности, если выполнены условия теоремы, то тогда

$$Tr\left(B_{p,1}^{\frac{n-m}{p}}(\mathbb{R}^n)\right) = L^p(\Gamma, \mathcal{H}_m).$$

Приведем краткую схему доказательства теоремы 5. Полное доказательство имеется в препринте [7] .

Фиксируем представление $\Gamma = \bigcup \Gamma_i$ из леммы I. Выберем какое-нибудь конечное подсемейство семейства $\{\Gamma_i\}_{i \geq 1}$. Для простоты предположим, что выбраны множества Γ_i, $1 \leq i \leq N$.

Положим $W = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_N$ и обозначим через τ регуляризованное расстояние до множества W (см. [II]). Выберем какую-нибудь функцию $\gamma \in C_0^{\infty}[0, \infty)$, для которой $\operatorname{supp} \gamma \subset [0,1)$; $\gamma(0) = 1$; $0 \leq \gamma(t) \leq 1$ при $0 \leq t < \infty$, и кроме того, справедлива оценка

$$\sum_{j=1}^{M} |\gamma^{(j)}(u)| \leq c u^M, \quad 0 \leq u < \infty,$$

где M - фиксированное натуральное число, такое, что $M > n-m+1$.

Определим срезающую функцию $S_{\xi,W}$ при помощи формулы $S_{\xi,W}(x) = \gamma(\xi^{-1}r(x))$, $x \in R^n$, $0<\xi<1$. Используя свойства регуляризованного расстояния r и функции γ, получаем, что

$$|D_i^l S_{\xi,W}(x)| \leq c|\xi|^{-l}, \; 1 \leq i \leq n, \; 0<\xi<1, \; 1 \leq l \leq n-m+1, \; x \in \mathbb{R}^n,$$

где D_i^l обозначает частную производную порядка l по i-ой координате, а постоянная c не зависит от ξ, W и x.

Важность срезающих функций видна из следующей леммы.

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда для любой функции $F \in B_{p,1}^{\frac{n-m}{p}}(\mathbb{R}^n)$ справедливо неравенство

$$\lim_{\xi \to 0+} \sup \|F S_{\xi,W}\|_{B_{p,1}^{\frac{n-m}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|TrF\|_{L^p(W\mathcal{H}_m)}, \; 1 \leq p < \infty,$$

причем постоянная c не зависит от F и W.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 2 является длинным и сложным. Оно имеется в [7], и мы не будем его здесь воспроизводить.

Следующая лемма позволяет делать продолжения с конечных объединений множеств, лежащих внутри графиков C^1-функций.

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда для любой функции $f \in L^p(W, \mathcal{H}_m)$ существуют функции F_1, F_2 из $B_{p,1}^{\frac{n-m}{p}}(\mathbb{R}^n)$, такие, что $F_1 \geq 0$, $F_2 \geq 0$, $Tr(F_1 - F_2) = f$ $\mathcal{H}_m$-почти всюду на W, и кроме того,

$$\|F_1\|_{B_{p,1}^{\frac{n-m}{p}}(\mathbb{R}^n)} + \|F_2\|_{B_{p,1}^{\frac{n-m}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|_{L^p(W,\mathcal{H}_m)}$$

с постоянной c, не зависящей от f и W.

Доказательство леммы 3 также опускается.

Продолжим доказательство теоремы 5. Пусть $f \in L^p(\Gamma, \mathcal{H}_m)$. Тогда для некоторых натуральных чисел i_j, $j \geq 1$, таких, что $i_1 = 1$ и последовательность i_j возрастает при $j \to \infty$, имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f\|_{L^p(W_j, \mathcal{H}_m)} \leq 2\|f\|_{L^p(\Gamma, \mathcal{H}_m)}, \tag{23}$$

где $W_j = \Gamma_{i_j+1} \cup \ldots \cup \Gamma_{i_{j+1}}$, $j \geq 1$.

По лемме 3 существуют функции $F_{1,j}, F_{2,j} \in B^{\delta}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$, где $\delta = \frac{n-m}{p}$, такие, что $F_{1,j} \geqslant 0$, $F_{2,j} \geqslant 0$, $Tr(F_{1,j} - F_{2,j}) = f$ $\mathcal{H}_m$-почти всюду на W_j, и кроме того,

$$\|F_{1,j}\|_{B^{\delta}_{p,1}(\mathbb{R}^n)} + \|F_{2,j}\|_{B^{\delta}_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|f\|_{L^p(W_j, \mathcal{H}_m)}, \quad j \geqslant 1. \tag{24}$$

Далее, полагая $\widetilde{F} = \sum (F_{1,j} - F_{2,j})$, $\widetilde{\widetilde{F}} = \sum (F_{1,j} + F_{2,j})$, имеем

$$\|\widetilde{F}\|_{B^{\delta}_{p,1}(\mathbb{R}^n)} + \|\widetilde{\widetilde{F}}\|_{B^{\delta}_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|f\|_{L^p(\Gamma, \mathcal{H}_m)}. \tag{25}$$

Для некоторого представления $\Gamma = \bigcup_{k \geqslant 1} \widetilde{W}_k$, $W_k = W_{j_k+1} \cup \ldots \cup W_{j_{k+1}}$ справедливо неравенство

$$\sum_{k \geqslant 1} \|Tr\,\widetilde{\widetilde{F}}\|_{L^p(\widetilde{W}_k, \mathcal{H}_m)} \leqslant 2\|Tr\,\widetilde{\widetilde{F}}\|_{L^p(\Gamma, \mathcal{H}_m)}. \tag{26}$$

Найдутся срезающие функции, такие, что, полагая $\widetilde{F}_k = \sum S_{\xi_j, W_j}(F_{1,j} - F_{2,j})$, $k \geqslant 1$, где сумма берется от $j_k + 1$ до j_{k+1}, имеем 1) $\|\widetilde{F}_1\|_{B^{\delta}_{p,1}(\mathbb{R}^k)} \leqslant C \sum_{1 \leqslant j \leqslant j_2} \|f\|_{L^p(W_j, \mathcal{H}_m)}$; 2) $Tr\,\widetilde{F}_k = f$ $\mathcal{H}_m$-почти всюду на $\widetilde{W}_k$, $k \geqslant 1$. После этого определяем последовательность функций $Z_1 = \widetilde{F}_1$, $Z_i = Z_{i-1} + S_{\eta_i, W_i}(\widetilde{F}_i - Z_{i-1})$, $i \geqslant 2$, где срезающие функции подобраны так, что 1) $\widetilde{W}_j \cap \operatorname{supp} S_{\eta_j, \widetilde{W}_i} = \emptyset$ при $i \geqslant 2$, $1 \leqslant j < i$;

2) $\|S_{\eta_i, \widetilde{W}_i}(\widetilde{F}_i - Z_{i-1})\|_{B^{\delta}_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|Tr(\widetilde{F}_i - Z_{i-1})\|_{L^p(\widetilde{W}_i, \mathcal{H}_m)}$ при $i \geqslant 2$. Подобрать подходящие функции S позволяет лемма 2.

Так как $\|Z_i\| \leqslant \widetilde{\widetilde{F}}$, то $|Tr\,Z_i| \leqslant Tr\,\widetilde{\widetilde{F}}$, $i \geqslant 2$. Отсюда получаем, используя оценки (23)-(26), свойства функций Z_i, и применяя следствие 2, что $\|Z_1\|_{B^{\delta}_{p,1}(\mathbb{R}^n)} + \sum \|Z_i - Z_{i-1}\|_{B^{\delta}_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|f\|_{L^p(\Gamma, \mathcal{H}_m)}$. Следовательно, ряд $Z_1 + \sum (Z_i - Z_{i-1})$ сходится в пространстве $B^{\delta}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ к функции F. Так как $Tr\,Z_i = f$ $\mathcal{H}_m$-почти всюду на $\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant i} \widetilde{W}_k$ при $i \geqslant 2$, получаем, что $Tr\,F = f$, и что функция F является искомым продолжением функции f.

Теорема 5 доказана. ●

Литература

1. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1975.
2. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. М., 1980. 264 с.
3. Бураго Ю.Д., Мазья В.Г. Некоторые вопросы теории потенциала и теории функций для областей с нерегулярными границами.- Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1967, т.3, с.152-162.
4. Буренков В.И., Гольдман М.Л. О продолжении функций из L_p. - Труды МИАН, 1979, CL, с.31-51.
5. Гольдман М.Л. О продолжении функций из $L_p(\mathbb{R}^n)$ на пространство большего числа измерений. - Мат.заметки, 1979, т.25, № 4, с.513-520.
6. Гулисашвили А.Б. Мультипликаторы в пространствах Бесова и следы функций на подмножествах евклидова пространства. - Докл.АН СССР, 1985, т.281, № 4, с.777-781.
7. Гулисашвили А.Б. О следах функций из пространств Бесова на подмножествах евклидова пространства. - Препринт ЛОМИ, Р-2-85, Ленинград, 1985. 30 с.
8. Мазья В.Г. О суммируемости по произвольной мере функций из пространств С.Л.Соболева - Л.Н.Слободецкого. - В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций.IX. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1979, т.92, с.192-202.
9. Мазья В.Г., Шапошникова Т.О. Теория мультипликаторов в пространствах дифференцируемых функций. - Успехи матем.наук, 1983, т.38, № 3, с.23-86.
10. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1977. 455 с.
11. Стейн И.М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., 1973. 342 с.
12. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М., 1980. 664 с.
13. Anzellotti C., Giaquinta M. Funzioni BV e tracce. - Rend.Sem.Mat.Univ.Padova, 1978, v.60, p.1-21.
14. Federer H. Geometric Measure Theory. Berlin-Heidelberg-New York, 1969, 676 p.
15. Gagliardo E. Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variable. - Rend.Sem.Mat.Univ.Padova, 1957, v.27, p.284-305.

16. P e e t r e J. A counter-example connected with Gagliardo's trace theorem. - Comment.Math., 1979, v.11, p.277-282.

A.B.Gulisashvili. Traces of differentiable functions on subsets of Euclidean space.

Summary

We investigate conditions of existence and coincideness of the traces of functions of Sobolev's and Besov's classes both in the operator sense and in the sense of strict definiteness. A solution is given to the problems on trace and extension for the trace operator $Tr : B \longrightarrow L^p$ in the case, when Γ is a countably $(\mathcal{H}_m, m)$-rectifiable $\mathcal{H}_m$ -measurable subset of $\mathbb{R}^n$.