Т. С. Алероев, О собственных значениях одного класса несамосопряженных операторов,
Дифференц. уравнения, 1994, том 30, номер 1, 169–171

ЯНВАРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 1

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.927.2

Т. С. АЛЕРОЕВ

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть дана совокупность $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2\}$ трех чисел $0<\gamma_j\leqslant 1$, обозначим

$$\sigma_k=\sum_{j=0}^{k}\gamma_j-1,\quad \mu_k=\sigma_k+1\quad (k=0,1,2)$$

и предположим, что $1/\rho=\sigma_2>0$.

Дифференциальные операторы

$$D^{(\sigma_0)}y(x)\equiv\frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_0)}}y(x),\quad D^{(\sigma_1)}y(x)\equiv\frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{dx^{-(1-\gamma_1)}}\frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}}y(x),$$

$$D^{(\sigma_2)}y(x)\equiv\frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_2)}}\frac{d^{\gamma_1}}{dx^{\gamma_1}}\frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}}y(x),$$

вообще говоря, дробных порядков [1, 2].

Рассмотрим задачу, являющуюся аналогом известной задачи Штурма — Лиувилля, которую, следуя [1, 2], назовем задачей (A). Она заключается в следующем: в классе $L_1(0,1)$ (или $L_2(0,1)$) отыскать нетривиальное решение уравнения $D^{(\sigma_2)}y(x)-\{\lambda+q(x)\}y(x)=0$, $x\in[0,1)$, $q(x)\in C[0,1]$, удовлетворяющее условиям

$$D^{(\sigma_0)}y|_{x=0}\cos\alpha+D^{(\sigma_1)}y|_{x=0}\sin\alpha=0,$$

$$D^{(\sigma_0)}y|_{x=1}\cos\beta+D^{(\sigma_1)}y|_{x=1}\sin\beta=0,$$

где λ, α, β $(\operatorname{Im}\alpha=\operatorname{Im}\beta=0)$ — произвольные параметры.

Наряду с операторами $D^{(\sigma_k)}f(x)$ $(k=0,1,2)$ введем также в рассмотрение аналогичные операторы дробного интегро-дифференцирования с концом в точке $x=1$ [2]. Приняв обозначения

$$\tilde\sigma_k=\sum_{j=0}^{k}\gamma_{2-j}-1,\quad \tilde\mu_k=\tilde\sigma_k+1\quad (k=0,1,2),$$

определим эти операторы следующим образом:

$$D_1^{(\tilde\sigma_0)}f(x)\equiv\frac{d^{-(1-\gamma_2)}}{d(1-x)^{-(1-\gamma_2)}}f(x),\quad D_1^{(\tilde\sigma_1)}f(x)\equiv-\frac{d^{-(1-\gamma_2)}}{d(1-x)^{-(1-\gamma_1)}}\frac{d^{\gamma_2}}{d(1-x)^{\gamma_2}}f(x),$$

$$D_1^{(\tilde\sigma_2)}f(x)\equiv\frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{d(1-x)^{-(1-\gamma_0)}}\frac{d^{\gamma_1}}{d(1-x)^{\gamma_1}}\frac{d^{\gamma_2}}{d(1-x)^{\gamma_2}}f(x).$$

Теперь естественно поставить следующую краевую задачу: в классе $L_1(0,1)$ (или $L_2(0,1)$) отыскать нетривиальное решение уравнения $D_1^{(\tilde\sigma_2)}z-\{\lambda+q(x)\}z=0$, удовлетворяющее краевым условиям

$$D_1^{(\tilde\sigma_2)}z|_{x=0}\cos\alpha+D_1^{(\tilde\sigma_1)}z|_{x=0}\sin\alpha=0,$$

$$D_1^{(\tilde\sigma_0)}z|_{x=1}\cos\beta+D_1^{(\tilde\sigma_1)}z|_{x=1}\sin\beta=0.$$

Эту задачу, в определенном смысле ассоциирующую с задачей (A), будем называть задачей $(\tilde A)$.

Лемма 1. *Пусть $q(x)\equiv0$, тогда число λ является собственным значением задачи A тогда и только тогда, когда λ является нулем следующей целой функции:*

$$\omega_\rho(\lambda)=\frac{c_0}{\Gamma(2-\gamma_1-2\gamma_0)}+\frac{c_0k}{\Gamma(2-\gamma_0)}+\frac{c_1\tilde\beta}{\Gamma(2-2\gamma_0)}+\frac{c_1k\tilde\beta}{\Gamma(2-\gamma_0-\gamma_1)}+$$

$$+c_0\lambda E_\rho(\lambda;\ 1/\rho+2+\gamma_1-2\gamma_0)+c_1\lambda\tilde{\beta}E_\rho(\lambda;\ 1/\rho+3+\gamma_1-2\gamma_0)+$$
$$+\lambda c_0 k E_\rho(\lambda;\ 1/\rho+2-\gamma_0)+\lambda\tilde{\beta}c_1 k E_\rho(\lambda,\ 1/\rho+3-\gamma_0-\gamma_1),$$

где $c_0=(1-\gamma_1-\gamma_0)/\Gamma(1-\gamma_1)\Gamma(2-\gamma_0)$, $c_1=\beta(1-\gamma_0)/\Gamma(1-\gamma_0)$, $\tilde{\beta}=\operatorname{tg}\alpha$, $k=\operatorname{tg}\beta$, $E_\rho(\lambda,\mu)=$ $=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\lambda_k}{\Gamma(\mu+k\rho^{-1})}$ — *функция типа Миттаг — Леффлера, которая является целой функцией порядка* ρ *и типа 1.*

Доказательство. Пусть $y(x)$ — решение задачи (A) при $q(x)\equiv 0$, тогда

$$\frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{dx^{-(1-\gamma_1)}}\frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}}y=\lambda D^{(-\gamma_2)}y+y_1^0, \tag{1}$$

где $y_1^0=D^{(\sigma_1)}y|_{x=0}$. Из (1) имеем

$$\frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{dx^{-(1-\gamma_1)}}\frac{d}{dx}\left[\frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_0)}}\right]y(x)=\lambda\frac{d^{-\gamma_2}}{dx^{-\gamma_2}}y(x)+y_1^0$$

или

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_0)}}\right]y(x)=\lambda\frac{d}{dx}\left[\frac{d^{-\gamma_2-\gamma_1}}{dx^{-\gamma_2-\gamma_1}}y(x)\right]+\frac{d}{dx}\frac{d^{-\gamma_1}}{dx^{-\gamma_1}}y_1^0, \tag{2}$$

откуда следует

$$\frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_0)}}y(x)=\lambda\frac{d^{-\gamma_2-\gamma_1}}{dx^{-\gamma_2-\gamma_1}}y(x)+\frac{d^{-\gamma_1}}{dx^{-\gamma_1}}y_1^0+y_0^0, \tag{3}$$

где $y_0^0=D^{(\sigma_0)}y|_{x=0}$. Из (3) имеем

$$\frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_0)}}\left[y(x)+\lambda\frac{d^{1-\gamma_2-\gamma_1-\gamma_0}}{dx^{1-\gamma_2-\gamma_1-\gamma_0}}y(x)\right]=y_1^0\frac{x^{\gamma_1}}{\Gamma(1-\gamma_1)}+y_0^0.$$

Общее решение дифференциального уравнения

$$D^{(\sigma_1)}y(x)+\{\lambda+q(x)\}y(x)=0,$$

удовлетворяющее условию $y_0^{(1)}+\tilde{\beta}y_0^0=0$, совпадает с решением уравнения

$$\frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_0)}}\left[y(x)+\lambda\frac{d^{1-\gamma_2-\gamma_1-\gamma_0}}{dx^{1-\gamma_2-\gamma_1-\gamma_0}}y(x)\right]=\left(\frac{x^{\gamma_1}}{\Gamma(1-\gamma_1)}+\tilde{\beta}\right)y_0^0, \tag{4}$$

откуда следует

$$y(x)+\lambda\frac{d^{1-\gamma_2-\gamma_1-\gamma_0}}{dx^{1-\gamma_2-\gamma_1-\gamma_0}}y(x)=\frac{(x^{1+\gamma_1-\gamma_0})'}{\Gamma(1-\gamma_1)\Gamma(2-\gamma_0)}+\frac{\tilde{\beta}}{\Gamma(2-\gamma_0)}(x^{1-\gamma_0})'. \tag{5}$$

Из (5) имеем

$$y(x)=y_0^0\left\{\frac{(1-\gamma_0+\gamma_1)x^{\gamma_1-\gamma_0}}{\Gamma(1+\gamma_1)\Gamma(2-\gamma_0)}+\frac{\tilde{\beta}(1-\gamma_0)x^{-\gamma_0}}{\Gamma(2-\gamma_0)}+\right.$$

$$+\lambda\int_0^x(x-t)^{1/\rho-1}E_\rho(\lambda(x-t)^{1/\rho};\ 1/\rho)\left(\frac{(1+\gamma_1-\gamma_0)t^{\gamma_1-\gamma_0}}{\Gamma(1+\gamma_1)\Gamma(2-\gamma_0)}+\frac{\tilde{\beta}(1-\gamma_0)t^{-\gamma_0}}{\Gamma(2-\gamma_0)}\right)dt.$$

Теперь, учитывая формулы [2]

$$\int_0^z E_\rho(\lambda t^{1/\rho};\ \mu)t^{\mu-1}dt=z^\mu E_\rho(\lambda z^{1/\rho};\ \mu+1)\quad(\mu>0),$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^z(z-t)^{\alpha-1}E_\rho(\lambda t^{1/\rho};\ \mu)t^{\mu-1}dt=z^{\mu+\alpha-1}E_\rho(\lambda z^{1/\rho};\ \mu+1)\quad(\mu>0,\ \alpha>0),$$

получим

$$y(x)=y_0^0\{c_0x^{\gamma_1-\gamma_0}+c_1\tilde{\beta}x^{-\gamma_0}+\lambda c_0x^{1/\rho+\gamma_1-\gamma_0}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\ 1/\rho+1+\gamma_1-\gamma_0)+$$
$$+\tilde{\beta}c_1\lambda x^{1/\rho+1-\gamma_0}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\ 1/\rho+1-\gamma_0)\}. \tag{6}$$

Из (6) следует

$$D^{(\sigma_0)}y=y_0^0\left\{\frac{c_0x^{\gamma_1-2\gamma_0+1}}{\Gamma(2+\gamma_1-2\gamma_0)}+\frac{\tilde{\beta}x}{\Gamma(2-\gamma_1-\gamma_0)}+c_0\lambda x^{1/\rho+1+\gamma_1-2\gamma_0}\times\right.$$
$$\left.\times E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\ 1/\rho+2+\gamma_1-2\gamma_0)+c_1\lambda x^{1/\rho+2-2\gamma_0}\tilde{\beta}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\ 1/\rho+3+\gamma_1-2\gamma_0)\right\}, \tag{7}$$

$$D^{(\sigma_1)} = y_0^0 \left\{ \frac{c_0 x^{-\gamma_0+1}}{\Gamma(2-\gamma_0)} + \frac{c_1 \tilde{\beta} x^{1-\gamma_1-\gamma_0}}{\Gamma(2-\gamma_1-\gamma_0)} + c_0 \lambda x^{1/\rho+1-\gamma_0} E_\rho(\lambda x^{1/\rho}; 1/\rho+2-\gamma_0) + \right.$$
$$\left. + c_1 \lambda \tilde{\beta} x^{1/\rho+2-\gamma_0-\gamma_1} E_\rho(\lambda x^{1/\rho}; 1/\rho+3-\gamma_1-\gamma_0) \right. . \qquad (8)$$

Наконец, из формул (7), (8) следует лемма 1. Отметим, что из этих же формул вытекает следующая

Лемма 2. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ — собственные значения задачи (A) при $q(x) \equiv 0$, тогда совокупность функций*

$$\Phi_j(x, \lambda_j) = \frac{c_0 x^{\gamma_1-2\gamma_0+1}}{\Gamma(2-\gamma_1-2\gamma_0)} + \frac{\tilde{\beta} c_1 x^{1-2\gamma_0}}{\Gamma(2-2\gamma_0)} + \frac{k c_0 x^{1-\gamma_0}}{\Gamma(2-\gamma_0)} + \frac{\tilde{\beta} k c_1 x^{1-\gamma_1-\gamma_0}}{\Gamma(2-\gamma_1-\gamma_0)} +$$
$$+ c_0 \lambda_j x^{1/\rho+\gamma_1-2\gamma_0+1} E_\rho(\lambda_j x^{1/\rho}; 1/\rho+2+\gamma_1-2\gamma_0) +$$
$$+ \tilde{\beta} c_1 \lambda_j x^{1/\rho+2-2\gamma_0} E_\rho(\lambda_j x^{1/\rho}; 1/\rho+3+\gamma_1-2\gamma_0) +$$
$$+ k c_0 \lambda_j x^{1/\rho+1-\gamma_0} E_\rho(\lambda_j x^{1/\rho}; 1/\rho+2-\gamma_0) +$$
$$+ \tilde{\beta} k c_1 x^{1/\rho+2-\gamma_0-\gamma} E_\rho(\lambda_j x^{1/\rho}; 1/\rho+3-\gamma_0-\gamma_1) \lambda_j \qquad (9)$$

является собственными функциями задачи (A) при $q(x) \equiv 0$.

Лемма 3. *При $q(x) \equiv 0$ все собственные значения задачи (A) простые.*

Доказательство. Рассмотрим собственное подпространство, соответствующее собственному значению λ_j. Из (9) следует, что при любом j размерность этого подпространства равна единице, поэтому все λ_j простые.

Теперь остановимся на задаче $(\tilde{A})$. Известно [2], что множество собственных значений задач (A) и $(\tilde{A})$ совпадают. В частности, это означает, что число λ является собственным значением задачи $(\tilde{A})$ при $q(x) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда λ является нулем функции $\omega_\rho(\lambda)$.

Далее, обозначим через $\tilde{\Phi}_j(x, \lambda_j)$ собственные функции задачи $(\tilde{A})$ при $q(x) \equiv 0$. Отметим, что функции $\tilde{\Phi}_j(x, \lambda_j)$, как и функции $\Phi_j(x, \lambda_j)$, можно выписать явно.

Отметим, что в [2] было показано, что системы функций $\{\Phi_n(x, \lambda_n), \tilde{\Phi}_n(x, \lambda_n)\}_1^\infty$ биортогональны на $(0, 1)$, т. е.

$$\int_0^1 \Phi_n(x, \lambda_n) \tilde{\Phi}_m(x, \lambda_m) dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Теперь из теоремы Гавурина [3] и установленных выше лемм следует

Теорема. *Для собственных значений $\{\mu_n\}_1^\infty$ задачи (A) имеют место следующие оценки: $|\mu_n - \lambda_n| \leqslant \|q(x)\|$.*

Литература

1. Нахушев А. М. // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234, № 2. С. 308—311.
2. Джрбашян М. М. // Изв. АН АрмССР. 1970. Т. 5, № 2. С. 70—96.
3. Гавурин М. К. // Докл. АН СССР. 1954. Т. 96, № 6. С. 1093—1095.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации, г. Нальчик

Поступила в редакцию 17 августа 1993 г.