ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 2 Сентябрь 1962 Октябрь № 5

НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

ЗАМЕЧАНИЯ ПО ОБОСНОВАНИЮ НЕКОТОРЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Б. П. ПУГАЧЕВ

(*Воронеж*)

В ряде работ Альтмана ([1] — [4]) указываются некоторые условия существования решения уравнения

$$Px = 0, \tag{1}$$

где Px — нелинейный оператор, действующий в вещественном гильбертовом пространстве H, и предлагается несколько итерационных методов для его приближенного вычисления. Внимательное знакомство с этими работами показывает, что при естественных предположениях относительно характера оператора P условия, налагаемые Альтманом на уравнение (1), во многих случаях внутренне противоречивы. Ниже приводятся результаты анализа некоторых теорем Альтмана, подтверждающих этот факт. Частично этот анализ в другой форме был проведен М. М. Вайнбергом [5] и Л. А. Кивистиком [6].

1. Пусть оператор Px определен на некоторой сфере $S(x_0;\ r)$ пространства H и при любом $x \in S(x_0;\ r)$ имеет производную Фреше $P'(x)$, причем

$$\| P'(x)\, y \| \geqslant m \| y \| \text{ для любых } x \in S(x_0;\ r) \text{ и } y \in H, \tag{2}$$

где m — некоторое положительное число.

Будем предполагать также, что оператор $Qx = \overline{P}'(x)\, Px$, где $\overline{P}'(x)$ — оператор, сопряженный с $P'(x)$, имеет в сфере $S(x_0; r)$ равномерно ограниченную производную Фреше $Q'(x)$, т. е. при любом $x \in S(x_0;\ r)$

$$\| Q'(x) \| \leqslant K, \tag{3}$$

где K — некоторое положительное число.

С помощью элемента x_0 построим последовательность $\{x_n\}$ по итеративным формулам

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\| Px_n \|^2}{\| Qx_n \|^2}\, Qx_n. \tag{4}$$

В [1] утверждается, что если оператор Px при некотором специальном выборе радиуса сферы $S(x_0;\ r)$ удовлетворяет условиям (2) — (3), а числа K и m связаны соотношением

$$K/m^2 < 1, \tag{5}$$

то при достаточной близости элементов x_1 и x_0 уравнение (1) имеет решение x^*, лежащее в сфере $S(x_0;\ r)$, и последовательность $\{x_n\}$, определяемая по формуле (4), сходится к x^*.

Легко заметить, однако, что при наличии решения x^* уравнения (1) в сфере $S(x_0;\ r)$ и при дополнительном предположении о существовании второй производной Фреше $P''(x)$ в некоторой окрестности точки x^* условия (2), (3) и (5) противоречивы. Действительно, в этом случае

$$Q'(x)\, h = \overline{P}''(x)\,(Px;\ h) + \overline{P}'(x)\, P'(x)\, h.$$

В частности,

$$Q'(x^*) = \overline{P}'(x^*)\,P'(x^*),$$

откуда

$$\| Q'(x^*) \| = \| \overline{P}'(x^*)\,P'(x^*) \| = \| P'(x^*) \|^2.$$

В силу (3) имеем

$$K \geqslant \| Q'(x^*) \| = \| P'(x^*) \|^2.$$

Если воспользоваться условием (2), то при $x = x^*$ получим

$$\| P'(x^*) \| \| y \| \geqslant \| P'(x^*)\,y \| \geqslant m \| y \|,$$

откуда

$$\| P'(x^*) \| \geqslant m$$

и, значит,

$$K \geqslant \| P'(x^*) \|^2 \geqslant m^2$$

или

$$K/m^2 \geqslant 1.$$

В работе [1] рассматривается также итерационный процесс, построенный по формулам

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(Px_n;\ Px_n)}{(P'(x_n)\,Px_n;\ Px_n)}\,Px_n. \tag{6}$$

Обоснование сходимости этого процесса к решению x^* уравнения (1) приводится в условиях, близких к указанным выше. Аналогичным образом можно показать, что и здесь требования, налагаемые на оператор P, вообще говоря, противоречивы.

В этой же работе приводятся еще две теоремы, в которых сходимость последовательностей (4) и (6) устанавливается при некоторых предположениях, являющихся следствием введенных ранее противоречивых требований. Теоремы эти также внутренне противоречивы.

2. В [2] доказывается существование решения уравнения (1) в сфере $S(x_0;\ r)$ и сходимость к нему последовательности $\{x_n\}$, определяемой формулами

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(Px_n;\ Px_n)}{2\,(P'(x_n)\,Px_n;\ Px_n)}\,Px_n. \tag{7}$$

Предполагая, что

$$|(P'(x_n)\,Px_n;\ Px_n)|^{-1} \leqslant B_n,$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \frac{\| Px_n \|^3}{2\,|(P'(x_n)\,Px_n;\ Px_n)|} \leqslant \eta_n,$$

$$h_n = B_n K \eta_n,$$

где K — некоторое положительное число, и используя некоторые условия, автор в процессе доказательства требует, чтобы $h_n \leqslant \frac{1}{2}$, т. е.

$$\tfrac{1}{2} \geqslant B_n K \eta_n \geqslant \tfrac{1}{2} K\,|(P'(x_n)\,Px_n;\ Px_n)|^{-2} \| Px_n \|^3,$$

откуда

$$\| Px_n \| \geqslant \frac{K}{\| P'(x_n) \|^2}.$$

Последнее, очевидно, невозможно, если $\| P'(x_n) \|$ ограничена в некоторой окрестности x^* и $x_n \to x^*$.

В этой же работе приводятся другие условия существования решения уравнения (1) и сходимости итерационного процесса (7), являющихся следствием внутренне противоречивых условий. Соответствующая им теорема также не верна.

3. В [3] обосновывается существование решения уравнения (1) в сфере $S(x_0;\ r)$ и сходимость к нему последовательности $\{x_n\}$, вычисляемой по итеративным

формулам

$$x_{n+1}=x_n-\frac{1}{2}\left[1+\frac{\|P'(x_n)\,Qx_n\|^2+(Px_n;\ P''(x_n)\,[Qx_n]^2)}{4\|Qx_n\|^4}\,\|Px_n\|^2\right]\frac{\|Px_n\|^2}{\|Qx_n\|^2}\,Qx_n.$$

Предполагая, что

$$\frac{1}{\|Qx_0\|}\leqslant B_0,\quad \frac{\|Px_0\|^2}{\|Qx_0\|}\leqslant d_0,$$

$$\|F''(x)\|\leqslant K \text{ для всех } x\in S(x_0;\ r), \tag{8}$$

$$h_0=B_0K\eta_0\leqslant 1.7,$$

где

$$F(x)=\|Px\|^2 \text{ и } \eta_0=\left(1+\frac{1}{8}B_0Kd_0\right)d_0,$$

и привлекая еще некоторые условия, автор доказывает сходимость последовательности $\{x_n\}$ к решению x^* уравнения (1).

Покажем, что налагаемые автором ограничения противоречивы. В самом деле, автор требует существования $F'''(x)$ в сфере $S(x_0,\ r)$, а следовательно, и непрерывности $F''(x)$ в этой сфере. Так как

$$F''(x^*)=2\overline{P}'(x^*)\,P'(x^*),$$

то можно считать, что

$$K\geqslant 2\,(\|P'(x_0)\|^2+\varepsilon_1),$$

где $\varepsilon_1\to 0$ при $x_0\to x^*$.

Легко видеть, что

$$\eta_0\geqslant\left[1+\frac{1}{4}\,\frac{(\|P'(x_0)\|^2+\varepsilon_1)}{\|Qx_0\|^2}\,\|Px_0\|^2\right]\frac{\|Px_0\|^2}{\|Qx_0\|}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{4}\,\frac{\|P'(x_0)\|^2}{\left\|\overline{P}^1(x_0)\dfrac{Px_0}{\|Px_0\|}\right\|^2}\right)\frac{\|Px_0\|^2}{\|Qx_0\|}+\varepsilon_2\geqslant\frac{5}{4}\,\frac{\|Px_0\|^2}{\|Qx_0\|^2}+\varepsilon_2,$$

где $\varepsilon_2\to 0$ при $x_0\to x^*$.

Очевидно,

$$h_0\geqslant\frac{1}{\|Qx_0\|}\cdot 2\,(\|P'(x_0)\|^2+\varepsilon_1)\left(\frac{5}{4}\,\frac{\|Px_0\|^2}{\|Qx_0\|}+\varepsilon_2\right)=\frac{5}{2}\,\frac{\|P'(x_0)\|^2}{\left\|\overline{P}'(x_0)\dfrac{Px_0}{\|Px_0\|}\right\|^2}+\varepsilon\geqslant 2.5+\varepsilon,$$

где $\varepsilon\to 0$ при $x_0\to x^*$.

Полученное соотношение противоречит (8).

4. Пусть Px — нелинейный оператор, определенный в некоторой сфере $S(x_0;\ r)$ пространства L^p $(1\leqslant p<2)$ со значениями в этом пространстве.

Введем обозначения

$$fx=\overline{P}'(x)\,(\operatorname{sign}Px\,|\,Px\,|^{p-1}) \tag{9}$$

и

$$y_n=\operatorname{sign}fx_n\,|\,fx_n\,|^{1/(p-1)}.$$

В [4] утверждается существование решения x^* уравнения (1) в сфере $S(x_0;\ r)$ и сходимость последовательности $\{x_n\}$, построенной по формулам

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\|Px_n\|^p}{p\,\|fx_n\|^q}\,y_n, \tag{10}$$

к этому решению. При доказательстве этих утверждений требуется выполнение соотношения

$$\|P'(x)\,y\|\geqslant m\,\|y\|,\ m>0,\ \text{для любого } x\in S(x_0;\ r) \text{ и любого } y\in H \tag{11}$$

и существование в этой сфере ограниченной производной Фреше оператора fx.

Нетрудно убедиться, что если $P'(x)$ дифференцируем по Фреше в точке $x=x^*$, то эти условия взаимно противоречивы. В самом деле, из условия (11) вытекает,

что $P'(x^*) \neq 0$, а значит, и $\overline{P}'(x^*) \neq 0$. Кроме того, в некоторой окрестности точки x^* существует оператор $[\overline{P}'(x)]^{-1}$, дифференцируемый в x^*.

Последнее очевидным образом вытекает из соотношения

$$[\overline{P}'(x^*+h)]^{-1} - [\overline{P}'(x^*)]^{-1} = -[\overline{P}'(x^*+h)]^{-1}[\overline{P}'(x^*+h) - \overline{P}'(x^*)][\overline{P}'(x^*)]^{-1}.$$

Из формулы (9) и дифференцируемости fx следует, что оператор

$$Fx = [\overline{P}'(x)]^{-1} fx = \operatorname{sign} Px \,|\, Px \,|^{p-1}$$

также дифференцируем в точке x^*. Однако при $1 < p < 2$ это невозможно, так как отношение

$$\frac{F(x^*+th) - F(x^*)}{t} = \frac{1}{t} \operatorname{sign} P(x^*+th) \,|\, P(x^*+th) \,|^{p-1} =$$

$$= \frac{1}{t} \operatorname{sign} P(x^*+th) \,|\, tP'(x^*)h + \alpha(t;\, h) \,|^{p-1} =$$

$$= |\, t \,|^{p-2} \operatorname{sign} t \operatorname{sign} P(x^*+th) \left| P'(x^*)h + \frac{\alpha(t,\, h)}{t} \right|^{p-1}$$

при $t \to 0$ конечного предела не имеет, а следовательно, условия, используемые при установлении сходимости процесса (10), не реализуемы.

В этой же работе для $p > 1$ утверждается другая теорема, в которой приведены несколько иные условия сходимости итерационного процесса (10). Однако в условия теоремы снова входит существование производной $f'(x)$ в сфере $S(x_0;\, r)$, в которой затем гарантируется существование решения x^*. Из приведенных рассуждений следует, что при $1 < p < 2$ такие условия неосуществимы. При $p = 2$ эта теорема переходит в одну из рассмотренных выше, условия которой также внутренне противоречивы.

Поступила в редакцию
9. 04. 1962

Цитированная литература

1. M. A l t m a n. Connection between the method of steepest descent and Newtons method. Bull. Acad. polon. sci. Cl. III, 1957, 5, № 11, 1031—1036.
2. M. A l t m a n. A note one the approximate solutions of non linear operator equations in Hilbert space. Bull Acad. polon. sci. Cl. III, 1957, 5, № 8, 783—787.
3. M. A l t m a n. An iterative method of solving functional equation. Bull. Acad. polon. sci, 1961, 9, № 2, 57—62.
4. M. A l t m a n. On the approximate solutions of operator equations in L_p space. Bull. Acad. polon. sci. Cl. III, 1957, 5, № 12, 1099—1103.
5. М. М. В а й н б е р г. РЖ Математика, 1958, № 9, реф. 7929.
6. Л. А. К и в и с т и к. О методе наискорейшего спуска для решения нелинейных уравнений. Изв. АН Эст ССР, Сер. физ.-матем. и техн. наук, 1960, 9, № 2, 145—159.

О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, А. Ю. ЛЕВИН

(*Воронеж*)

1. Пусть имеется серия однотипных задач $Z_1, Z_2, \ldots$, причем в задаче Z_n $(n = 1, 2, \ldots)$ требуется найти n чисел $c_1^{(n)}, c_2^{(n)}, \ldots, c_n^{(n)}$, удовлетворяющих определенным условиям. Эту совокупность будем называть вектор-решением задачи Z_n. Может случиться, что значения $c_i^{(n)}$ фактически не зависят от номера задачи n, т. е.

$$c_i^{(i)} = c_i^{(i+1)} = c_i^{(i+2)} = \cdots \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$