V. D. Mazurov, Groups Containing a Self-Centralizing Subgroup of Order 3, *Algebra Logika*, 2003, Volume 42, Number 1, 51–64

Алгебра и логика, 42, № 1 (2003), 51—64

УДК 512.542

О ГРУППАХ, СОДЕРЖАЩИХ САМОЦЕНТРАЛИЗУЕМУЮ ПОДГРУППУ ПОРЯДКА 3*)

В. Д. МАЗУРОВ

В 1962 году В. Фейт и Дж. Томпсон [1] получили описание конечных групп, содержащих подгруппу X порядка 3, совпадающую со своим централизатором. Цель настоящей работы — перенести этот результат на произвольные группы с условием, что X порождает с каждой своей сопряженной подгруппой конечную подгруппу.

ТЕОРЕМА. *Пусть группа G содержит подгруппу X порядка 3 такую, что $C_G(X) = \langle X \rangle$. Если для любого элемента $g \in G$ подгруппа $\langle X, X^g \rangle$ конечна, то справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) *$G = NN_G(X)$ для периодической нильпотентной ступени 2 подгруппы N, и NX — группа Фробениуса с ядром N и дополнением X.*

(2) *$G = NA$, где A изоморфна $A_5 \simeq SL_2(4)$, а N — нормальная элементарная абелева 2-подгруппа. При этом N — прямое произведение нормальных в G подгрупп порядка 16, изоморфных естественному $SL_2(4)$-модулю размерности 2 над полем порядка 4.*

(3) *G изоморфна $L_2(7)$.*

В частности, G локально конечна.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты N 02-01-00495 и 02-01-39005, Минобразования РФ, грант Е00-1.0-77 в области фундаментального естествознания и программа "Фундаментальные исследования высшей школы. Университеты России", проект УР.04.01.031.

В случае, когда конечной является любая подгруппа $\langle X, X^g, X^h\rangle$, $g, h \in G$, эта теорема была доказана в магистерской диссертации А. Б. Каргина (Новосибирск, 2002). Наши рассуждения основываются на использовании алгоритма перечисления смежных классов для доказательства конечности некоторых конечно определенных групп. Все необходимые вычисления выполнены с использованием пакета GAP [2].

Следующий пример показывает, что условие конечности подгрупп $\langle X, X^g\rangle$ нельзя вычеркнуть.

ПРИМЕР. Пусть G — периодическое произведение нечетного показателя $n \geqslant 665$ двух групп G_1, G_2 порядка 3 (см. определение в [3], а также [4, 5]. В силу [3, теор. 6], G — бесконечная группа периода $3n$. Учитывая [3, теор. 8], имеем $C_G(G_1) = G_1$. По [5], G — бесконечная простая не локально конечная группа.

§ 1. Известные результаты и предварительные леммы

ЛЕММА 1 [6]. *Пусть x — элемент нечетного простого порядка из собственной подгруппы H группы G. Если для любого $g \in G \setminus H$ подгруппа $\langle x, x^g\rangle$ является конечной группой Фробениуса с дополнением $\langle x\rangle$, то $G = FH$ для некоторой периодической нормальной подгруппы F и $F\langle x\rangle$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением $\langle x\rangle$.*

Здесь под группой Фробениуса с ядром N и дополнением C понимается полупрямое произведение NC нормальной подгруппы N и такой подгруппы C, что $C \cap C^n = 1$ для $1 \neq n \in N$ и $NC \setminus \bigcup_{n\in N} C^n \subseteq N$.

ЛЕММА 2 [1]. *Группа $\langle x, y \mid x^3 = y^3 = (xy)^3 = 1\rangle$ содержит абелеву нормальную подгруппу индекса 3, порожденную элементами xy^{-1} и $y^{-1}x$.*

ЛЕММА 3 [7]. *Если $G = NC$ — группа Фробениуса с ядром N и дополнением C порядка 3, то N двуступенно нильпотентно.*

ЛЕММА 4. 1. *Если x, y — элементы порядка 3, порождающие A_5, то xy, xy^{-1} — элементы порядка 5, xx^y — элемент порядка 2 и $[x, y] =$*

$= x^{-1}x^y$ — *элемент порядка* 3.

2. *Группа* $G = \langle x, y \mid x^3 = y^3 = (xy)^5 = (xy^{-1})^5 = (xx^y)^2 = 1\rangle$ *изоморфна* A_5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Не ограничивая общности, можно считать, что $x = (123)$, $y = (345)$, и непосредственно проверить все условия.

2. Используя алгоритм перечисления смежных классов, легко вычислить, что $|G| = 60$. Теперь заключение следует из п. 1.

На протяжении статьи через B обозначается естественное полупрямое произведение естественного двумерного $SL_2(F)$-модуля E и $A = SL_2(F)$, где F — поле порядка 4.

ЛЕММА 5. 1. *Существуют два элемента порядка* 3*, порождающие* B*. Если* x, y *— произвольные элементы порядка* 3*, порождающие* B*, то* xy, xy^{-1} *— элементы порядка* 5*,* xx^y *— элемент порядка* 4 *и* $[x, y] = x^{-1}x^y$ *— элемент порядка* 3.

2. *Группа* B *действует транзитивно при сопряжении на инволюциях* $E = O_2(B)$*. Более того, если* $e_1, e_2 \in E$*,* $1 \neq e_1 \neq e_2 \neq 1$*, то существует элемент* x *порядка* 3 *в* $A = SL_2(F)$ *такой, что* $e_1^x = e_2$.

3. *Пусть* x *— элемент порядка* 3 *в* A*. Тогда существует подгруппа* A_1 *в* B*, изоморфная* A *и такая, что* $x \in A_1$ *и* $\langle A, A_1\rangle = B$.

4. *Группа* $G = \langle x, y \mid x^3 = y^3 = (xy)^5 = (xy^{-1})^5 = [x, y]^3 = 1\rangle$ *изоморфна* B.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Существуют элементы x, z порядка 3, порождающие B по модулю E. Если $\langle x, z\rangle = B$, то положим $y = z$. В противном случае $\langle x, z\rangle \simeq A$ и, по лемме 4, xx^z — элемент порядка 2, лежащий вне E. Существует элемент $c \in E$, что $[xx^z, c] \neq 1$, поэтому xx^zc — элемент порядка 4. Положим $b = zcz^{-1}$. Так как $C_E(x) = 1$, то $E\langle x\rangle$ — группа Фробениуса и, следовательно, существует $a \in E$, для которого $[x, a] = b$. Положим $y = az$. Поскольку $C_E(z) = 1$, порядок y равен 3. Далее, $xx^y = xx^{az} = xz^{-1}a^{-1}xaz = xz^{-1}xz(z^{-1}(x^{-1}a^{-1}xa)z) = xx^zb^z = xx^zc$ — элемент порядка 4. По лемме 4, $\langle x, y\rangle$ не может быть изоморфна A. С другой стороны, $E\langle x, y\rangle = B$. Так как E — минимальная нормальная подгруппа в B, то $\langle x, y\rangle = B$.

Предположим теперь, что x, y — произвольные элементы порядка 3, порождающие B. Тогда Ex, Ey — элементы порядка 3, порождающие $B/E \simeq A$. По лемме 4 порядки элементов xy, xy^{-1} делятся на 5, порядок xx^y четен и порядок $x^{-1}x^y$ делится на 3. Поскольку централизаторы в E элементов порядков 5 и 3 тривиальны, порядки элементов xy, xy^{-1} равны 5, а порядок $x^{-1}x^y$ равен 3. Если порядок xx^y равен 2, то, по лемме 4, $\langle x, y\rangle \simeq A$, что неверно. Таким образом, порядок xx^y равен 4.

2. Если e_1, e_2 линейно независимы над F, то существует $x \in A$, для которого $e_1^x = e_2, e_2^x = e_1 + e_2$. Непосредственное вычисление показывает, что x — порядка 3. Если $e_2 = \lambda e_1$ и $\lambda \in F$, то $\lambda \neq 1$, $\lambda^3 = 1$ и существует $x \in A$ такой, что $e_1^x = \lambda e_1 = e_2$, $e_3^x = \lambda^{-1} e_3$ для некоторого $e_3 \in E$, не зависящего линейно от e_1. Очевидно, порядок x равен 3.

3. По лемме 4 существует $y \in A$ такой, что $\langle x, y\rangle = A$ и $y^3 = (xy)^5 = (xy^{-1})^5 = (xx^y)^2 = 1$. Пусть $t = xx^y$. Тогда $C_E(t) \neq 1$. Положим $e_1 \in C_E(t), e_1 \neq 1$. Так как $C_E(x^y) = 1$, существует $e \in E$, для которого $[x^y, e] = e_1$. Ясно, что $e \neq 1$. Пусть $y_1 = ye$. Поскольку в B нет элементов порядков 6 и 10, $y_1^3 = (xy_1)^5 = (xy_1^{-1})^5 = 1$. Далее, $xx^{y_1} = xey^{-1}xye = (xy^{-1}xy)(y^{-1}x^{-1}yey^{-1}xye) = t[x^y, e] = te_1$ — элемент порядка 2. Теперь, по п. 2 леммы 4, $A_1 = \langle x, y_1\rangle$ изоморфна $A_5 \simeq A$. Очевидно, $\langle A, A_1\rangle$ содержит e. Так как E — минимальная нормальная подгруппа в B, то $B = AE = \langle A, e\rangle = \langle A, A_1\rangle$.

4. Алгоритм перечисления смежных классов дает $|G| = 960 = |B|$. По п. 1, B — гомоморфный образ G, поэтому $G \simeq B$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. 1. *Пусть* $H = GL_3(2) \simeq L_2(7)$. *Тогда*

(а) *существуют такие элементы* x, y *порядка* 3, *порождающие* H, *что порядки* xy *и* xy^{-1} *равны* 4;

(б) *существуют такие элементы* x, y *порядка* 3, *порождающие* H, *что порядок* xy *равен* 4, *а порядок* xy^{-1} *равен* 7.

2. (а) *Пусть* $H = \langle x, y \mid x^3 = y^3 = (xy)^4 = (xy^{-1})^4 = 1\rangle$. *Тогда* $H \simeq L_2(7)$.

(б) *Пусть* $H = \langle x, y \mid x^3 = y^3 = (xy)^4 = (xy^{-1})^7 = [x, y]^m = 1\rangle$. *Тогда* $H \simeq L_2(7)$, *если* $m = 3$, *и* $H = 1$, *если* $m = 4$ *или* 7.

3. *Пусть $H \simeq L_2(7)$ и x, y — элементы порядка 3, порождающие H. Тогда либо $(xy)^4 = (xy^{-1})^4 = 1$, либо $(xy)^4 = (xy^{-1})^7 = [x,y]^3 = 1$, либо $(xy)^7 = (xy^{-1})^4 = [x,y]^3 = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in H.$$

Можно проверить непосредственно, что порядки элементов ac, ac^{-1} и ab равны 4, порядок ab^{-1} равен 7, а порядок $[a,b]$ равен 3. Предположим, что $\langle a, c\rangle \neq H$. Тогда $\langle a, c\rangle$ содержится в максимальной подгруппе, изоморфной S_4. Отсюда и поскольку все элементы порядка 3 из S_4 содержатся в A_4, силовская 2-подгруппа которой элементарна, то порядок ac не может быть равен 4. Поэтому $\langle a, c\rangle = H$.

Порядок $\langle a, b\rangle$ делится на 3, 4 и 7. Поскольку в H нет подгрупп индекса 2, $\langle a, b\rangle = H$.

2. С помощью алгоритма перечисления смежных классов можно проверить, что $|H| = 168 = |L_2(7)|$ в п. (а), а также в п. (б), если $m = 3$. С другой стороны, $|H| = 1$ в п. (б), если $m = 4$ или $m = 7$. Теперь утверждение следует из п. 1.

3. Предположим противное. Порядок каждого элемента из H либо делит 4, либо равен 3, либо равен 7. По лемме 2, $(xy)^3 \neq 1 \neq (xy^{-1})^3$. Если $(xy)^4 = (xy^{-1})^7 = 1$, то утверждение верно по п. 2 (б). Если $(xy)^7 = (xy^{-1})^4 = 1$, то, заменив y на y^{-1} и заметив, что порядки $[x, y^{-1}]$ и $[x,y]$ равны, можно снова применить п. 2 (б). Итак, $(xy)^7 = (xy^{-1})^7 = 1$. Пусть a и b — прообразы порядка 3 элементов x, y в $SL_2(7)$. Тогда $a^2 + a + 1 = b^2 + b + 1 = 0$ и характеристические корни ab^{-1} равны $\varepsilon = \pm 1$. Пусть v — собственный вектор для ab^{-1}. Тогда v не является собственным вектором для a, поэтому v и va линейно независимы. Так как $vab^{-1} = \varepsilon v$, то $va = \varepsilon vb$, отсюда $vab = \varepsilon vb^2 = \varepsilon v(-1-b) = -\varepsilon v - va$. Таким образом, a и b представляются в базе v, va матрицами $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon & -1 \end{pmatrix}$ над $GF(7)$ соответственно. Отсюда вытекает, что след ab равен $-2\varepsilon + 1 \neq \pm 1$,

и поэтому порядок ab не может делиться на 7. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 7. *Пусть элементы x, y порядка 3 порождают группу H. Положим $X = \langle x \rangle$.*

1. *Если $H \simeq A_5$, то X содержится точно в двух подгруппах B_1, B_2 из H, изоморфных A_4. Они сопряжены элементом из $N_H(X)$, и $\langle B_1, B_2 \rangle = H$. Далее, с точностью до перестановки B_1, B_2 выполняются следующие равенства:*

$$x^{B_1} = \{x, a_1, a_2, a_3\}, \text{ где } a_1 = yx^{-1}y^{-1}, a_2 = a_1^x, a_3 = a_2^{-1}x,$$

$$x^{B_2} = \{x, b_1, b_2, b_3\}, \text{ где } b_1 = y^{-1}x^{-1}y, b_2 = b_1^x, b_3 = b_2^x.$$

Порядок $a_i b_i$ равен 2, порядок $a_i b_i^{-1}$ равен 3, порядки $a_i b_j$ и $a_i b_j^{-1}$ равны 5, $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$.

2. *Если $H \simeq L_2(7)$, то X содержится точно в двух подгруппах B_1, B_2 из H, изоморфных A_4. Они $N_H(X)$-инвариантны, и $\langle B_1, B_2 \rangle = H$. Далее, если $(xy)^4 = (xy^{-1})^4 = 1$, то с точностью до перестановки B_1, B_2 верны следующие равенства:*

$$x^{B_1} = \{x, a_1, a_2, a_3\}, \text{ где } a_1 = yxyx^{-1}yxy, a_2 = a_1^x, a_3 = a_2^x,$$

$$x^{B_2} = \{x, b_1, b_2, b_3\}, \text{ где } b_1 = x^{-1}y^{-1}xyxy^{-1}x^{-1}, b_2 = b_1^x, b_3 = b_2^x.$$

Порядки $a_i b_i$ и $a_i b_i^{-1}$ равны 4, порядок $a_i b_j$ равен 7 и порядок $a_i b_j^{-1}$ равен 3, $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$. Существует единственная инволюция $t \in H$ такая, что $x^t = x^{-1}, y^t = y^{-1}$; она равна $yxyx^{-1}yxy^{-1}xy$. Кроме того,

$$a_1^t = a_1^{-1}, a_2^t = a_3^{-1}, a_3^t = a_2^{-1}; b_1^t = b_1^{-1}, b_2^t = b_3^{-1}, b_3^t = b_2^{-1}.$$

Автоморфизм φ, определенный равенствами $x^\varphi = x$ и $y^\varphi = y^{-1}$, переставляет B_1 и B_2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится непосредственно.

ЛЕММА 8. *Пусть F — свободная группа ранга 3 со свободными образующими x, y, z.*

1. *Пусть*

$$A = \{x^3, y^3, z^3, (xy)^3, (xy^{-1})^2, (xz)^3, (xz^{-1})^2\},$$

$$B_1 = \{(yz)^3\}, B_2 = \{(yz^{-1})^3\},\ \ B_3 = \{(yz)^4, (yz^{-1})^4\},$$

$$B_4 = \{(yz)^4, (yz^{-1})^7, [y,z]^3\},\ \ B_5 = \{(yz)^7, (yz^{-1})^4, [y,z]^3\},$$

$$B_6 = \{(yz)^5, (yz^{-1})^5, [y,z]^3\},$$

C_i *— множество, полученное из* B_i *заменой* y *на* y^x *в каждом слове* B_i*,* $i = 1, 2, ..., 6$*;* $D_{ij} = A \cup B_i \cup C_j$ *и* $G_{ij} = F/\langle D_{ij}^F\rangle$*,* $i, j = 1, 2, \dots, 6$*. Тогда группа* G_{ij} *конечна. Более точно,* $|G_{11}| = 192$*,* $|G_{12}| = |G_{21}| = 12$*,* $|G_{22}| = 504$*,* $|G_{23}| = |G_{32}| = 168$*,* $|G_{26}| = |G_{62}| = |G_{66}| = 960$*,* $|G_{ij}| = 1$ *во всех остальных случаях.*

2. *Пусть* $a = yxyx^{-1}yxy, b = x^{-1}y^{-1}xyxy^{-1}x^{-1}$*,* $A = \{x^3, y^3, (xy)^4, (xy^{-1})^4, z^3, (xz)^3, (xz^{-1})^2\}$*.*

(а) *Если* N *— подгруппа* F*, порожденная нормальным замыканием множества* $A \cup \{(az^{-1})^2, (a^x z^{-1})^2, (bz)^3, (bz^{-1})^4, (b^x z^{-1})^4\}$*, то* $G = F/N$ *— конечная группа порядка* 10752.

(б) *Если* N *— подгруппа* F*, порожденная нормальным замыканием множества* $A \cup \{(az^{-1})^2, (a^x z^{-1})^2, (bz)^4, (bz^{-1})^4, (b^x z^{-1})^3, (b^x z)^7\}$*, то* $G = F/N$ *— конечная группа порядка* 1344.

(в) *Если* N *— подгруппа* F*, порожденная нормальным замыканием множества* $A \cup \{(az)^4, (az^{-1})^4, (a^x z^{-1})^3, (a^x z)^7, (bz)^4, (bz^{-1})^4, (b^x z^{-1})^3, (b^x z)^7, (x^{-1}yxyx^{-1}yxy^{-1}xyz)^2\}$*, то* $G = F/N$ *— конечная группа порядка* 6048.

3. *Пусть* $a = yx^{-1}y^{-1}$*,* $b = y^{-1}xy$*,* $A = \{x^3,\ y^3,\ (xy)^5,\ (xy^{-1})^5,\ (xx^y)^2,\ z^3,\ (xz)^3,\ (xz^{-1})^2,\ (az)^3,\ (az^x)^3,\ (az^{-1})^4,\ (bz)^3,\ (bz^x)^3,\ (bz^{-1})^4\}$*. Если* N *— подгруппа* F*, порожденная нормальным замыканием* A*, то* $G = F/N$ *— конечная группа порядка* 30720.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится непосредственно с помощью алгоритма перечисления смежных классов.

§ 2. Доказательство теоремы

Пусть G — группа, x — элемент из G порядка 3, $C_G(x) = X = \langle x \rangle$ и подгруппа $\langle X, X^g \rangle$ конечна для любого элемента $g \in G$. Подгруппу U из G назовем A_4-*подгруппой*, если U изоморфна знакопеременной группе A_4 и $X \leq U$. Доказательство теоремы разобьем на ряд лемм.

ЛЕММА 9. *Пусть H — конечная подгруппа из G, содержащая X. Тогда верно одно из следующих утверждений:*

(1) *$H = NN_H(X)$, где N — двуступенно нильпотентная нормальная в H подгруппа, $N \cap N_H(X) = 1$ и либо $N = 1$, либо NX — группа Фробениуса с ядром N и дополнением X;*

(2) *$H = NA$, где $A \simeq A_5 \simeq SL_2(4), N$ — прямое произведение подгрупп порядка 16, нормальных в H и изоморфных как A-модули естественному $SL_2(4)$-модулю. Если элементы a, b порядка 3 порождают H по модулю N, то либо $\langle a, b \rangle \simeq A$, либо $\langle a, b \rangle \simeq B$;*

(3) *$H \simeq L_2(7)$.*

В частности, либо H — группа Фробениуса с дополнением X, либо H содержит $N_G(X)$. Если H неразрешима, то H порождается своими A_4-подгруппами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Фейта—Томпсона [1] справедливо одно из следующих утверждений:

(а) $H = NN_H(X)$, где N — нильпотентная нормальная подгруппа в H, $N \cap N_H(X) = 1$ и либо $N = 1$, либо NX — группа Фробениуса с ядром N и дополнением X;

(б) $H/O_2(H) \simeq A_5$;

(в) $H \simeq L_2(7)$.

В случае (а), N двуступенно нильпотентна по теореме Бернсайда [8, с. 90]. Таким образом, в этом случае выполняется п. (1) леммы.

Рассмотрим случай (б). Пусть $E = O_2(H) \neq 1$. Поскольку для любого нетривиального неприводимого A_5-модуля V над полем порядка 2 элемент порядка 5 из A_5 не имеет в V нетривиальных неподвижных точек, $C_E(z) = 1$ для любого элемента порядка 5 из H. Поэтому H не содержит элементов порядка 10 и 6. Пусть a, b — элементы порядка 3 из H, которые порождают H по модулю E. По лемме 4, ab и ab^{-1} — элементы порядка 5 по модулю E и порядок $[a, b]$ по модулю E равен 3. Поскольку в H нет элементов порядков 6 и 10, $(ab)^5 = (ab^{-1})^5 = [a, b]^3 = 1$. По лемме 5, $\langle a, b\rangle$ — нетривиальный гомоморфный образ B и поэтому содержит подгруппу $A \simeq A_5$, дополняющую E в H.

Пусть M — собственная подгруппа в E, нормальная в H и максимальная относительно этих условий. Тогда $V = E/M$ — неприводимый A-модуль над полем порядка 2 и, поскольку $C_V(X) = 1$, этот модуль изоморфен естественному $SL_2(4)$-модулю. Пусть $L = H/M$. Тогда L изоморфна B, и поэтому существуют элементы a, b порядка 3 по модулю M, порождающие H по модулю M. Так же, как раньше, заключаем, что $a^3 = b^3 = (ab)^5 = (ab^{-1})^5 = [a, b]^3 = 1$. По лемме 5, $\langle a, b\rangle \simeq B$.

Отождествим $\langle a, b\rangle$ с B. Можно считать, что $A \leq B$. Поэтому $H = MB$ и $M \cap B = 1$. По индукции, M — прямое произведение подгрупп порядка 16, каждая из которых инвариантна в MA. Осталось только доказать, что $[O_2(B), M] = 1$. Поскольку $O_2(B)$ — минимальная нормальная подгруппа в $B = O_2(B)A$, достаточно установить, что $C_{O_2(B)}M \neq 1$. Пусть S — это X-инвариантная силовская 2-подгруппа из B и $T = SE$. Очевидно, S неабелева и $[S, S] \leq O_2(B)$. Поскольку $\langle T, X\rangle$ — группа Фробениуса, ступень нильпотентности T не превосходит двух. В частности, $[[S, S], M] = 1$ и, значит, $C_{O_2(B)}M \neq 1$.

Последнее утверждение леммы теперь вытекает из леммы 7. Лемма доказана.

Заметим, что заключение леммы в случае, когда $H/O_2(H) \simeq A_5$, легко вывести из [9, теор. 8.2]; мы привели здесь развернутое доказательство, поскольку доказательство указанной теоремы в [9] только намечено.

ЛЕММА 10. *Пусть $g \in G \setminus N_G(X), y = x^g$. Тогда для $H = \langle x, y\rangle$ выполняется одно из следующих условий.*

1. *$(xy)^3 = 1$ или $(xy^{-1})^3 = 1$, и H — группа Фробениуса с дополнением X.*

2. *$(xy)^5 = (xy^{-1})^5 = [x, y]^3 = 1$, и H — гомоморфный образ B. Точнее,*

если $(xx^y)^2 = 1$, *то* $H \simeq A_5$; *если* $(xx^y)^2 \neq 1$, *то* $H \simeq B$.

3. $H \simeq L_2(7)$, *и верно одно из следующих утверждений*:

(а) $(xy)^4 = (xy^{-1})^4 = 1$;

(б) $(xy)^4 = (xy^{-1})^7 = [x, y]^3 = 1$;

(в) $(xy)^7 = (xy^{-1})^4 = [x, y]^3 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению, H конечна, поэтому ее строение определяется леммой 9. Если верен п. (1) этой леммы, то, поскольку H порождена элементами порядка 3, H является группой Фробениуса с дополнением порядка 3. Таким образом, выполняется п. 1.

Если $H \simeq L_2(7)$, то по лемме 6 выполняется п. 3.

Пусть $H/O_2(H) \simeq A_5$. Тогда по лемме 4 порядки элементов xy, xy^{-1}, $[x, y]$ по модулю $O_2(H)$ равны 5, 5, 3, соответственно. Группа H не содержит элементов порядка 6, по предположению, и элементов порядка 10, по лемме 9. Итак, $(xy)^5 = (xy^{-1})^5 = [x, y]^3 = 1$, и по лемме 5 выполняется п. 2. Лемма доказана.

ЛЕММА 11. *Пусть* U, V — A_4*-подгруппы в* G. *Тогда для* $H = \langle U, V\rangle$ *выполняется одно из следующих утверждений*:

(а) $H \simeq L_2(7)$, *и* U, V *инвариантны относительно* $N_G(X)$;

(б) $H \simeq A_5$ *или* $H \simeq B$, *и подгруппы* $\langle U^{N_H(X)}\rangle$, $\langle V^{N_H(X)}\rangle$ *неразрешимы*;

(в) H — *группа Фробениуса с дополнением* X, *ядро которой является двуступенно нильпотентной группой периода* 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию найдется $y \in U$ такой, что $y^3 = (xy)^3 = (xy^{-1})^2 = 1$. Аналогично, существует $z \in V$, для которого $z^3 = (xz)^3 = (xz^{-1})^2 = 1$. Поскольку y и z сопряжены с x, подгруппы $\langle y, z\rangle$ и $\langle y^x, z\rangle$ конечны и удовлетворяют заключению леммы 10. Таким образом, $H = \langle x, y, z\rangle$ — гомоморфный образ одной из групп G_{ij} леммы 8, $i, j = 1, 2, \ldots, 6$, поэтому H конечна. Сравнивая строение конечных подгрупп из G (см. лемму 9) с порядками групп G_{ij} из леммы 8, нетрудно заключить, что либо H удовлетворяет (в), либо H изоморфна $L_2(7)$, либо H — гомоморфный образ группы B. Теперь заключение вытекает из леммы 7.

ЛЕММА 12. *Пусть R, S, T — это X-инвариантные подгруппы порядка 4. Если $H = \langle R, S\rangle$ изоморфна $L_2(7)$, а $\langle R, T\rangle$ — 2-группа, то $R = T$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 9 достаточно доказать, что $\langle H, T\rangle$ конечна. Из п. 2 леммы 7 вытекает, что $H = \langle X, R, S\rangle$. По п. 1(а) леммы 6 существует $y \in H$ такой, что $H = \langle x, y\rangle$ и $y^3 = (xy)^4 = (xy^{-1})^4 = 1$. По п. 2 леммы 7, $U = \langle R, x\rangle$ и $V = \langle S, x\rangle$ исчерпывают множество A_4-подгрупп группы H, и, заменив при необходимости y на y^{-1}, можно считать, что $U = \langle x, a\rangle, V = \langle x, b\rangle$, где $a = yxyx^{-1}yxy, b = x^{-1}y^{-1}xyxy^{-1}x^{-1}$. Положим $W = TX$ и выберем $z \in W$ так, чтобы $z \neq x, z^3 = (xz)^3 = 1$. Тогда $(xz^{-1})^2 = 1$.

Предположим сначала, что $[R, T] = 1$. Тогда $(a^x z^{-1})^2 = 1$. Если $L = \langle S, T\rangle$ — 2-группа, то LX — группа Фробениуса с дополнением X и поэтому период L делит 4. Следовательно, $(bz)^3 = (bz^{-1})^4 = (b^x z^{-1})^4 = 1$, и из п. 2(а) леммы 8 получаем, что $\langle H, T\rangle$ конечна.

Пусть теперь $L = \langle S, T\rangle$ не является 2-группой. В силу п. 2 леммы 7, S является $N_G(X)$-инвариантной подгруппой, поэтому $L = LX$ изоморфна $L_2(7)$ по лемме 11. По п. 2 леммы 7, z может быть выбран так, чтобы выполнялись равенства $(bz)^4 = (bz^{-1})^4 = (b^x z^{-1})^3 = (b^x z)^7 = 1$. По п. 2(в) леммы 8, $\langle H, T\rangle$ конечна.

Пусть $[R, T] \neq 1$. Поскольку $[R, T]$ содержится в центре $\langle R, T\rangle$, существует X-инвариантная подгруппа T_1 порядка 4 такая, что $T_1 \neq R$ и $[T_1, R] = 1$. Как отмечалось, это невозможно. Лемма доказана.

ЛЕММА 13. *Группа G не может содержать пару подгрупп L, M такую, что $L \simeq A_5$, $M \simeq L_2(7)$ и $x^G \cap L \neq \varnothing \neq x^G \cap M$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Можно считать, что $X \leq L \cap M$. По п. 2 леммы 7 найдутся A_4-подгруппы B_1, B_2 из M такие, что $\langle B_1, B_2\rangle = M$. Кроме того, B_1, B_2 являются $N_G(X)$-инвариантными. Положим $R = O_2(B_1), S = O_2(B_2)$. Если W — A_4-подгруппа из L, то W не может быть $N_G(X)$-инвариантной по п. 1 леммы 7, и, в силу леммы 11, $\langle B_1, W\rangle$ — группа Фробениуса с дополнением X, ядро которой является 2-группой. Таким образом, для R, S и $T = O_2(W)$ выполняются условия леммы 12, и поэтому $R = T$. Это невозможно, поскольку R инвариантна относительно $N_G(X)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 14. *Пусть в G есть подгруппа H, изоморфная $L_2(7)$ и содержащая X. Тогда $G = H$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Если $\langle X, X^g\rangle$ является группой Фробениуса для каждого $g \in G \setminus H$, то, по леммам 1 и 3, $G = FH$, где F — некоторая периодическая нильпотентная нормальная подгруппа, следовательно, G локально конечна и равна H по лемме 9. Таким образом, найдется $g \in G \setminus H$ такой, что $W = \langle X, X^g\rangle$ не является группой Фробениуса. Так как $N_G(X) \leq H$, то $W \not\leq H$. По лемме 9 существует A_4-подгруппа $W_1 \leq W$ и, не нарушая общности, можно считать, что $W = W_1$.

По п. 1(а) леммы 6 найдется $y \in H$ такой, что $H = \langle x, y\rangle$ и $y^3 = (xy)^4 = (xy^{-1})^4 = 1$. По п. 2 леммы 7 $U = \langle R, x\rangle$ и $V = \langle S, x\rangle$ исчерпывают множество A_4-подгрупп группы H и, заменив, если требуется, y на y^{-1}, можно считать, что $U = \langle x, a\rangle, V = \langle x, b\rangle$, где $a = yxyx^{-1}yxy$, $b = x^{-1}y^{-1}xyxy^{-1}x^{-1}$. Кроме того, $t = x^{-1}yxyx^{-1}yxy^{-1}xy$ — единственная инволюция в G, удовлетворяющая равенствам $x^t = x^{-1}$, $y^t = y^{-1}$.

По леммам 11, 12 и 13, $\langle U, W\rangle \simeq \langle V, W\rangle \simeq L_2(7)$. Применение леммы 7 к $\langle U, W\rangle$ показывает, что найдется $z \in W$, для которого $z \neq x$ и $z^3 = (xz)^3 = (tz)^2 = 1$. Кроме того, $(az)^4 = (az^{-1})^4 = (a^xz^{-1})^3 = (a^xz)^7 = 1$ и, аналогично, $(bz)^4 = (bz^{-1})^4 = (b^xz^{-1})^3 = (b^xz)^7 = 1$. По п. 2(в) леммы 8 подгруппа $\langle H, W\rangle = \langle x, y, z\rangle$ конечна. По лемме 9, $\langle H, W\rangle = H$. Лемма доказана.

Предположим, что теорема не верна. На протяжении оставшейся части доказательства через G обозначается противоречащий пример.

ЛЕММА 15. *Группа G содержит подгруппу A, содержащую X и изоморфную A_5.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H = N_G(X)$. Тогда $H \neq G$. По лемме 1 найдется $g \notin H$ такой, что $R = \langle X, X^g\rangle$ не является группой Фробениуса. По леммам 10 и 14, R изоморфна A_5 или B и поэтому содержит искомую подгруппу.

Далее A — фиксированная подгруппа, содержащая X и изоморфная A_5.

ЛЕММА 16. *Подгруппа A содержится в некоторой подгруппе H, изоморфной B. Если $K, L \leq G, H \simeq K \simeq B$ и $A \leq H \cap K$, то* $[O_2(H), O_2(K)] = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 существует $g \notin A$ такой, что $R = \langle X, X^g \rangle$ не является группой Фробениуса. По леммам 10 и 14, R изоморфна A_5 или B. Поскольку R порождается подгруппами, изоморфными A_5 и содержащими X, можно считать, что $R \simeq A_5$. Пусть U, V — A_4-подгруппы, порождающие A, и W — A_4-подгруппа из R, не лежащая в A. Если $S = \langle U, W \rangle$ не является 2-группой, то S содержит $N_G(X)$, а тогда и $A = \langle U^{N_G(X)} \rangle$. Поскольку $S \neq A$, то $S \simeq B$. Таким образом, можно считать, что S и $\langle V, W \rangle$ — группы Фробениуса с дополнением X, ядра которых — группы периода 4. По п. 4 леммы 8, $T = \langle A, W \rangle$ конечна. По лемме 9, T содержит искомую подгруппу.

Пусть $A \leq H \cap K$ и $H \simeq K \simeq B$. Положим $R = O_2(H), S = O_2(K)$. Тогда R, S — элементарные абелевы группы. Докажем, что $L = \langle R^S \rangle$ абелева, т. е. $[a^c, b^d] = 1$ для всех $a, b \in R$, $c, d \in S$. Предположим вначале, что $a \neq 1$, $b \in \langle a, x \rangle$, $d = 1$. Тогда $U = \langle a, x \rangle$, $V = \langle c, x \rangle$ — это A_4-подгруппы. Поскольку $\langle U^{N_G(X)} \rangle$ — группа Фробениуса, $\langle U, V \rangle$ — группа Фробениуса с дополнением X по леммам 11 и 13. В частности, $[[a, c], b] = 1$, и поэтому $[a^c, b] = 1$. В общем случае, если $a = b$, то $[a^c, b^d] = [a^{cd^{-1}}, a]^d = 1$. Предположим, $b \neq a$. По п. 2 леммы 5 найдется элемент $y \in A$ порядка 3 такой, что $b = a^y$. Так как любой элемент порядка 3 из A сопряжен с x, то $y = zxz^{-1}$ для некоторого $z \in A$. Положим $a_1 = a^z$, $c_1 = (cd^{-1})^z$, $b_1 = a_1^x$. По доказанному выше $[a_1^{c_1}, b_1] = 1$ и, следовательно, $[a^c, b^d] = [a_1^{c_1}, b_1]^{z^{-1}d} = 1$. Итак, L — абелева 2-группа, значит, $M = LS$ является A-инвариантной конечной 2-группой. По лемме 11, M абелева. Лемма доказана.

ЛЕММА 17. *Група G совпадает с $\langle H \mid A \leq H \simeq B \rangle$ и удовлетворяет заключению теоремы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $M = \langle H \mid A \leq H \simeq B \rangle$. По лемме 16, $M = NA$, где N — элементарная абелева подгруппа, нормальная в M. Предположим, что $M \neq G$. Как и выше, существует такая A_4-подгруппа $U \leq G$, что $U \not\leq M$. Кроме того, $R = \langle A, U \rangle$ равна $O_2(R)A$ и поэтому содержится в M. Это противоречие завершает доказательство леммы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. Feit, J. G. Thompson*, Finite groups which contain a self-centralizing subgroup of order 3, Nagoya Math. J., 21 (1962), 185—197.
2. *С. И. Адян*, Периодические произведения групп, Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **142** (1976), 3—21.
3. *S. I. Adian*, Classifications of periodic words and their application in group theory, in: Burnside groups, Proc. Workshop Bielefeld (Lect. Notes Math., **806**), 1980, 1—40.
4. *С. И. Адян*, О простоте периодических произведений групп, Доклады АН СССР, **241**, N 4 (1978), 745—748.
5. *M. Schönert, et al.*, Groups, Algorithms and Programming, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen, 1993.
6. *В. П. Шунков*, Об одном признаке непростоты групп, Алгебра и логика, **14**, N 5 (1975), 491—522.
7. *А. Х. Журтов*, О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса, Сиб. матем. ж., **41**, N 2 (2000), 329—338.
8. *W. Burnside*, Theory of groups of finite order, 2nd ed. New York, Dover Publ., 1955.
9. *G. Higman*, Odd characterizations of finite simple groups (Lect. Notes), Michigan, Michigan University, 1968.

Поступило 6 ноября 2002 г.

Адрес автора:

МАЗУРОВ Виктор Данилович,
РОССИЯ,
630090, г. Новосибирск,
пр. Ак. Коптюга, 4,
Институт математики СО РАН.
e-mail: mazurov@math.nsc.ru