ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1997, том 354, № 4, с. 443–445

МАТЕМАТИКА

УДК 513

НЕИЗГИБАЕМОСТЬ КВАДРИЛЬЯЖА СФЕРЫ

© 1997 г. Н. П. Долбилин, М. А. Штанько, М. И. Штогрин

Представлено академиком С.П. Новиковым 25.05.95 г.

Поступило 06.05.95 г.

1. Вопрос о неизгибаемости многогранников в $\mathbf{R}^3$ восходит к Эйлеру, для выпуклых многогранников он был положительно решен О. Коши [1] в 1813 г. А.Д. Александров [2] усилил теорему Коши. Что касается многогранников вообще, а не только выпуклых, то почти каждое полиэдральное вложение или погружение сферы в трехмерное пространство является неизгибаемым [4, см. также 5]. В то же время Р. Брикар [6] построил первые примеры изгибаемых многогранников – три изгибаемых октаэдра. Однако октаэдры Брикара – это самопересекающиеся сферы, которые не являются ни вложенными, ни даже погруженными. Сенсацией стало построение Р. Коннелли [3] первого невыпуклого многогранника без самопересечений, изгибаемого в $\mathbf{R}^3$. В последовавших за этим работах внимание было сосредоточено в основном на получении новых экземпляров изгибаемых многогранников, а также на изучении их свойств. Между тем относительно многих классов многогранников интересно было бы знать, состоят ли они только из неизгибаемых многогранников, или среди их невыпуклых представителей встречаются и изгибаемые.

Изучение рассматриваемых здесь многогранников – квадрильяжей – было начато по инициативе С.П. Новикова [7] в работе авторов [8]. В [9] был поставлен вопрос о неизгибаемости вложенных квадрильяжей. Ниже дан ответ на этот вопрос для случая сферы.

Теорема 1. *Многогранная поверхность, гомеоморфная сфере, вложенная в* $\mathbf{R}^3$ *и составленная из плоских единичных квадратов* (*квадрильяж сферы*), *является неизгибаемой.*

2. Стандартный квадрильяж Q^2 двумерной поверхности – это абстрактный двумерный клеточный комплекс, склеенный из евклидовых единичных квадратов, гомеоморфный этой поверхности. Каждые два квадрата либо не пересекаются вовсе, либо имеют единственную общую вершину или единственное общее ребро. Каждое ребро есть общая сторона точно двух квадратов. В каждой вершине сходится не менее трех квадратов (или ребер, с которыми они чередуются в одной циклической последовательности). Будем называть два ребра из квадрильяжа Q^2 эквивалентными, если найдется связывающая их цепочка ребер из Q^2, в которой каждые два последующих ребра являются противоположными ребрами некоторого квадрата из Q^2. Множество ребер квадрильяжа разбивается на классы эквивалентности. Все квадраты, которым принадлежат ребра данного класса эквивалентности, составляют полоску. Это простое полезное понятие уже применялось нами в [8].

Непрерывное отображение $f\colon Q^2 \to \mathbf{R}^3$ называется квадрильяжным, если оно каждый квадрат из квадрильяжа Q^2 изометрически отображает на плоский квадрат, расположенный в $\mathbf{R}^3$. Если при этом образы всех квадратов из Q^2 являются квадратами двумерного остова некоторой стандартной кубической решетки в $\mathbf{R}^3$, то отображение f называется решеточным.

Теорема 1 может быть переформулирована так: *любое вложение квадрильяжа сферы* Q^2 *в* $\mathbf{R}^3$ *является неизгибаемым в классе всех квадрильяжных вложений.*

Заметим, что, согласно теореме Штейница [10], комбинаторная структура любого квадрильяжа сферы может быть реализована в $\mathbf{R}^3$ как структура некоторого выпуклого многогранника с четырехугольными гранями, которые не обязаны быть квадратами. Вложенные же в $\mathbf{R}^3$ квадрильяжи сферы – это, как правило, невыпуклые многогранники. Выпукло вложенные в $\mathbf{R}^3$ квадрильяжи сферы – это лишь прямоугольные параллелепипеды, грани которых состоят, вообще говоря, из нескольких единичных квадратов (это решеточные вложения). Таким образом, доказываемая здесь теорема устанавливает неизгибаемость довольно широкого класса многогранников, состоящего по преимуществу из невыпуклых многогранников.

Вложение $f\colon Q^2 \to \mathbf{R}^3$ называется изгибаемым, если существует непрерывное семейство квадрильяжных вложений $f_t\colon Q^2 \to \mathbf{R}^3$, $0 \le t \le 1$, таких, что $f_0 = f$, причем при изменении t изменяется

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, Москва

хоть один двугранный угол нашего квадрильяжа. В противном случае квадрильяжное вложение называется неизгибаемым.

3. Пусть вложенный в $\mathbf{R}^3$ квадрильяж Q^2 допускает непрерывное изгибание, которое впредь будем обозначать через φ. Назовем всякое ребро изменяющегося при изгибании φ двугранного угла отмеченным. Множество всех отмеченных ребер вложенного квадрильяжа Q^2 образуют граф Г. Ребра графа Г – это отмеченные ребра квадрильяжа, а вершины графа Г – это вершины отмеченных ребер и только они.

Г1. Если изгибание φ вложенного в $\mathbf{R}^3$ квадрильяжа Q^2 существует, то *множество ребер графа* Г *непусто*.

Г2. *Граф* Г *разбивает вложенный в* $\mathbf{R}^3$ *квадрильяж* Q^2 *на несколько неизгибаемых при* φ *компонент связности. Каждое отмеченное ребро является общим ребром двух квадратов, принадлежащих разным компонентам.*

Г3. *В каждой вершине графа сходится не менее двух его ребер.*

Это немедленно следует из Г2.

Г4. *Если в вершине сходятся только два отмеченных ребра вложенного в* $\mathbf{R}^3$ *квадрильяжа* Q^2, *то они лежат на одной прямой.*

Г5. *В вершине графа* Г *не могут сходиться ровно три его ребра.*

Покажем, что произвольные три ребра OA, OB и OC не могут быть одновременно отмеченными, если ни одно из всех остальных ребер вложенного в $\mathbf{R}^3$ квадрильяжа Q^2, примыкающих к его вершине O, не отмечено. В самом деле, звезда вершины St(O), состоящая из квадратов, сходящихся в вершине O, вложена в $\mathbf{R}^3$, причем каждый из трех секторов звезды AOB, BOC и COA при изгибании φ остается конгруэнтным самому себе. Поэтому длины отрезков AB, BC и CA при изгибании φ не изменяются.

В частном случае, когда два радиуса одного из упомянутых трех секторов, например AO и BO, лежат на одной прямой, оба они продолжают лежать на одной прямой при изгибании φ (в силу неизгибаемости при φ сектора AOB). И треугольник ABC является жестким. Поэтому ребро OC не может быть отмеченным при изгибании φ.

В общем случае, когда никакие два из трех указанных ребер не лежат на одной прямой, мы имеем дело с треугольной пирамидой OABC, не исключено, что вырожденной, которая из-за неизменности длин своих ребер остается конгруэнтной при изгибании φ. И так как все три сектора звезды неизгибаемы при φ, то двугранные углы квадрильяжа при всех ребрах AO, BO, CO сохраняются.

4. Перейдем теперь от графа отмеченных ребер к укрупненному графу, который будем называть графом изгибания φ и обозначать Γ_φ. Вершинами графа изгибания Γ_φ объявляются лишь те вершины графа Г, в которых сходится не менее четырех отмеченных ребер. Рассмотрим произвольное отмеченное ребро из графа Г и выделим те отмеченные ребра, которые можно соединить с ним реберным путем, проходящим через вершины графа Г степени 2. В силу ограниченности вложенного в $\mathbf{R}^3$ квадрильяжа Q^2 и свойства Г4 такие ребра образуют прямолинейный отрезок, который будем считать ребром нового графа Γ_φ.

Γ_φ1. *Все ребра графа* Γ_φ *суть прямолинейные отрезки, состоящие из отмеченных ребер вложенного квадрильяжа.*

Γ_φ2. *Два ребра графа* Γ_φ *не могут иметь два общих конца.*

Это вытекает из того, что квадрильяж Q^2 вложен в $\mathbf{R}^3$.

Γ_φ3. *В каждой вершине графа* Γ_φ *сходится не менее четырех его ребер.*

Γ_φ4. *Граф* Γ_φ *разбивает вложенный в* $\mathbf{R}^3$ *квадрильяж сферы* Q^2 *на области, хотя бы одна из которых ограничена реберным треугольником.*

В самом деле, обозначим число компонент графа Γ_φ через k, число вершин через v, число ребер через e, число областей, на которые сфера разбивается графом Γ_φ, через f. Заметим, что область может быть не односвязной, а ограничивающий ее реберный контур, состоящий из прямолинейных отрезков, может быть не связным.

Имеет место формула Эйлера

$$v - e + f = k + 1.$$

Распишем левую часть формулы Эйлера в соответствии с тем вкладом, который вносит в нее каждая область в отдельности. Так, область F вносит в слагаемое f вклад 1, в слагаемое e – вклад $\frac{n}{2}$, где n – число ребер границы области F. Со вкладом в слагаемое v дело обстоит чуть сложнее. К вершине $A_i \in \Gamma_\varphi$ степени q_i область F может подходить несколько раз, т.е. замкнутый реберный контур, ограничивающий область F, проходит через A_i несколько раз, скажем a_i раз. Тогда вклад области в слагаемое v левой части формулы Эйлера равен $\sum \frac{a_i}{q_i}$, где сумма берется по всем $A_i \in \Gamma_\varphi$, причем мы полагаем $a_i = 0$, если вершина A_i не принадлежит границе области F.

Итак, вклад области F в левую часть формулы Эйлера равен

$$\sum_i \frac{a_i}{q_i} - \frac{n}{2} + 1.$$

Заметим, что $\sum_i a_i = n$, где сумма берется по всем вершинам границы области F. По свойству $\Gamma_\varphi 3$ все $q_i \geq 4$. Поэтому

$$\sum_i \frac{a_i}{q_i} - \frac{n}{2} + 1 \leq \frac{4-n}{4}.$$

Таким образом, каждая область, имеющая не менее четырех сторон, дает неположительный вклад. В то же время правая часть формулы Эйлера не меньше двух. Для справедливости формулы Эйлера необходимо существование в графе Γ_φ хотя бы одного реберного треугольника (петель и двуугольников у него нет).

Из приведенного доказательства фактически следует, что в графе Γ_φ содержится не менее восьми треугольников. Этим свойством обладает каждая связная компонента графа Γ_φ.

5. Теорема 1 доказывается от противного. Пусть вложенный квадрильяж сферы Q^2 изгибаем в $\mathbf{R}^3$. Тогда изгибанию φ соответствует граф изгибания Γ_φ, в котором имеется хотя бы один реберный треугольник. Обозначим его Δ. Возьмем отмеченное ребро a квадрильяжа Q^2, лежащее на стороне треугольника Δ. Рассмотрим полоску на квадрильяже Q^2, порожденную ребром a. Заметим, что хоть одна сторона треугольника Δ состоит не менее чем из двух ребер квадрильяжа, так как каждый замкнутый реберный цикл квадрильяжа Q^2 имеет четное число звеньев [8]. Если взять два разных ребра, лежащих на одной и той же стороне треугольника Δ, то соответствующие им полоски не только различны, они даже не пересекаются: они лежат в $\mathbf{R}^3$ по разные стороны от плоскости, проведенной перпендикулярно этой стороне и отделяющей взятые ребра друг от друга. Полоски, соответствующие отмеченным ребрам вложенного квадрильяжа, лежащим на разных сторонах треугольника Δ, также обязаны быть разными, потому что в данном случае отмеченные ребра не параллельны друг другу. Таким образом, полоска, соответствующая ребру a треугольника Δ, может пересекать этот треугольник только один раз. Следовательно, полоска не может покинуть соответствующую треугольную область на вложенном квадрильяже Q^2.

К тому же оба квадрата, смежные по ребру a, принадлежат одной полоске, соответствующей данному ребру a, но лежат в разных неизгибаемых компонентах. Так как квадрильяж Q^2 вложен в $\mathbf{R}^3$, то любая его замкнутая полоска представляет собой цилиндр. Поэтому полоска, соответствующая ребру a, обязана пересекать треугольник Δ по меньшей мере еще один раз. Противоречие доказывает теорему.

Замечание 1. Теорема 1 справедлива не только в случае вложения, но и в случае погружения.

Замечание 2. В формулировке теоремы квадраты можно заменить на параллелограммы.

Замечание 3. Вложение сферы в трехмерное пространство, заданное в виде многогранной поверхности, все грани которой суть плоские параллелограммы, является проекцией изоморфного квадрильяжа сферы, вложенного в двумерный остов стандартной кубической решетки достаточно высокой размерности.

Гипотеза. *Квадрильяжное вложение сферы Q^2 в $\mathbf{R}^3$ является решеточным.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 93–011–168), Международного научного фонда и DFG (Рурский университет Бохум, университет Билефельд).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cauchy A.* // J. Ecole Polytechnique. 1813. V. 9. P. 87–98.
2. *Александров А.Д.* Выпуклые многогранники. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 428 с.
3. *Connelly R.* // Publ. Math. I.H.E.S. 1978. V. 47. P. 333–338.
4. *Gluck H.* // Lect. Notes Math. 1975. № 438. P. 225–239.
5. *Позняк Э.Г.* // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1960. № 3. С. 14–19.
6. *Bricard R.* // J. Math. Pure and Appl. Ser. 5. 1897. № 3. P. 13–148.
7. *Новиков С.П.* Топология 1. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 12. С. 5–252.
8. *Долбилин Н.П., Штанько М.А., Штогрин М.И.* // ДАН. 1986. Т. 291. № 2. С. 277–279.
9. *Долбилин Н.П., Штанько М.А., Штогрин М.И.* // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58. № 2. С. 93–107.
10. *Steinitz E., Rademacher H.* Vorlesungen über die Theorie der Polyeder. B.: Springer, 1934. 351 S.