



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

L. V. Rozovsky, More about convergence rate in the weak law of large numbers, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1992, Volume 194, 138–140

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.174

January 14, 2025, 15:49:49



ЕЩЕ РАЗ О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ
В СЛАБОМ ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Рассмотрим последовательность серий $\{X_{nk}, k \geq 1; n=1, 2, \dots\}$ независимых в каждой серии случайных величин и положим $\bar{S}_n = \sum_{k \geq 1} \bar{X}_{nk}$

где $\bar{X}_{nk} = X_{nk} - a_{nk}$, а $a_{nk} = E|X_{nk}|I[|X_{nk}| \leq 1]$. Пусть, кроме того $h_0(z) = z^2/(1+z^2)$ и $\Gamma_n = \sum_{k \geq 1} E h_0(\bar{X}_{nk})$. В [1] было показано, что если

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq 1} |a_{nk}| \leq \alpha < 1 \quad (1)$$

и

$$\Gamma_n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (2)$$

то

$$E h_0(\bar{S}_n) = (1 + o(1)) \Gamma_n, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

В настоящей заметке приводится обобщение этого результата.

ТЕОРЕМА 1. Пусть характеристическая функция $f(t)$ удовлетворяет условиям $\limsup_{|t| \rightarrow \infty} |f(t)| < 1$ и $f''(0) < \infty$ (первое условие обычно называется условием (C) Крамера, второе - равносильно ограниченности второго момента у соответствующей функции $f(t)$ случайной величины).

Если выполнены условия (1) и (2), то

$$|E(1 - f(\bar{S}_n))| = (1 + o(1)) \sum_{k \geq 1} E(1 - f(\bar{X}_{nk})), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Соотношение (3) вытекает из (4) при $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\delta \in [0, 1]$. Положим $h_\delta(z) = (z^2/(1+z^2))^{1+\delta}$. Если выполнены условия (1), (2) и

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq 1} E h_\delta(\bar{X}_{nk}) / \Gamma_n > 0, \quad (5)$$

то

$$E h_\delta(\bar{S}_n) = (1 + o(1)) \sum_{k \geq 1} E h_\delta(\bar{X}_{nk}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Оценка (3) является следствием теоремы 2 при $\delta = 0$. Отметим, что условие (5) при $\delta > 0$ выполняется, если $\bar{X}_{nk} = \frac{1}{B_n} X_k$, где (X_k) - последовательность симметричных одинаково распределенных случайных величин, принадлежащих области притяжения некоторого устойчивого закона.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $\delta > 0$ условие (5) в теореме 2 можно заметить более слабым условием

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} L_{n, 1+\delta} = \infty, \quad (7)$$

где $L_{n, 1+\delta} = \sum_{k \geq 1} E h_{\delta}(\bar{X}_{nk}) / \Gamma_n^{1+\delta}$. При этом условии (7) близко к необходимому. Во всяком случае, из (6) вытекает, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} L_{n, 1+\delta} \geq 1.$$

Доказательства сформулированных результатов существенным образом используют работу [1].

ЛЕММА. Пусть $a_n = \max_k |a_{nk}|$,

$$c(t) = (2 + 2a_n + a_n^2) \left(\frac{1}{2} t^2 + \frac{2 + |t| a_n}{(1 - a_n)} \right),$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dg(x),$$

где $g(z)$ - некоторая функция ограниченной вариации. Тогда

$$\begin{aligned} & |E(h(0) - h(\bar{S}_n)) - \sum_{k \geq 1} E(h(0) - h(\bar{X}_{nk}))| \leq \\ & \leq \frac{5e}{2} \left(\int_{c(t)\Gamma_n \leq \frac{1}{2}} (c(t)\Gamma_n)^2 |dg(t)| + \int_{c(t)\Gamma_n > \frac{1}{2}} c(t)\Gamma_n |dg(t)| \right). \quad (8) \end{aligned}$$

Лемма доказывается с помощью равенства Парсеваля и [1, лемма I и (I7)].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Пусть выполняются условия теоремы I и $g(x)$ - функция распределения, которая соответствует характеристической функции $f(t)$. Тогда (см. [2], гл. I, т. 3 и ниже) при всех t и некотором $\varepsilon > 0$ $1 - \operatorname{Re} f(t) \geq \varepsilon h_0(t)$ и, следовательно, $|\sum_{k \geq 1} E(1 - f(\bar{X}_{nk}))| \geq \sum_{k \geq 1} E(1 - \operatorname{Re} f(\bar{X}_{nk})) \geq \varepsilon \Gamma_n$.

Учитывая то, что $f''(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dg(x) < \infty$, отсюда и из (8) (при $h = f$) легко получим соотношение (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 И ЗАМЕЧАНИЯ. Равенство (6) при $\delta = 0$ совпадает с (3), поэтому в дальнейшем предполагается, что $\delta > 0$.

$$\text{Пусть } h(t) - h_{1+\delta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x) dx. \text{ Очевидно,}$$

$$-x^2 p(x) = \frac{1}{2\delta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} h''(t) dt = \frac{1}{\delta} \int_0^{\infty} \cos tx h''(t) dt.$$

При помощи стандартного асимптотического анализа последнего интеграла (интегрирование по частям, разбиение полуоси на интервалы $[0, \varepsilon]$ и (ε, ∞) и т.п.), покажем, что

$$x^2 p(x) = (c_\delta + o(1)) x^{-1-\delta}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Воспользовавшись соотношениями (9) и (8) при $dg(x) = p(x) dx$, получим

$$E h_\delta(\bar{S}_n) = \sum_{k \geq 1} E h_\delta(\bar{X}_{nk}) + O \Gamma_n^{1+\delta}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из условия (7) следует равенство (6). Если же имеет место (6) (и (1), (2)), то (см. также (3))

$$(1+o(1))L_{n,1+\delta} = E h_\delta(\bar{S}_n) / \Gamma_n^{1+\delta} =$$

$$= (1+o(1)) E h_\delta(\bar{S}_n) / (E h_0(\bar{S}_n))^{1+\delta}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Остается при $Y = h_0(\bar{S}_n)$ воспользоваться моментным неравенством $EY \leq (EY^{1+\delta})^{\frac{1}{1+\delta}}$.

Литература

1. Розовский Л.В. Скорость сходимости в слабом законе больших чисел. - Теория вероятн. и ее примен., 1989, т.34, №2, с.392-395.
2. Петров В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М., 1987.