М. Л. Сироткина, О триангуляции трехмерных гиперболических многообразий,
Алгебра и анализ, 2002, том 14, выпуск 6, 192–204

https://www.mathnet.ru/aa913

Алгебра и анализ
Том 14 (2002), вып. 6

О ТРИАНГУЛЯЦИИ ТРЕХМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

© М. Л. Сироткина

Известно, что всякое трехмерное некомпактное гиперболическое многообразие M конечного объема склеивается из идеальных выпуклых многогранников. В работе доказано, что если каждый из многогранников разбиения имеет $\leqslant 6$ граней, то M триангулируемо на идеальные тетраэдры.

Введение

Идеальным многогранником в трехмерном пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^3$ называется многогранник, все вершины которого лежат на абсолюте. (Строго говоря, идеальный многогранник не является многогранником в общепринятом смысле, так как не содержит своих вершин.) *Гиперболическим многообразием* называется полное риманово многообразие постоянной кривизны -1. Пусть M — трехмерное некомпактное гиперболическое многообразие конечного объема. Будем говорить, что *M склеено из многогранников*, если M является объединением многогранников с попарно-непересекающимися внутренностями, грани которых попарно отождествляются (при этом допускается отождествление друг с другом граней одного и того же многогранника).

Терстон [2] показал, что дополнение узла „восьмерка" гомеоморфно гиперболическому многообразию, склеенному из двух идеальных гиперболических тетраэдров.

На сегодня неизвестно, всякое ли некомпактное трехмерное гиперболическое многообразие M триангулируемо на идеальные тетраэдры, однако Эпштейн и Пеннер [1] доказали, что M всегда склеивается из идеальных выпуклых многогранников. Таким образом, возникает следующий вопрос.

Вопрос. *Пусть трехмерное гиперболическое многообразие M склеено из (конечного числа) идеальных выпуклых многогранников. Верно ли, что у каждого из многогранников существует такая триангуляция на идеальные тетраэдры, что триангуляции склеиваемых граней совпадают?*

Если ответ утвердительный, то, очевидно, многообразие M триангулируемо на идеальные тетраэдры.

Вада, Ямасита и Иосида доказали следующий частный случай.

Предложение [3]. *Если некомпактное трехмерное гиперболическое многообразие конечного объема допускает разбиение на идеальные выпуклые многогранники* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *так, что все грани многогранников* $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ *приклеиваются к граням многогранника* P_n, *то каждый многогранник можно триангулировать на идеальные тетраэдры так, что триангуляции склеиваемых граней совпадут* [3].

В настоящей работе доказано, что если каждый многогранник разбиения имеет $\leqslant 6$ граней, то все многогранники можно триангулировать на идеальные тетраэдры так, что триангуляции склеиваемых граней совпадут. Таким образом, в этом случае многообразие M триангулируемо на идеальные тетраэдры.

Теорема 1. *Пусть трехмерное гиперболическое многообразие* M *склеено из идеальных выпуклых многогранников, каждый из которых имеет* $\leqslant 6$ *граней. Тогда* M *триангулируемо на идеальные тетраэдры.*

Идея доказательства. Триангулируем все грани многогранников разбиения так, чтобы триангуляция на склеиваемых гранях совпадала. Если у каждого многогранника существует триангуляция, индуцирующая данную триангуляцию граней, теорема 1 доказана. Будет доказано, что всегда можно изменить триангуляцию на нескольких парах склеенных граней так, чтобы все многогранники имели триангуляцию, индуцирующую данную триангуляцию на гранях.

§1. Триангуляции и разбиения

Пусть P — выпуклый многогранник, а τ — триангуляция его границы диагоналями. Назовем триангуляцию τ *правильной*, если (в любой метрике на P) существует диагональная триангуляция T многогранника P (т.е. триангуляция без внутренних вершин), индуцирующая на его гранях триангуляцию τ, т.е. $\partial T = \tau$. В противном случае триангуляция τ называется *неправильной*.

(Очевидно, триангуляция идеального многогранника является триангуляцией на идеальные тетраэдры тогда и только тогда, когда она диагональная.)

Пусть v — вершина многогранника P, а все его грани, не содержащие v, триангулированы произвольным образом. Разбиение многогранника P на пирамиды с вершиной v над треугольниками триангуляции граней является, очевидно, диагональной триангуляцией многогранника P. Такую триангуляцию будем называть *конической*.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

1.0. Утверждение. *Триангуляция граней многогранника P, при которой все грани, содержащие некоторую вершину v, триангулированы диагоналями из вершины v, является правильной. В частности, если у P есть вершина, в которой сходятся только треугольные грани, то любая триангуляция граней многогранника P является правильной.*

Очевидно, существование конической триангуляции у выпуклого многогранника зависит лишь от его комбинаторной структуры, но не от метрики. Ниже мы рассматриваем только комбинаторную структуру многогранника. Так, например, под словом „куб" понимается выпуклый многогранник, комбинаторная структура которого совпадает с комбинаторной структурой куба.

1.1. Предложение. *Пусть трехмерное гиперболическое многообразие M склеено из конечного числа идеальных выпуклых многогранников $P_1, \ldots, P_n$, причем для каждого i выполняются следующие условия:*

(1) *При любой неправильной триангуляции многогранника P_i найдется такая четырехугольная грань, что, если изменить триангуляцию на ней, триангуляция граней станет правильной. Причем если затем изменить триангуляцию на любой другой четырехугольной грани, триангуляция граней останется правильной.*

(2) *Четырехугольные грани многогранника P_i можно разбить на пары, так что при правильной триангуляции граней для любой четырехугольной грани выполняется хотя бы одно из следующих утверждений:*

   (1) *если изменить триангуляцию на данной грани, триангуляция останется правильной;*

   (2) *если изменить триангуляцию на данной грани и на парной к ней, триангуляция останется правильной.*

Тогда многообразие M триангулируемо на идеальные тетраэдры.

Доказательство. Триангулируем все грани многогранников разбиения так, чтобы триангуляции на склеиваемых гранях совпадали, и воспользуемся индукцией по количеству многогранников с неправильной триангуляцией граней.

База. Если у каждого многогранника триангуляция правильная, предложение доказано.

Переход. Пусть многогранник P имеет неправильную триангуляцию граней. Рассмотрим такую последовательность многогранников и их граней: P_0 — многогранник P, B_0 — его грань, удовлетворяющая условию (1), P_1 — многогранник, приклеенный своей гранью A_1 к грани B_0, B_1 — грань многогранника P_1, парная к грани A_1 и т.д., P_n — многогранник, приклееный своей гранью A_n к грани B_{n-1}, B_n — грань многогранника P_n, парная к грани A_n. Будем последовательно менять триангуляцию граней A_i, B_i, начиная с грани B_0, пока очередной многогранник P_n после смены триангуляции грани A_n не приобретет правильную триангуляцию. Этот процесс конечен, так как многогранников конечное число, и, по условию (1), если многогранник P_n совпадает с многогранником P, то после смены триангуляции A_n триангуляция граней будет правильной. По условию (1) триангуляция граней многогранника P стала правильной. По условию (2) многогранники P_n, имевшие правильную триангуляцию граней, по-прежнему имеют правильную триангуляцию граней. Таким образом, количество многогранников с неправильной триангуляцией граней уменьшилось.

Предложение 1.1 доказано. •

§2. Неправильные триангуляции малогранников

Скажем, что многогранник относится к *типу* (α, β, γ), если он имеет α пятиугольных, β четырехугольных и γ треугольных граней.

Существуют следующие многогранники, имеющие $\leqslant 6$ граней:
четырехгранники:

(a) многогранник типа (0,0,4) — тетраэдр;
пятигранники:

(b) многогранник типа (0,1,4) — четырехугольная пирамида;

(c) многогранник типа (0,3,2) — (треугольная) призма;
шестигранники (см. рис. 1):

(d) многогранник типа (0,0,6) — бипирамида, см. рис. 1(7);

(e) многогранник типа (0,2,4) — см. рис. 1(6);

(f) многогранник типа (0,4,2) — см. рис. 1(5);

(g) многогранник типа (0,6,0) — куб;

(h) многогранник типа (1,0,5) — пятиугольная пирамида;

(i) многогранник типа (1,2,3) — см. рис. 1(2);

(j) многогранник типа (2,2,2) — см. рис. 1(1);

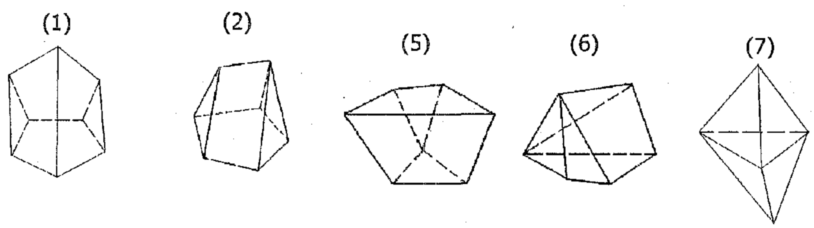

Рис. 1. Шестигранники.

Многогранники, не имеющие общепринятых названий, будем обозначать буквами, под которыми они перечислены выше, или типами.

2.1. Утверждение. *Триангуляция граней многогранников* (a), (b), (d), (e), (h) *всегда правильная. Более точно, всякая триангуляция границы многогранника каждого из указанных типов продолжается до конической триангуляции всего многогранника.*

Доказательство. Простая непосредственная проверка. •

Рассмотрим различные случаи триангуляции граней многогранников других типов.

Ниже под словом „триангуляция" будет иметься в виду диагональная триангуляция.

К многограннику (j) (тип (2,2,2)) мы обратимся в §4.

2.2. Утверждение (i). *С точностью до комбинаторной эквивалентности у многогранника* (i) (*типа* (1,2,3)) *существуют только две триангуляции граней, при которых невозможна его коническая триангуляция* (*см. рис.* 2). *Обе они являются неправильными.*

Рис. 2. Нетриангулируемые многогранники (2).

Доказательство. Если четырехугольные грани многогранника триангулированы из общей вершины, то возможна коническая триангуляция многогранника из этой вершины. Если пятиугольная и четырехугольная грани триангулированы из общей вершины, то возможна коническая триангуляция из этой вершины. Если пятиугольная грань триангулирована из вершины, общей с двумя треугольными гранями, то возможна коническая триангуляция из этой вершины. Оставшиеся две возможности показаны на рис. 2.

2.3. Утверждение (g). *Существуют* 3 *триангуляции граней куба, при которых коническая триангуляция невозможна*:

1) *Диагонали граней куба образуют два треугольника* (*см. рис.* 3, a). *В этом случае куб разбивается на два* (*идеальных, если куб идеален*) *тетраэдра и многогранник с восемью треугольными гранями, который триангулируем конической триангуляцией из любой вершины. То есть эта триангуляция граней правильная.*

2) *Диагонали граней куба образуют две трехзвенные ломаные* (*см. рис.* 3, б).
3) *Четыре диагонали граней образуют замкнутую ломаную* (*см. рис.* 3, в). *Эти две триангуляции неправильные.*

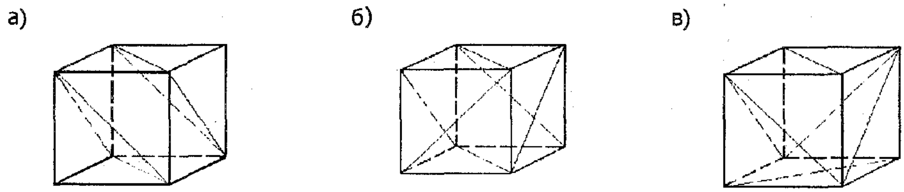

Рис. 3. Кубы, нетриангулируемые конической триангуляцией.

2.4. Утверждение (f). *У многогранника типа* $(0,4,2)$ *существует единственная неправильная триангуляция граней: две четырехугольные грани, имеющие общую вершину, триангулированы по-разному* (*одна — из общей вершины, другая — нет*), *а другие две четырехугольные грани триангулированы из одной вершины* (*см. рис.* 4).

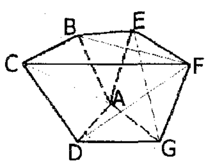

Рис. 4.

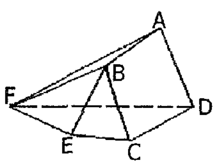

Рис. 5.

2.5. Утверждение (c). *Треугольная призма триангулируема конической триангуляцией, если диагонали четырехугольных граней образуют трехзвенную ломаную* (*см. рис.* 6). *Другая триангуляция граней* (*см. рис.* 7) *является неправильной.*

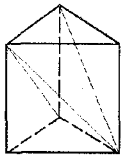

Рис. 6.

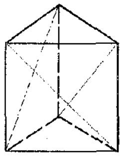

Рис. 7.

Многогранники, у которых бывают неправильные триангуляции граней (т.е. многогранники (c), (f), (g), (i)) будем называть *сложными*.

§3. Триангуляция четырехугольных граней

Разобьем четырехугольные грани многогранников (f) и (g) (тип (0,4,2) и куб) на пары следующим образом: у куба парными будем считать противоположные грани, у многогранника типа (0,4,2) одна пара — две грани, пересекающиеся по вершине A (см. рис. 4), другая — две оставшиеся грани. Четырехугольные грани многогранника (i) (тип (1,2,3)) также будем считать парными.

3.1. Лемма. *Всякая триангуляция сложных многогранников* (c), (f) *и* (i) *удовлетворяет условию* (1) *из предложения* 1.1. *Единственный контрпример в случае* (g) (*куб, тип* (0,6,0)) *показан на рис.* 3, б.

Доказательство.

(i) *Многогранник типа* $(1,2,3)$: Пятиугольная грань многогранника триангулирована из вершины, общей с треугольной и четырехугольной гранями. Для данной четырехугольной грани выполнено условие (1).

(g) *Куб* (см. рис. 3, в): условие (1) верно для грани, диагональ которой не является звеном четырехзвенной ломаной.

(f) *Многогранник типа* $(0,4,2)$: Условие (1) верно для грани $ABCD$ (см. рис. 4). Действительно, если изменить триангуляцию этой грани, то станет возможна коническая триангуляция многогранника из вершин B или D. После смены триангуляции еще одной грани сохранится возможность конической триангуляции из одной из этих вершин.

(c) *Призма:* Утверждение верно для любой четырехугольной грани.

Лемма 3.1 доказана. •

3.2. Лемма. *Сложные многогранники* (f), (g) *и* (i) *удовлетворяют условию* (2) *из предложения* 1.1.

Доказательство.

(i) *Многогранник типа* $(1,2,3)$. Если четырехугольные грани триангулированы из одной вершины, возможна коническая триангуляция из этой вершины. Таким образом, если четырехугольные грани триангулированы из одной вершины, верно утверждение (2), а если четырехугольные грани триангулированы из разных вершин, верно утверждение (1).

(g) *Куб.* Кубы, для которых возможна коническая триангуляция (см. рис. 8):

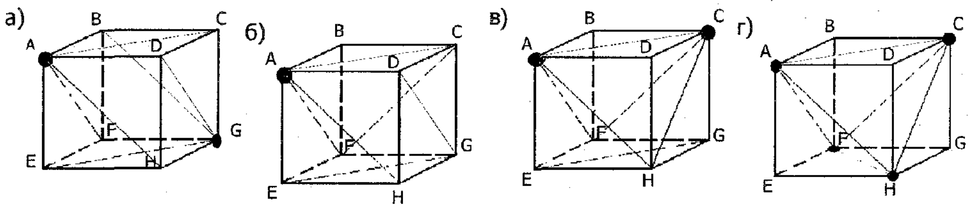

Рис. 8. Кубы, триангулируемые конической триангуляцией. Кружками отмечены вершины, из которых возможна коническая триангуляция.

Рис. 8, а: Для любой грани выполняется утверждение (1). Действительно, возможна коническая триангуляция куба из противоположных вершин A и G. После смены триангуляции любой грани остается возможность конической триангуляции одной из этих вершин.

Рис. 8, б: Очевидно, для граней, не содержащих вершину A, выполняется утверждение (1), так как при смене их триангуляции сохраняется возможность конической триангуляции из вершины A. Для грани $ABFE$ верно утверждение (2), так как после смены триангуляции на ней и противоположной к ней грани возможна коническая триангуляция куба из вершины C. Для грани $ABCD$ верно утверждение (2), так как после смены триангуляции на ней и противоположной к ней грани возможна коническая триангуляция куба из вершины F. Для грани $ADHE$ верно утверждение (1), так как после смены триангуляции на этой грани диагонали граней образуют два треугольника, такая триангуляция граней является правильной (см. рис. 3, а).

Рис. 8, в: Для грани $ABCD$ верно утверждение (2), так как после смены триангуляции на ней и на противоположной грани возможна коническая триангуляция из вершин F или H. Для остальных граней верно утверждение (1), так как после смены триангуляции на них сохраняется возможность конической триангуляции из вершин A или C.

Рис. 8, г: Для любой грани верно утверждение (1), так как после смены триангуляции на одной грани куб превращается в куб рис. 8, в.

Куб, для которого невозможна коническая триангуляция (см. рис. 3, а): Для любой грани верно утверждение (1). Действительно, после смены триангуляции на любой грани куб превратится в куб рис. 8, б.

(f) *Многогранник типа* (0,4,2). Существует единственная неправильная триангуляция граней многогранника, причем после смены триангуляции любой грани триангуляция граней становится правильной. Следовательно, если после смены триангуляции грани триангуляция перестала быть правильной, то после смены триангуляции еще одной грани она снова станет правильной.

Лемма 3.2 доказана. •

3.3. Лемма. *Если призма с триангуляцией на гранях триангулируема, то для каждой ее четырехугольной грани* П *верно хотя бы одно из следующих двух утверждений:*

1) *если изменить триангуляцию на грани* П, *то призма останется триангулируемой;*

2) *если изменить триангуляцию на грани* П *и на любой другой четырехугольной грани, то призма останется триангулируемой.*

Кроме того, если изменить триангуляцию на всех четырехугольных гранях призмы, призма останется триангулируемой.

Доказательство. Призма триангулируема, если диагонали ее четырехугольных граней образуют трехзвенную ломаную (см. утверждение 2.5). Для грани, содержащей среднее звено этой ломаной, верно утверждение (2), для других двух граней верно утверждение (1). Последнее утверждение леммы очевидно. •

Будем называть вершины A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 многогранника (j) (см. рис. 10) *одноименными*.

3.4. Лемма. *Если пятиугольные грани многогранника* (j) *триангулированы из общей вершины или из одноименных вершин, то триангуляция граней многогранника — правильная независимо от триангуляции четырехугольных граней.*

Доказательство. Если пятиугольные грани триангулированы из общей вершины D или E (см. рис. 10, а), то существует коническая триангуляция из этой вершины.

Если пятиугольные грани триангулированы из вершин A_1 и A_2 (см. рис. 10, б), то существует коническая триангуляция из одной из этих вершин. Аналогично, если пятиугольные грани триангулированы из вершин C_1 и C_2.

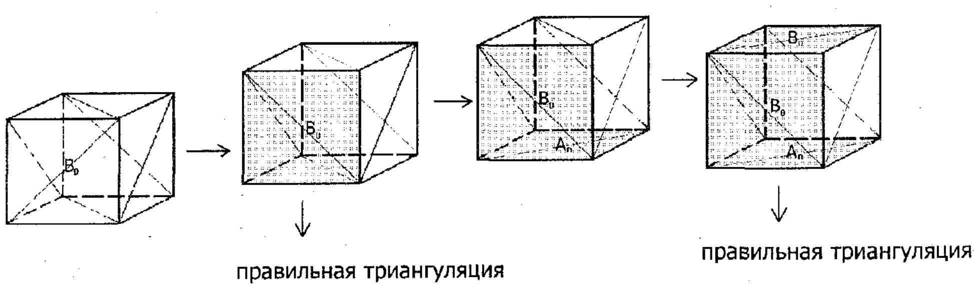

Рис. 9.

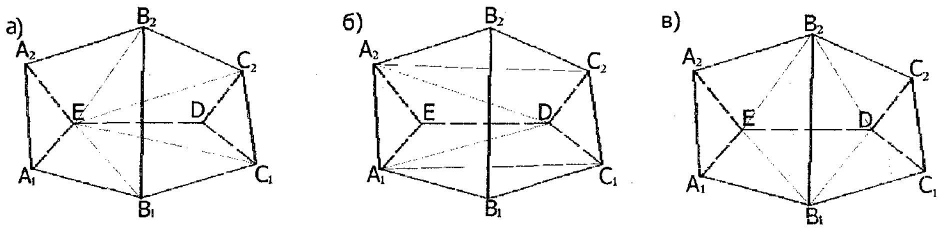

Рис. 10.

Если пятиугольные грани триангулированы из вершин B_1 и B_2 (см. рис. 10, в), то многогранник разбивается плоскостями B_1B_2D и B_1B_2E на две четырехугольные пирамиды, которые триангулируемы независимо от триангуляции четырехугольных граней, и тетраэдр (все три многогранника идеальны, если многогранник (j) идеален). Лемма 3.4 доказана. •

3.5. Лемма. *Пусть четырехугольные грани многогранника* (j) *уже триангулированы. Можно триангулировать любую его пятиугольную грань так, что триангуляция будет правильной независимо от триангуляции другой пятиугольной грани.*

Доказательство. Если обе четырехугольные грани триангулированы из вершины B_1 (см. рис. 11, а), триангулируем пятиугольную грань $A_1B_1C_1DE$ из этой же вершины. Тогда возможна коническая триангуляция многогранника из вершины B_1. Пусть хотя бы одна четырехугольная грань триангулирована не из вершины B_1. Не умаляя общности, грань $A_1B_1B_2A_2$ триангулирована диагональю A_1B_2 (см. рис. 11, б). Триангулируем грань $A_1B_1C_1DE$ из вершины A_1. Тогда возможна коническая триангуляция многогранника из этой вершины. Лемма 3.5 доказана. •

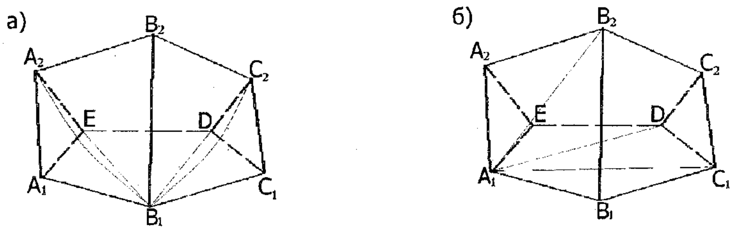

Рис. 11.

§4. Доказательство теоремы

4.1. Из предложения 1.1 следует, что если многообразие M склеено из идеальных многогранников (b) и (d)–(i), и грани многогранников можно триангулировать так, что ни один куб не будет иметь триангуляцию граней рис. 3, б, то M триангулируемо на идеальные тетраэдры.

4.2. Предложение. *Пусть трехмерное гиперболическое многообразие M склеено из конечного числа идеальных выпуклых многогранников* (b) *и* (d)–(i). *Тогда M триангулируемо на идеальные тетраэдры.*

Доказательство. Триангулируем все грани многогранников разбиения так, чтобы триангуляция на склеиваемых гранях совпадала. Индукция по количеству многогранников с неправильной триангуляцией граней.

База: Если у каждого многогранника триангуляция правильная, предложение доказано.

Переход: Пусть многогранник P имеет неправильную триангуляцию граней. Для всех многогранников (b) и (d)–(i), кроме куба (см. рис. 3, б), выполняются условия предложения 1.1. Если многогранник P — не куб с триангуляцией граней рис. 3, б, последовательно меняем триангуляцию граней, как в доказательстве предложения 1.1.

Пусть P — куб с триангуляцией граней рис. 3, б. Меняем триангуляцию граней, как при доказательстве предложения 1.1, начиная с любой грани P, диагональ которой является крайним звеном трехзвенной ломаной. Так как для всех многогранников выполняется условие (2) предложения 1.1, правильность триангуляции граней многогранников сохранится. Проверим, что этот процесс конечен. Пусть P_n совпадает с P, A_n — следующая поменявшая триангуляцию грань P (см. рис. 9). Если ее диагональ не является средним звеном второй трехзвенной ломаной, то после смены ее триангуляции триангуляция станет правильной. Иначе после смены триангуляции на ней мы снова получим триангуляцию граней рис. 3, б. Сменим триангуляцию на противоположной к A_n грани (ее диагональ является теперь крайним звеном трехзвенной ломаной, а диагональ B_0 — средним звеном другой ломаной). Пусть A_m — следующая поменявшая триангуляцию грань P ($m > n$). Очевидно, A_m не может совпасть с B_0, т. е. диагональ A_m не является средним звеном другой ломаной, и, следовательно, триангуляция стала правильной. Таким образом, процесс смены триангуляции закончился не позже, чем поменялась триангуляция парной к B_0 грани многогранника P.

Предложение 4.2 доказано. •

4.3. Предложение. *Пусть трехмерное гиперболическое многообразие M склеено из конечного числа идеальных выпуклых многогранников* (a)–(i). *Тогда мно-*

гообразие триангулируемо на идеальные тетраэдры.

Доказательство. Триангулируем все грани многогранников разбиения так, чтобы триангуляция на склеиваемых гранях совпадала. Индукция по количеству многогранников с неправильной триангуляцией граней.

База: Если у каждого многогранника триангуляция правильная, предложение доказано.

Переход: Пусть многогранник P имеет неправильную триангуляцию граней. Меняем триангуляцию четырехугольных граней, как в доказательстве предложения 1.1 (B_n — грань многогранника P_n, парная к A_n, если P_n — один из многогранников (b) и (d)–(i), произвольная четырехугольная грань P_n, если P_n — призма). По леммам 3.2 и 3.3 правильность триангуляции граней многогранников P_n сохранится.

Проверим, что этот процесс конечен. Если среди многогранников P_n нет призм, очевидно, процесс закончится не позже, чем каждая четырехугольная грань поменяет триангуляцию по одному разу. Это верно и в общем случае.

Действительно, пусть у многогранника P_k поменялась триангуляция граней A_k, B_k. P_l — тот же многогранник ($l > k$). Очевидно, найдется P_n — треугольная призма, у которой поменяли триангуляцию на двух гранях A_n, B_n. P_m — та же призма ($k < n < m < l$), A_m — ее третья грань, B_m совпадает с A_n либо с B_n. Но если после смены триангуляции грани A_n триангуляция стала неправильной, значит, вначале триангуляция была правильной. Значит, по лемме 3.3, после смены триангуляции A_m триангуляция осталась правильной, и процесс закончился. Противоречие.

Предложение 4.3 доказано. •

4.4. Предложение. *Если трехмерное гиперболическое многообразие допускает разбиение на конечное число идеальных выпуклых многогранников* (a)–(j), *то их грани можно триангулировать так, что все многогранники будут триангулируемы.*

Доказательство. Все многогранники (j) из разбиения входят в последовательности двух типов:

1) Q_0 — многогранник с одной пятиугольной гранью. К его пятиугольной грани приклеен гранью A_1 многогранник Q_1 типа (j). К другой пятиугольной грани, B_1, многогранника Q_1 приклеен многогранник Q_2 типа (j) и т.д. К грани B_n многогранника Q_n типа (j) приклеен пятиугольной гранью многогранник с одной пятиугольной гранью.

2) Q_1 — многогранник (j). К его пятиугольной грани B_1 приклеен гранью A_2 многогранник Q_2 типа (j). К другой пятиугольной грани, B_2, многогранника Q_2 приклеен многогранник (j) Q_3 и т. д. Многогранник Q_n приклеен

своей гранью B_n к свободной пока пятиугольной грани A_1 многогранника Q_1.

Вначале триангулируем пятиугольные грани многогранников из первой группы следующим образом: триангулируем произвольным образом пятиугольную грань многогранника с одной пятиугольной гранью, а также приклеенную к ней грань A_1; затем грань B_i каждого многогранника (j) триангулируем из той же вершины, что и A_i, либо из одноименной вершины. По лемме 3.4 многогранники (j) с такой триангуляцией пятиугольных граней триангулируемы независимо от триангуляции четырехугольных граней.

Затем триангулируем грани многогранников типов (a)–(i) и четырехугольные грани многогранников (j). Если среди многогранников (a)–(i) есть многогранники с неправильной триангуляцией граней, меняем триангуляцию, как в доказательстве предложения 4.3 (процесс заканчивается, если очередной многогранник P_n получил правильную триангуляцию после смены триангуляции грани A_n либо если P_n является многогранником (j)). Таким образом, можно добиться, чтобы все многогранники типов (a)–(i) имели правильную триангуляцию граней.

Затем триангулируем пятиугольные грани многогранников (j) из второй группы следующим образом: грань A_i триангулируем так, чтобы многогранник Q_i был триангулируем независимо от триангуляции B_i (это возможно по лемме 3.5).

Таким образом, все многогранники имеют правильную триангуляцию граней.

Предложение 4.4, а с ним и теорема 1 доказаны. •

Список литературы

[1] Epstein D. B. A., Penner R., *Euclidean decompositions of noncompact hyperbolic manifolds*, J. Differential Geom. **27** (1988), 67–80.

[2] Thurston W., *The geometry and topology of three-dimensional manifolds. Lecture notes*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1978; *Three-dimensional geometry and topology*. Vol. 1, Princeton Math. Ser., vol. 35, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1997.

[3] Wada M., Yamashita Y., Yoshida H., *An inequality for polyhedra and ideal triangulations of cusped hyperbolic 3-manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 3905–3911.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 20 апреля 2002 г.