Е. И. Ганжа, Основные серии неоднородных систем гидродинамического типа с постоянными матрицами, обладающих законами сохранения 1-го порядка, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1995, том 1, выпуск 3, 641–648

Основные серии неоднородных систем гидродинамического типа с постоянными матрицами, обладающих законами сохранения 1-го порядка

Е. И. ГАНЖА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 517.958

Аннотация

Многие известные вполне интегрируемые системы уравнений с частными производными приводимы к виду $u^i_t = v_i u^i_x + f_i(u)$, $i = 1, \dots, n$. Представляет интерес изучение подобных систем, обладающих какими-либо нетривиальными интегралами. В данной работе дается классификация таких систем с точки зрения наличия интегралов 1-го порядка (при этом такие системы естественно распадаются на три серии) и приведены примеры систем из этих серий. Некоторые из них ранее были неизвестны.

Abstract

E. I. Ganzha, The main series of nonhomogeneous systems of hydrodynamic type with constant matrices possessing 1^{st} order conservation laws, Fundamental-naya i prikladnaya matematika **1**(1995), 641–648.

Let $u^i_t = v_i u^i_x + f_i(u)$, $i = 1, \dots, n$ be a system of PDE with constant v_i. We give a classification of such systems possessing nontrivial conservation laws $dg(u, u_x)/dt = dh(u, u_x)/dx$ and their explicit form for two main series. The third (and the last) main series is shown to be nontrivial. Some examples of such systems are new.

Многие известные вполне интегрируемые системы уравнений с частными производными принадлежат к изучаемому нами классу систем вида

$$u^i_t = \sum_{j=1}^{n} v^i_j u^j_x + f_i(u), \quad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

$u^i = u^i(x, t)$, v^i_j — константы, или приводятся к (1) простейшими преобразованиями. Кроме широко известной системы N-волнового взаимодействия ([1]), уравнений типа sine-Gordon, Буллофа – Додда ([2], [3]), упомянем изучавшиеся в [4] системы $u_t = p(u, v)$, $v_x = q(u, v)$, обладающие нетривиальными симметриями Ли – Беклунда. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что матрица v^i_j системы (1) строго гиперболическая и (1) нерасщепляема, т. е. линейным

Фундаментальная и прикладная математика 1995, **1**, № 3, 641–648.

преобразованием переменных приводится к виду

$$u^i_t = v_i u^i_x + f_i(u), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

$v_i \neq v_k$, $\partial_j f_k \neq 0$ при $i \neq k$, $\partial_s = \partial/\partial u^s$ (здесь и далее суммирования по повторяющимся индексам нет, если не оговорено противное). В данной работе мы классифицируем системы (2), обладающие хотя бы одним нетривиальным законом сохранения 1-го порядка.

Лемма 1. *Если система (2) обладает нетривиальным законом сохранения 1-го порядка $dg(u, u_x)/dt = dh(u, u_x)/dx$, то $g = \sum g_k(u, u^k_x)$, причем каждое слагаемое либо квадратично (т. е. $g_k = \alpha_k(u)(u^k_x)^2 + \beta_k(u)u^k_x + g_{0k}(u)$), либо логарифмическое (т. е. $g_k = c_k \ln\left(u^k_x - \varepsilon_k(u)\right) + g_{0k}(u)$), либо заменой переменных $u^k \to \overline{u}^k = \psi_k(u^k)$ система (2) приводится к системе того же вида со "слабо-нелинейными" $f_k = \sum\limits_{j\neq k} f_{kj}(u^j)$.*

Доказательство. Вычисляя $R = dg/dt - dh/dx$ согласно (2) и собирая члены с u^k_{xx}, получаем, что $u_k \partial g/\partial u^k_x - \partial h/\partial u^k_x = 0$, откуда $\partial^2 g/\partial u^k_x \partial u^i_x = 0$, $i \neq k$, т. е. мы (при $n \geqslant 2$) можем положить $g = \sum g_k(u, u^k_x)$, $h = \sum v_k g_k(u, u^k_x)$. Подставив эти выражения в R, имеем

$$\frac{\partial^3 R}{(\partial u^k_x)^2 \partial u^j_x} = (v_j - v_k)\left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial u^j} + \Delta^k_j \frac{\partial \alpha_k}{\partial u^k_x}\right), \quad k \neq j,$$

где мы ввели $\Delta^k_j = \partial_j f_k/(v_j - v_k)$, $\alpha_k = \partial^2 g_k/(\partial u^k_x)^2$, откуда

$$\partial_j \alpha_k = -\Delta^k_j \frac{\partial \alpha_k}{\partial u^k_x},\ j \neq k, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial u^j}. \tag{3}$$

Проверяя совместность (3) при $n \geqslant 3$, получаем, что

$$\partial_j \partial_m \alpha_k - \partial_m \partial_j \alpha_k = \left(\partial_m \Delta^k_j - \partial_j \Delta^k_m\right) \partial \alpha_k/\partial u^k_x,$$

откуда либо $\partial \alpha_k/\partial u^k_x = \partial^3 g_k/(\partial u^k_x)^3 = 0$, т. е. слагаемое g_k квадратично, либо $\partial_m \Delta^k_j - \partial_j \Delta^k_m = \partial_m \partial_j f_k (v_m - v_j)/(v_j - v_k)(v_m - v_k) = 0$, т. е. $\partial_m \partial_j f_k = 0$ при $m \neq j \neq k$ и $f_k = \sum\limits_{j\neq k} f_{kj}(u_k, u_j)$. Далее, учитывая (3), имеем

$$\partial^2 R/(\partial u^k_x)^2 = f_k \partial_k \alpha_k + \sum_{p\neq k} f_p \partial_p \alpha_k + \partial_k f_k \cdot \left(2\alpha_k + u^k_x \partial \alpha_k/\partial u^k_x\right),$$

т. е.

$$\partial_k \alpha_k = d_k(u) \frac{\partial \alpha_k}{\partial u^k_x} - \partial_k \ln f_k \cdot \left(2\alpha_k + u^k_x \frac{\partial \alpha_k}{\partial u^k_x}\right), \tag{4}$$

$$d_k = \frac{1}{f_k} \sum_{p\neq k} \Delta^k_p f_p.$$

Совместность (3) и (4) дает

$$\partial_j\partial_k\alpha_k - \partial_k\partial_j\alpha_k = \left[\partial_j d_k + \left(\partial_k\Delta_j^k - \Delta_j^k\partial_k \ln f_k\right)\right]\,\partial\alpha_k\big/\partial u_x^k$$

$$-\partial_j\partial_k \ln f_k\,\left(2\alpha_k + u_x^k\partial\alpha_k\big/\partial u_x^k\right) = 0.$$

Поскольку $\partial_k\Delta_j^k - \Delta_j^k\partial_k \ln f_k = f_k\partial_j\partial_k \ln f_k\big/(v_j - v_k)$, естественно выделяются следующие три случая:

(I) $\partial_j\partial_k \ln f_k \neq 0$, тогда $\left(2\alpha_k + u_x^k\partial\alpha_k\big/\partial u_x^k\right) = \varepsilon_k(u)\partial\alpha_k\big/\partial u_x^k$, где $\varepsilon_k(u) = \partial_j d_k\big/\partial_j\partial_k \ln f_k + f_k\big/(v_j - v_k)$, что дает $\alpha_k = \partial^2 g_k\big/(\partial u_x^k)^2 = -c_k(u)\left(u_x^k - \varepsilon_k\right)^{-2}$, $g_k = c_k \ln\left(u_x^k - \varepsilon_k(u)\right) + \delta_k(u)u_x^k + g_{0k}(u)$, т. е. соответствующее слагаемое в законе сохранения логарифмическое.

(II) $\partial_j\partial_k \ln f_k = 0$, $\partial_j d_k \neq 0$, тогда $\partial\alpha_k\big/\partial u_x^k = \partial^3 g_k\big/(\partial u_x^k)^3 = 0$, т. е. слагаемое квадратично.

(III) $\partial_j\partial_k \ln f_k = 0$, $\partial_j d_k = 0$. В сочетании с $\partial_j\partial_p f_k = 0$, $j \neq p \neq k$, это дает $f_k = \overline{f}_k(u^k)\sum_{p\neq k} f_{kp}(u^p)$. Сделав подходящую замену $u^k \to \overline{u}^{\,k} = \psi_k(u^k)$ в системе (2), можно считать $\overline{f}_k(u^k) = 1$, что и доказывает лемму.

В данной работе мы рассмотрим основные серии систем, удовлетворяющих сформулированным в лемме 1 условиям, предполагая, что для всех $1 \leqslant k \leqslant n$ имеет место либо случай (I), либо (II), либо (III), что естественно для нерасщепляющихся систем (2). Смешанные и вырожденные случаи будут рассмотрены в другой работе.

Теорема 1. *В случае* (III) *нелинейные системы* (1), *обладающие нетривиальным законом сохранения 1-го порядка, приводятся к виду* (2) *с* $f_k = \sum_{p\neq k}(v_k - v_p)\exp(u^p)$ *и имеют бесконечное число законов сохранения 1-го порядка с*

$$g = \sum_k G_k\left(u_x^k + \sum_{s=1}^n u^s\right), \quad h = \sum_k v_k G_k\left(u_x^k + \sum_{s=1}^n u^s\right),$$

где $G_k(*)$ *—* n *произвольных функций одного переменного.*

Доказательство. Учитывая $f_k = \sum_{j\neq k} f_{kj}(u^j)$, представим соотношение $\partial_j d_k = 0$, $d_k = \left(\sum_{p\neq k}\Delta_p^k f_p\right)\Big/f_k$ в виде

$$\sum_{p\neq k}\left(\frac{\partial_p f_{kp}}{v_p - v_k}\sum_{s\neq p} f_{ps}\right) = \lambda_k(u^k)\sum_{p\neq k} f_{kp}. \tag{5}$$

Дифференцируя его по u^j, u^k, получаем $\partial_j^2 f_{kj}\cdot\partial_k f_{jk} = (v_j - v_k)\partial_k\lambda_k\partial_j f_{kj}$. Предполагая $\partial_k\lambda_k \neq 0$, $\partial_j f_{kj} \neq 0$ и разделяя переменные в этом соотношении, получаем $\partial_k f_{jk} = c_{jk}\partial_k\lambda_k$, $\partial_j^2 f_{kj} = (v_j - v_k)\partial_j f_{kj}/c_{jk}$ (c_{jk} —

постоянные), откуда $\partial_j\partial_j\lambda_j = (v_j - v_k)\partial_j\lambda_j/c_{jk}$, $c_{jk} = c_j\cdot(v_j - v_k)$, $\lambda_j = b_j\exp(u^j/c_j) + a_j$, $f_{jk} = c_j(v_j - v_k)b_k\exp(u^k/c_k) + d_{jk}$. Очевидно, что заменой $\overline{u}^s = u^s/c_s + \ln b_k$ в (2) мы можем всюду избавиться от c_k, b_k. Подставляя $f_k = \sum(v_k - v_j)\exp(u^j) + f_{0k}$, $f_{0k} = \sum d_{kj}$, в (5) и дифференцируя по u^k, получаем $f_{0k} = 0$, $f_k = \sum(v_k - v_p)\exp(u^p)$. В этом случае решения системы (3), (4) на $\alpha_k(u, u_x^k)$ имеют вид $\alpha_k = \partial^2 g_k/\partial u_x^k = A_k\left(u_x^k + \sum\exp(u^s)\right)$, где $A_k(*)$ — произвольные n функций одного переменного. Подставив

$$g = \sum_k\left[G_k\left(u_x^k + \sum_{s=1}^n\exp(u^s)\right) + \beta_k(u)u_x^k\right] + g_0(u), \quad G_k'' = A_k,$$

$$h = \sum_k v_k\left[G_k\left(u_x^k + \sum_{s=1}^n\exp(u^s)\right) + \beta_k(u)u_x^k\right] + h_0(u)$$

в $R = dg/dt - dh/dx = 0$ и вычислив $\partial^2 R/\partial u_x^k\partial u_x^p = (v_p - v_k)(\partial_p\beta_k - \partial_k\beta_p) = 0$, получаем, что слагаемые $\beta_k u_x^k$ в сумме дают тривиальный закон сохранения. Положив $\beta_k \equiv 0$, имеем $R \equiv dg_0/dt - dh_0/dx$, т. е. слагаемые g_0, h_0 дают закон сохранения гидродинамического типа. Случай вырождения $\partial_k\lambda_k = 0$ исследуется аналогично и приводит к линейным системам, что и доказывает теорему 1.

Замечание 1. Рассматриваемая система имеет $(n-2)$ линейно независимых гидродинамических закона сохранения с $g = \sum g_k(u^k)$, $g_k = \exp(u^k) + d_k u^k$, $h = \sum v_k g_k(u^k)$ и условиями $\sum d_k v_k = \sum d_k = 0$.

Замечание 2. Заменой $\overline{u}^k = \exp u^k$ описанные системы переходят в системы с квадратичной нелинейностью $f_k = u^k\sum\limits_{p\neq k}(v_k - v_p)u^p$.

В серии систем (2), соответствующей случаю (II), ответ можно получить в явном виде при любом n; мы приведем его здесь для $n = 2, 3$.

Предположения (II): $g = \sum\left[\alpha_k(u)(u_x^k)^2 + \beta_k(u)u_x^k\right] + g_0(u)$, $h = \sum v_k \times$ $\times \left[\alpha_k(u)(u_x^k)^2 + \beta_k(u)u_x^k\right] + h_0(u)$ при подстановке в (3), (4) дают $\partial_j\alpha_k = 0$, $j \neq k$, т. е. $\alpha_k = \alpha_k(u^k)$ и $\partial_k\alpha_k = -2\alpha_k\partial_k\ln f_k$, что в предположении $\alpha_k \neq 0$ приводит к выделению переменной u^k в f_k: $f_k = \left[\alpha_k(u^k)\right]^{-1/2} \times$ $\times \widehat{f}_k(u^1, \ldots, \widehat{u}^k, \ldots, u^n)$. Заменой $u^k \to \psi_k(u^k)$ можно получить $\alpha_k \equiv \mathrm{const}$, $\partial_k f_k = 0\,\forall k$. Окончательно, подставляя указанные g, h в $R = dg/dt - dh/dx = 0$, получаем соотношения

$$\partial_k f_k = 0, \quad \alpha_k = \mathrm{const} \neq 0, \tag{6}$$

$$\partial_p\beta_k - \partial_k\beta_p = -2\left(\alpha_k\Delta_p^k - \alpha_p\Delta_k^p\right), \quad p \neq k, \tag{7}$$

$$\sum_k f_k\partial_k g_0 = 0, \tag{8}$$

$$f_k\partial_k\beta_k + \sum_{s\neq k}(\beta_s\partial_k f_s + f_s\partial_s\beta_k) + v_k\partial_k g_0 - \partial_k h_0 = 0. \tag{9}$$

Введя $\overline{h}_0 = h_0 + \sum \beta_s f_s$ в (9), получаем

$$\partial_k \overline{h}_0 + v_k \partial_k g_0 = \sum_{s \neq k} f_s(\partial_k \beta_s - \partial_s \beta_k) \equiv Q_k(f, \beta). \qquad (9')$$

При $n = 2$ имеем $f_1 = f_1(u^2)$, $f_2 = f_2(u^1)$; из (7) с точностью до прибавления тривиального закона сохранения находим $\beta_1 = 2\alpha_1 f_1/(v_1 - v_2)$, $\beta_2 = 2\alpha_2 f_2/(v_2 - v_1)$; из (8) $g_0 = G\big(F_1(u^2) - F_2(u^1)\big)$, где F_k — первообразные f_k: $F_k' = f_k$. Исключая из (9′) перекрестным дифференцированием h_0, выводим $G'' = 2[\alpha_1 \partial_2 \partial_2 f_1/f_1 + \alpha_2 \partial_1 \partial_1 f_2/f_2]$, т. е. $G'' = c_1(F_1 - F_2) + c_2$, $F_i''' = (a_i F_i + b_i) F_i'$, $2a_i = c_1(v_1 - v_2)^2/\alpha_i$, $2(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2) = c_2(v_1 - v_2)^2$. В случае $a_i \neq 0$ F_1, F_2 являются $\wp$-функциями Вейерштрасса: $F_1 = (12\wp_1(u^2 - d_1) - b_1)/a_1$, $F_2 = (12\wp_2(u^1 - d_2) - b_2)/a_2$, $(\wp_1')^2 = 4(\wp_1)^3 - g_{21}\wp_1 - g_{31}$, $(\wp_2')^2 = 4(\wp_2)^3 - g_{22}\wp_2 - g_{32}$. При вырождениях $c_1 = 0$, $b_i \neq 0$: $F_i = k_{i1} \exp\big(\sqrt{b_i} u^{3-i}\big) + k_{i2} \exp\big(-\sqrt{b_i} u^{3-i}\big) + d_i$; $c_1 = 0$, $b_i = 0$: $F_i = k_i (u^{3-i})^2 + p_i u^{3-i} + d_i$.

Мы не будем приводить здесь явный вид всех получающихся систем и соответствующих им законов сохранения из-за ограниченного объема статьи.

Замечание 3. Любая система (2) с $n = 2$ и $f_k = F_k'(u^{3-k})$ имеет гидродинамический закон сохранения с $g = F_1 - F_2$, $h = v_2 F_1 - v_1 F_2$.

При $n = 3$ из (7) следует условие совместности $S_{123} = \alpha_1(\partial_2 \Delta_3^1 - \partial_3 \Delta_2^1) + \alpha_2(\partial_3 \Delta_1^2 - \partial_1 \Delta_3^2) + \alpha_3(\partial_1 \Delta_2^3 - \partial_2 \Delta_1^3) = 0$, из которого и (6) имеем $\partial_i \partial_j S_{123} = \mathrm{const} \cdot \partial_i^2 \partial_j^2 f_k = 0$, т. е. $f_k = \varphi_{ki}(u^i) u^j + \varphi_{jk}(u^j) u^i + \psi_{ki}(u^i) + \psi_{kj}(u^j)$. Подставляя это в $S_{123} = 0$, получаем соотношения на φ, из которых

$$f_k = c_{ki} \varphi_i(u^i) u^j + c_{kj} \varphi_j(u^j) u^i + \psi_{ki}(u^i) + \psi_{kj}(u^j), \qquad (10)$$

$c_{pq} = \alpha_p \lambda_q \varepsilon_{pqr}(v_q - v_r)^2$, $\varepsilon_{pqr} = \pm 1$, λ_q — произвольные постоянные. При этом с точностью до прибавления тривиального закона сохранения из (7) находим

$$\beta_k = -2\alpha_k \sum_{i \neq j \neq k} \left(\frac{c_{ki} \varphi_i(u^i) u^j + \psi_{ki}(u^i)}{(v_i - v_k)} \right). \qquad (11)$$

Исключим из (9′) перекрестным дифференцированием $\overline{h}_0$:

$$(v_j - v_k) \partial_j \partial_k g_0 = \partial_j Q_k - \partial_k Q_j, \qquad (9'')$$

что дает условие совместности

$$Z_{123} = (v_1 - v_2) \partial_1 \partial_2 Q_3 + (v_2 - v_3) \partial_2 \partial_3 Q_1 + (v_3 - v_1) \partial_3 \partial_1 Q_2 = 0. \qquad (12)$$

Подставив в (12) выражения Q_i, f_i, β_i из (9′), (10), (11), вычислим производную

$$\begin{aligned}\partial_i^2\partial_j^2\partial_k Z_{123} = \frac{2\alpha_k^2(v_i-v_j)^3}{(v_k-v_i)(v_k-v_j)}\times \\ \times\Big\{\left[\lambda_i\lambda_j\alpha_i(v_j-v_k)^2\varphi_j^{\mathrm{IV}}(\varphi_i'''u^i+5\varphi_i'')-\lambda_i\varphi_i'''\psi_{kj}^{\mathrm{IV}}\right](v_i-v_k)+ \\ +\left[\lambda_i\lambda_j\alpha_j(v_i-v_k)^2\varphi_i^{\mathrm{IV}}(\varphi_j'''u^j+5\varphi_j'')+\lambda_j\varphi_j'''\psi_{ki}^{\mathrm{IV}}\right](v_j-v_k)\Big\}=0.\end{aligned} \tag{13}$$

В предположении $\varphi_s''' \neq 0$ (случай обращения каких-либо знаменателей в 0 будет исследован в отдельной работе и не включается в основную серию) разделим (13) на $\varphi_i'''\varphi_j'''$, вычислим производную по $\partial u^i\partial u^j$ и получим, разделяя переменные u^i, u^j:

$$\left(\frac{\varphi_k^{\mathrm{IV}}}{\varphi_k'''}\right)' \Bigg/ \left(1+5\left(\frac{\varphi_k''}{\varphi_k'''}\right)'\right) = C\varepsilon_{ijk}\alpha_k(v_i-v_j)\equiv \overline{c}_k. \tag{14}$$

Общим решением (14) является $\varphi_k = a_k\overline{u}^k + (\overline{c}_k^{\,2}(\overline{u})^2+\overline{c}_k)(\mu_k\Phi_k+\nu_k)\times$ $\times\ \exp(\overline{c}_k(\overline{u}^k)^2/2)$, где $\Phi_k = \int\exp(-\overline{c}_k(\overline{u}^k)^2/2)d\overline{u}^k$, $\overline{u}^k = u^k + d_k$. Сделав линейное преобразование u^k, мы можем положить $d_k = 0$, $\overline{c}_k = \pm 1$. Из (13) разделением переменных находим

$$\psi_{kj} = e_k\lambda_j(v_j-v_k)\alpha_j(v_k-v_i)u^j(\mu_j\Phi_j+\nu_j)\exp\left((u^j)^2/2\right)+ \\ + A_{kj}(u^j)^3+B_{kj}(u^j)^2+p_{kj}u^j+q_{kj}.$$

Из $\partial_1\partial_2\partial_3 Z_{123}=0$ тогда получаем $a_k=(v_i-v_j)\cdot c_a/\lambda_k+\mu_k$, $A_{kj}=m_{k+j}\cdot(v_k-v_i)$. При $\mu_k\neq 0$, $\nu_k=0$ (12) выполняются лишь при $A_{kj}=0$, $B_{kj}=0$, $p_{kj}=0$, $q_{kj}=0$, $e_k=0$, что дает

$$\begin{aligned} f_1 &= -\Phi_3\exp\left((u^3)^2/2\right)\left((u^3)^2+1\right)u^2\mu_3\lambda_3(v_3-v_1)- \\ &\quad -\Phi_2\exp\left((u^2)^2/2\right)\left((u^2)^2-1\right)u^3\mu_2\lambda_2(v_2-v_1)- \\ &\quad -(u^3u^2)(\mu_3\lambda_3(v_3-v_1)+\mu_2\lambda_2(v_2-v_1)), \\ f_2 &= \Phi_3\exp\left((u^3)^2/2\right)\left((u^3)^2+1\right)u^1\mu_3\lambda_3(v_2-v_3)+ \\ &\quad +\Phi_1\exp\left((u^1)^2/2\right)\left((u^1)^2+1\right)u^3\mu_1\lambda_1(v_2-v_1)+ \\ &\quad +(u^3u^1)(\mu_3\lambda_3(v_2-v_3)+\mu_1\lambda_1(v_2-v_1)), \\ f_3 &= \Phi_2\exp\left((u^2)^2/2\right)\left((u^2)^2+1\right)u^1\mu_2\lambda_2(v_2-v_3)+ \\ &\quad +\Phi_1\exp\left((u^1)^2/2\right)\left((u^1)^2+1\right)u^2\mu_1\lambda_1(v_3-v_1)+ \\ &\quad +(u^2u^1)(\mu_2\lambda_2(v_3-v_2)+\mu_1\lambda_1(v_3-v_1)). \end{aligned} \tag{15}$$

При $\mu_k = 0$, $\nu_k \neq 0$ также $A_{kj} = 0$, $B_{kj} = 0$, $p_{kj} = 0$, $q_{kj} = 0$, $e_k = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} f_1 &= \exp\left((u^3)^2/2\right)\left((u^3)^2+1\right) u^2 \nu_3 \lambda_3 (v_1 - v_3) + \\ &\quad + \exp\left((u^2)^2/2\right) u^3 \left((u^2)^2+1\right) \nu_2 \lambda_2 (v_1 - v_2), \\ f_2 &= \exp\left((u^3)^2/2\right)\left((u^3)^2+1\right) u^1 \nu_3 \lambda_3 (v_2 - v_3) + \\ &\quad + \exp\left((u^1)^2/2\right) u^3 \left((u^1)^2+1\right) \nu_1 \lambda_1 (v_2 - v_1), \\ f_3 &= \exp\left((u^2)^2/2\right)\left((u^2)^2+1\right) u^1 \nu_2 \lambda_2 (v_3 - v_2) + \\ &\quad + \exp\left((u^1)^2/2\right) u^2 \left((u^1)^2+1\right) \nu_1 \lambda_1 (v_3 - v_1). \end{aligned} \tag{16}$$

Из $(9'')$ мы можем найти $\partial_k g_0 = G_k(u) + \gamma_k(u^k)$; G_k фиксированы, $\gamma_k(u^k)$ — неизвестные функции одного переменного. Остается проверить условие (8): $\sum \gamma_i(u^i) f_i(u) = -\sum G_k(u) f_k(u) \equiv D$. Выделяя γ_1 и дифференцируя по u^2, u^3, получим $\partial_2\gamma_2 = (\partial_2 D - \gamma_2\partial_2 F_2 - \gamma_3\partial_2 F_3)/F_2$, $\partial_3\gamma_3 = (\partial_3 D - \gamma_2\partial_3 F_2 - \gamma_3\partial_3 F_3)/F_3$, $F_k = f_k/f_1$. Проверяя совместность этих условий с $\partial_j\gamma_k = 0$, получаем уравнения

$$\begin{cases} \gamma_2\partial_1\left(\dfrac{\partial_2 F_2}{F_2}\right) + \gamma_3\partial_1\left(\dfrac{\partial_2 F_3}{F_2}\right) = \partial_1\left(\dfrac{\partial_2 D}{F_2}\right), \\ \gamma_2\partial_1\left(\dfrac{\partial_3 F_2}{F_3}\right) + \gamma_3\partial_1\left(\dfrac{\partial_3 F_3}{F_3}\right) = \partial_1\left(\dfrac{\partial_3 D}{F_3}\right), \\ \gamma_2\left[\partial_3\left(\dfrac{\partial_2 F_2}{F_2}\right) - \dfrac{\partial_2 F_3 \partial_3 F_2}{F_2 F_3}\right] + \gamma_3\left[\partial_3\left(\dfrac{\partial_2 F_3}{F_2}\right) - \dfrac{\partial_2 F_3 \partial_3 F_3}{F_2 F_3}\right] = \\ \qquad = \partial_3\left(\dfrac{\partial_2 D}{F_2}\right) - \dfrac{\partial_3 D \partial_2 F_3}{F_2 F_3}. \end{cases} \tag{17}$$

При подстановке (15) коэффициенты при γ_i в левых частях (17) тождественно обращаются в 0, в то время как правые части не равны 0 ни при каком выборе параметров; тем самым системы (2) с $f_i(u)$ вида (15) не обладают нетривиальными интегралами 1-го порядка. При подстановке (16) в (17) получаем тождественное обращение обеих частей равенств в 0, что доказывает следующую теорему.

Теорема 2. *Система* (2) *с тремя уравнениями и* f_i, *задаваемыми* (16), *обладает двумя гидродинамическими законами сохранения и по меньшей мере одним законом сохранения 1-го порядка.*

Перейдем к исследованию серии систем (2), обладающих логарифмическими законами сохранения 1-го порядка (случай I). Как доказано в лемме 1, $g = \sum \left[c_k \ln\left(u^k_x - \varepsilon_k(u)\right) + \delta_k(u) u^k_x\right] + g_{0k}(u)$, $h = \sum v_k \left[c_k \ln\left(u^k_x - \varepsilon_k(u)\right) + \delta_k(u) u^k_x\right] + h_{0k}(u)$. Подставляя в (3), (4) $\alpha_k = \partial^2 g/(u^k_x)^2$, получаем (при

$c_k \neq 0)$ $c_k = \text{const}$, $\partial_j \varepsilon_k = \Delta_j^k$, $\partial_k \varepsilon_k = \varepsilon_k \partial_k \ln f_k - d_k(u)$. Из $\partial^2 R/\partial u_x^k \partial u_x^p = (\partial_p \delta_k - \partial_k \delta_p)(v_p - v_k) = 0$ вытекает, что слагаемые $\delta_k(u) u_x^k$ дают тривиальный закон сохранения. Окончательно $R = dg/dt - dh/dx = 0$ дает следующий набор необходимых и достаточных соотношений:

$$\begin{cases} \partial_j \varepsilon_k = \Delta_j^k \equiv \partial_j f_k/(v_j - v_k), \\ \partial_k \varepsilon_k = \varepsilon_k \partial_k \ln f_k - d_k, \quad d_k = \dfrac{1}{f_k} \displaystyle\sum_{p \neq k} \Delta_p^k f_p, \\ \partial_i \partial_j f_k = 0, \\ \sum \partial_l g_0 f_k + \sum c_k \partial_k f_k = 0, \quad c_k = \text{const}, \\ \partial_k h_0 = v_k \partial_k g_0. \end{cases} \tag{18}$$

Из последнего условия следует, что $\partial_j \partial_k g_0 = 0$, т. е. $g_0 = \sum g_{0k}(u^k)$.

Рассмотрим (18) при $n = 2$. Положив $f_1 = \varphi_1(u^1, u^2)(v_2 - v_1)$, $f_2 = \varphi_2(u^1, u^2)(v_1 - v_2)$, имеем $\varepsilon_i = \varphi_i = \chi_i(u^i)$. При $\chi_i \neq 0$ введем $\psi_i = \varphi_i/\chi_i$ и заменим переменные u^i так, что $\overline{\partial}_i = \chi_i(u^i) \cdot \partial_i$. Тогда (18) преобразуется в

$$\begin{cases} \overline{\partial}_1 \psi_1 + \psi_2 \overline{\partial}_2 \psi_1 = 0, \\ \overline{\partial}_2 \psi_2 + \psi_1 \overline{\partial}_1 \psi_2 = 0, \\ c_1 \overline{\partial}_1 \psi_1 + \gamma_1(u^1)\psi_1 = c_2 \overline{\partial}_2 \psi_2 + \gamma_2(u^2)\psi_2, \end{cases} \tag{19}$$

с $\gamma_i(u^i) = c_i \partial_i \chi_i + \chi_i \partial_i g_{0i}(u^i)$. Соответствующим преобразованием растяжения можно привести постоянные c_k к 1.

Полное исследование (19) можно провести при условии $\psi_2 = 1/\psi_1$ (естественно возникающем при исследовании (19) на совместность). Как показывают вычисления, (19) при этом предположении совместна, если ($\overline{u}^k = c_k u^k + d_k$)

$$\psi_1 = \frac{\overline{u}^1}{\overline{u}^2}, \quad \psi_2 = \frac{\overline{u}^2}{\overline{u}^1}.$$

Литература

[1] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов: метод обратной задачи. — М.: 1980.

[2] G. Tzitzéica. Sur une nouvelle classe de surfaces // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1910. — V. 150. — P. 955–956, 1227–1229.

[3] А. Б. Жибер, Н. Х. Ибрагимов, А. Б. Шабат. Уравнения типа Лиувилля // ДАН СССР. — 1979. — Т. 249. — № 1. — С. 26–29.

[4] А. Б. Жибер, А. Б. Шабат. Системы уравнений $u_x = p(u, v)$, $v_y = q(u, v)$, обладающие симметриями // ДАН СССР. — 1979. — Т. 247. — № 5. — С. 1103–1107.

Статья поступила в редакцию в июне 1995 г.