М. М. Сорокина, М. А. Корпачева, О критических Ω-расслоенных формациях конечных групп, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 1, 106–115

DOI: 10.4213/dm35

Дискретная математика

том 18 выпуск 1 * 2006

УДК 512.542

О критических Ω-расслоенных формациях конечных групп

© 2006 г. М. М. Сорокина, М. А. Корпачева

Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторый класс конечных групп. Ω-расслоенная формация конечных групп $\mathfrak{F}$ с направлением φ называется минимальной Ω-расслоенной не $\mathfrak{H}$-формацией с направлением φ, или иначе, $\mathfrak{H}_{\Omega\varphi}$-критической формацией, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные Ω-расслоенные подформации с направлением φ из $\mathfrak{F}$ содержатся в классе $\mathfrak{H}$. В статье приводится полное описание строения минимальных Ω-расслоенных не $\mathfrak{H}$-формаций с br-направлением φ, удовлетворяющим условию $\varphi \leqslant \varphi_3$.

Проблема изучения $\mathfrak{H}_\theta$-критических формаций, где $\mathfrak{H}$ — класс групп, θ — некоторая непустая совокупность формаций, была поставлена в 1980 году Л. А. Шеметковым [1]. В серии работ (см., например, [2]) А. Н. Скибой получено решение этой проблемы в случае, когда θ — совокупность всех локальных формаций. Исследованием критических ω-локальных формаций занимались А. Н. Скиба, В. М. Селькин, И. Н. Сафонова и др. (см., например, [3, 4]). В. А. Ведерниковым и М. М. Сорокиной решена задача Л. А. Шеметкова для композиционных формаций (см., например, [5, 6]). В. А. Ведерниковым и Д. Г. Коптюх получено описание строения критических Ω-композиционных наследственных формаций [7]. В 1999 году В. А. Ведерниковым введена в рассмотрение концепция частичной веерности и частичной расслоенности, которая позволяет изучать формации конечных групп на языке функций [8–10]. При этом, локальные и композиционные формации являются частными случаями веерных и расслоенных формаций соответственно. К важным видам Ω-расслоенных формаций относятся Ω-канонические и Ω-биканонические формации. М. М. Сорокиной и Н. В. Силенок исследованы критические Ω-канонические и критические Ω-биканонические формации [11]. В данной работе решается вышеуказанная задача Л. А. Шеметкова для Ω-расслоенных формаций с произвольным направлением φ, удовлетворяющим условию $\varphi \leqslant \varphi_3$.

Рассматриваются только конечные группы. Основные определения и обозначения можно найти в [9, 10, 12–15]. Приведем лишь некоторые из них. Запись $G = [A]B$ означает, что группа G есть полупрямое произведение своих подгрупп A и B, где A — нормальная подгруппа группы G. Через $G_{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-радикал группы G, где $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга групп; через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, где $\mathfrak{F}$ — непустая формация групп [12]. Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — классы групп. Следуя [15], будем использовать следующее обозначение:

$$\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 = (G\colon G \text{ имеет нормальную подгруппу} N \in \mathfrak{F}_1 \text{ с } G/N \in \mathfrak{F}_2).$$

Пусть $\mathfrak{I}$ — класс всех простых групп, Ω — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{G}_\Omega$ — класс всех Ω-групп, то есть таких групп G, что $K(G) \subseteq \Omega$, где $K(G)$ — класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G; полагают, что $1 \in \mathfrak{G}_\Omega$; $O_\Omega(G)$ — $\mathfrak{G}_\Omega$-радикал группы G. Пусть $A \in \mathfrak{J}$. Тогда $A' = \mathfrak{J} \setminus (A)$, $\mathfrak{G}_A = \mathfrak{G}_{(A)}$, $O_A(G) = O_{(A)}(G)$, $\mathfrak{S}_{cA}$ — класс всех групп, у которых каждый главный A-фактор централен. Через $F_A(G)$ обозначается пересечение централизаторов всех главных A-факторов группы G; если в G нет главных A-факторов, то полагают $F_A(G) = G$ (см. [16]). Известно, что $F_A(G) = G_{\mathfrak{S}_{cA}}$ (см. [17]).

Функции

$$\begin{aligned} f\colon \Omega \cup \{\Omega'\} &\to \{\text{формации групп}\},\\ g\colon \quad \mathfrak{J} &\to \{\text{формации групп}\},\\ \varphi\colon \quad \mathfrak{J} &\to \{\text{непустые формации Фиттинга}\}, \end{aligned}$$

принимающие одинаковые значения на изоморфных группах из области определения, называются соответственно ΩF-функцией, F-функцией и FR-функцией. Формация

$$\Omega F(f,\varphi) = (G\colon G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G))$$

называется Ω-расслоенной формацией с Ω-спутником f и с направлением φ; формация

$$F(g,\varphi) = (G\colon G/G_{\varphi(A)} \in g(A) \text{ для всех } A \in K(G))$$

называется расслоенной формацией со спутником g и с направлением φ (см. [9]). Направление φ Ω-расслоенной формации называется b-направлением, если $\varphi(A) = \varphi(A)\mathfrak{G}_A$ для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{J}$; φ называется r-направлением, если $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}\varphi(A)$ для любой группы $A \in \mathfrak{J}$. Направление φ Ω-расслоенной формации называется br-направлением, если φ является и b-направлением, и r-направлением. Через φ_3 обозначается направление Ω-композиционной формации, то есть $\varphi_3(A) = \mathfrak{S}_{cA}$ для любой группы $A \in \mathfrak{J}$ (см. [10]). Пусть ψ_1 и ψ_2 — ΩF-функции (соответственно F-функции, FR-функции). Говорят, что $\psi_1 \leqslant \psi_2$, если $\psi_1(A) \subseteq \psi_2(A)$ для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ (для всех $A \in \mathfrak{J}$) [9]. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустое множество групп. Тогда $(\mathfrak{X})$ — класс групп, порожденный $\mathfrak{X}$, $\Omega F(\mathfrak{X},\varphi)$ $(F(\mathfrak{X},\varphi))$ — Ω-расслоенная (расслоенная) формация с направлением φ, порожденная множеством $\mathfrak{X}$, $K(\mathfrak{X})$ — объединение классов $K(G)$ для всех $G \in \mathfrak{X}$.

Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторый класс групп. Следуя [2], Ω-расслоенную формацию $\mathfrak{F}$ с направлением φ назовем $\mathfrak{H}_{\Omega\varphi}$-критической формацией, или иначе, минимальной Ω-расслоенной не $\mathfrak{H}$-формацией с направлением φ, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные Ω-расслоенные подформации с направлением φ из $\mathfrak{F}$ в классе $\mathfrak{H}$ содержатся. Аналогично определяются $\mathfrak{H}_\varphi$-критические формации (минимальные расслоенные не $\mathfrak{H}$-формации с направлением φ). Приведем описание минимальных Ω-расслоенных не $\mathfrak{H}$-формацией с br-направлением φ, удовлетворяющим условию $\varphi \leqslant \varphi_3$. Следующая лемма является следствием теоремы 1 из [10].

Лемма 1. *Пусть f — внутренний Ω-спутник Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$ с br-направлением φ, удовлетворяющим условию $\varphi \leqslant \varphi_3$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным внутренним Ω-спутником h и $h(A) = \mathfrak{F}$ для всех $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus \mathfrak{A})$ и $h(Z_p) = \mathfrak{N}_p f(Z_p)$ для всех $Z_p \in \Omega$.*

Лемма 2. *Пусть h — максимальный внутренний Ω-спутник непустой Ω-расслоенной формации $\mathfrak{H}$ с br-направлением φ таким, что $\varphi \leqslant \varphi_3$, f — минимальный Ω-спутник Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$ с направлением φ. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega\varphi}$-критической, то $\mathfrak{F} = \Omega F(G,\varphi)$, где G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем если $K(P) \subseteq \Omega$, то $f(A)$ является $h(A)$-критической формацией для $A \in K(P)$, а в случае $K(P) \not\subseteq \Omega$ формация $f(\Omega')$ является $h(\Omega')$-критической.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{H}_{\Omega\varphi}$-критическая формация и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда группа G является монолитической с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$. Поскольку $\Omega F(G, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$ и $\Omega F(G, \varphi) \nsubseteq \mathfrak{H}$, в силу $\mathfrak{H}_{\Omega\varphi}$-критичности формации $\mathfrak{F}$, получаем, что $\mathfrak{F} = \Omega F(G, \varphi)$. По теореме 5 из [9] $f(\Omega') = \mathrm{form}(G/O_\Omega(G))$, $f(A) = \mathrm{form}(G/G_{\varphi(A)})$ для всех $A \in \Omega \cap K(G)$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \setminus K(G)$. По лемме 1 $h(A) = \mathfrak{H}$ для всех $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus \mathfrak{A})$ и для любого $Z_p \in \Omega$ справедливо равенство $h(Z_p) = \mathfrak{N}_p h_1(Z_p)$, где h_1 — произвольный внутренний Ω-спутник формации $\mathfrak{H}$.

Пусть $K(P) \subseteq \Omega$ и $A \in K(P)$. Покажем, что формация $f(A)$ является $h(A)$-критической. Рассмотрим случай, когда A — неабелева группа. Поскольку $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{S}_{cA} = \mathfrak{G}_{A'}$, то $P \nsubseteq G_{\varphi(A)}$ и ввиду монолитичности группы G, получаем, что $G_{\varphi(A)} = 1$. Тогда $f(A) = \mathrm{form}\, G \nsubseteq \mathfrak{H} = h(A)$. Согласно лемме 18.2 из [13], $\mathrm{form}(G/P)$ — единственная максимальная подформация формации $\mathrm{form}\, G = f(A)$. Из включения $G/P \in \mathfrak{H} = h(A)$ получаем, что $\mathrm{form}(G/P) \subseteq h(A)$, и значит, формация $f(A)$ является $h(A)$-критической.

Пусть теперь $A \cong Z_p$. Рассмотрим случай, когда $h(Z_p) = \varnothing$. Предположим, что $Z_p \in K(\mathfrak{H})$. Обозначим через h_2 минимальный Ω-спутник формации $\mathfrak{H}$. По теореме 5 в [9] $h_2(Z_p) \neq \varnothing$, и значит, $h(Z_p) = \mathfrak{N}_p h_2(Z_p) \neq \varnothing$. Получаем противоречие. Следовательно, $Z_p \notin K(\mathfrak{H})$, и поэтому $Z_p \notin \mathfrak{H}$. Согласно следствию 3 из [10], $Z_p \in \mathfrak{N}_p f(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $Z_p \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ и, в силу выбора группы G, получаем, что $G = P$. Поскольку φ — b-направление, то $Z_p \in \varphi(Z_p)\mathfrak{N}_p = \varphi(Z_p)$, и значит, $(Z_p)_{\varphi(Z_p)} = Z_p$. Тогда $f(Z_p) = (1)$ и формация $f(Z_p)$ является $h(Z_p)$-критической.

Пусть $h(Z_p) \neq \varnothing$. Предположим, что $f(Z_p) \subseteq h(Z_p)$. Тогда $G/G_{\varphi(Z_p)} \in h(Z_p)$. Поскольку $P \subseteq O_{Z_p}(G)$, то $G/O_{Z_p}(G) \cong (G/P)/(O_{Z_p}(G)/P) \in \mathfrak{H}$. Согласно лемме 2 из [10], $G \in \mathfrak{H}$, что невозможно. Поэтому $f(Z_p) \nsubseteq h(Z_p)$. Пусть $\mathfrak{M}$ — собственная подформация из $f(Z_p)$. Предположим, что $\mathfrak{M} \nsubseteq h(Z_p)$ и M — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{M} \setminus h(Z_p)$. Тогда M является монолитической группой с монолитом $R = M^{h(Z_p)}$. Если $R \in \mathfrak{N}_p$, то $M \in \mathfrak{N}_p h(Z_p) = h(Z_p)$, что невозможно. Поэтому $R \nsubseteq \mathfrak{N}_p$ и $O_p(M) = 1$. Ввиду леммы 18.8 из [13], существует точный неприводимый $F_p[M]$-модуль K. Рассмотрим группу $T = [K]M$. Группа T монолитична с монолитом $K = C_T(K)$. Поскольку φ — b-направление, то $\varphi(Z_p) = \varphi(Z_p)\mathfrak{N}_p$, и значит, $K \subseteq T_{\varphi(Z_p)} \subseteq T_{\varphi_3(Z_p)} = F_{Z_p}(T) \subseteq C_T(K) = K$. Тем самым установлено, что $K = T_{\varphi(Z_p)}$. Так как $T/K \cong M \in \mathfrak{M}$, ввиду следствия 3 из [10], $T \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_p f(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}$ и $\Omega F(T, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\Omega F(T, \varphi) = \mathfrak{F}$, то $f(Z_p) = \mathrm{form}(T/T_{\varphi(Z_p)}) = \mathrm{form}\, M \subseteq \mathfrak{M}$, что невозможно. Таким образом, $\Omega F(T, \varphi) \subset \mathfrak{F}$, и следовательно, $\Omega F(T, \varphi) \subseteq \mathfrak{H}$. Тогда $M \cong T/T_{\varphi(Z_p)} \in h(Z_p)$. Получаем противоречие. Поэтому $\mathfrak{M} \subseteq h(Z_p)$, и формация $f(Z_p)$ является $h(Z_p)$-критической.

Пусть $K(P) \nsubseteq \Omega$. Покажем, что $f(\Omega')$ — $h(\Omega')$-критическая формация. Так как $P \nsubseteq O_\Omega(G)$, то $O_\Omega(G) = 1$ и $f(\Omega') = \mathrm{form}\, G \nsubseteq \mathfrak{H} = h(\Omega')$. Пусть $\mathfrak{M}$ — собственная подформация из $f(\Omega')$ и $\mathfrak{M}_1 = \Omega F(\mathfrak{M}, \varphi)$. Из включения $\mathfrak{M} \subset f(\Omega') \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{F}$, то по теореме 5 из [9] $f(\Omega') = \mathrm{form}(M/O_\Omega(M) \colon M \in \mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{M}$, что невозможно. Следовательно, $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{F}$, и значит, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} = h(\Omega')$ и формация $f(\Omega')$ является $h(\Omega')$-критической. Лемма доказана.

Следующее утверждение является следствием леммы 2.

Лемма 3. *Пусть h — максимальный внутренний спутник непустой расслоенной формации $\mathfrak{H}$ с br-направлением φ таким, что $\varphi \leqslant \varphi_3$, f — минимальный спутник расслоенной формации $\mathfrak{F}$ с направлением φ. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_\varphi$-критической, то $\mathfrak{F} = F(G, \varphi)$, где G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем формация $f(A)$ является $h(A)$-критической для $\Phi \in K(P)$.*

Лемма 4. *Пусть h — максимальный внутренний Ω-спутник непустой Ω-расслоенной формации $\mathfrak{H}$ с br-направлением φ таким, что $\varphi \leqslant \varphi_3$, f — минимальный Ω-спутник Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$ с направлением φ. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega F(G, \varphi)$, где G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}} \nsubseteq A(G)$, причем в случае $K(P) \subseteq \Omega$ формация $f(A)$ является $h(A)$-критической формацией для $A \in K(P)$, а в случае $K(P) \nsubseteq \Omega$ формация $f(\Omega')$ является $h(\Omega')$-критической. Тогда формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega\varphi}$-критической.*

Доказательство. Поскольку $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$, справедливо включение $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{H}$. По теореме 5 из [9], $f(\Omega') = \mathrm{form}(G/O_\Omega(G))$, $f(A) = \mathrm{form}(G/G_{\varphi(A)})$ для всех $A \in \Omega \cap K(G)$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \setminus K(G)$. По лемме 1 $h(A) = \mathfrak{H}$ для всех $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus \mathfrak{A})$, и для любого $Z_p \in \Omega$ справедливо равенство $h(Z_p) = \mathfrak{N}_p h_1(Z_p)$, где h_1 — произвольный внутренний Ω-спутник формации $\mathfrak{H}$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — собственная Ω-расслоенная подформация с направлением φ из $\mathfrak{F}$ и b — ее минимальный Ω-спутник. Согласно следствию 5.1 из [9] $b \leqslant f$. Покажем, что $b \leqslant h$. Если $A \in \Omega \setminus K(G)$, то $f(A) = \varnothing$, и значит, $b(A) = \varnothing \subseteq h(A)$.

Пусть $A \in \Omega \cap K(G)$. Рассмотрим случай, когда $A \notin K(P)$. Так как φ — r-направление, то $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}\varphi(A)$ и по лемме 1 из [10] $G_{\varphi(A)}/P = (G/P)_{\varphi(A)}$. Тогда

$$b(A) \subseteq f(A) = \mathrm{form}(G/G_{\varphi(A)}) = \mathrm{form}((G/P)/(G/P)_{\varphi(A)}) \subseteq h(A).$$

Пусть $A \in K(P)$. Предположим, что $b(A) = f(A)$. Если A — неабелева группа, то из $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{S}_{cA} = \mathfrak{G}_{A'}$ получим, что $A \notin \varphi(A)$ и поэтому $G_{\varphi(A)} = 1$. Тогда

$$G \cong G/G_{\varphi(A)} \in f(A) = b(A) \subseteq \mathfrak{B},$$

что невозможно. Следовательно, $A \cong Z_p$. Поскольку $P \nsubseteq \Phi(G)$, то $G = [P]L$. Покажем, что $G_{\varphi(Z_p)} = P$. С одной стороны, $P \in \mathfrak{N}_p \subseteq \varphi(Z_p)\mathfrak{N}_p = \varphi(Z_p)$ и $P \subseteq G_{\varphi(Z_p)}$. С другой стороны, $P = F_{Z_p}(G)$. Действительно, пусть $F_{Z_p}(G) \cap L = L_1 \neq 1$. Тогда $L_1 \subseteq C_G(P)$ и поэтому $P \subseteq N_G(L_1)$. Кроме того, $L \subseteq N_G(L_1)$, и следовательно, $N_G(L_1) = G$, что, в силу монолитичности группы G, невозможно. Поэтому $L_1 = 1$ и $P = F_{Z_p}(G) = G_{\varphi_3(A)}$. Так как $\varphi \leqslant \varphi_3$, то $G_{\varphi(A)} \subseteq P$. Таким образом, $P = G_{\varphi(Z_p)}$. Отсюда получаем, что $G/P = G/G_{\varphi(Z_p)} \in f(Z_p) = b(Z_p)$ и по следствию 3 из [10] $G \in \mathfrak{N}_p b(Z_p) \subseteq \mathfrak{B}$. Получаем противоречие. Следовательно, $b(Z_p) \subset f(Z_p)$, и ввиду $h(Z_p)$-критичности формации $f(Z_p)$ справедливо включение $b(Z_p) \subseteq h(Z_p)$. Тем самым установлено, что $b(A) \subseteq h(A)$ для всех $A \in \Omega$.

Покажем, что $b(\Omega') \subseteq h(\Omega')$. Если $K(P) \subseteq \Omega$, то $P \subseteq O_\Omega(G)$ и

$$b(\Omega') \subseteq f(\Omega') = \mathrm{form}(G/O_\Omega(G)) = \mathrm{form}((G/P)/(O_\Omega(G)/P)) \subseteq \mathfrak{H} = h(\Omega').$$

Пусть $K(P) \nsubseteq \Omega$. Предположим, что $b(\Omega') = f(\Omega')$. Поскольку $P \nsubseteq O_\Omega(G)$, то $O_\Omega(G) = 1$ и $G \in \mathrm{form}\, G = \mathrm{form}(G/O_\Omega(G)) = f(\Omega') = b(\Omega') \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Следовательно, $b(\Omega') \subset f(\Omega')$, и поэтому $b(\Omega') \subseteq h(\Omega')$. Это означает, что $b \leqslant h$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Тем самым установлено, что формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega\varphi}$-критической. Лемма доказана.

Следующее утверждение является следствием леммы 4.

Лемма 5. *Пусть h — максимальный внутренний спутник непустой расслоенной формации $\mathfrak{H}$ с br-направлением φ таким, что $\varphi \leqslant \varphi_3$, f — минимальный спутник расслоенной формации $\mathfrak{F}$ с направлением φ. Пусть $\mathfrak{F} = F(G, \varphi)$, где G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}} \nsubseteq A(G)$ и формация $f(A)$ является $h(A)$-критической для $A \in K(P)$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_\varphi$-критической.*

Напомним, что формационно критическая группа G называется f-базисной, если формация $\operatorname{form} G$ обладает единственной максимальной подформацией [7]. Формационно критическую группу G назовем $\Omega\varphi$-базисной (φ-базисной), если формация $\Omega F(G,\varphi)$ (формация $F(G,\varphi)$) содержит единственную максимальную Ω-расслоенную (расслоенную) подформацию с направлением φ.

Лемма 6. *Пусть G — монолитическая группа с неабелевым монолитом P и $K(P) \subseteq \Omega$. Тогда группа G является $\Omega\varphi$-базисной, где φ — r-направление, удовлетворяющее условию $\varphi \leqslant \varphi_3$.*

Доказательство. Пусть f — минимальный Ω-спутник формации $\mathfrak{F} = \Omega F(G,\varphi)$, $\mathfrak{H} = \Omega F(h,\varphi)$, где h — такая ΩF-функция, что $h(\Omega') = \operatorname{form}(G/O_\Omega(G))$, $h(A) = \operatorname{form}(G/P)$, если A принадлежит $K(P)$, $h(A) = \operatorname{form}(G/G_{\varphi(A)})$ для всех $A \in (\Omega \cap K(G)) \setminus K(P)$ и $h(A) = \varnothing$, если A принадлежит $\Omega \setminus K(G)$. Поскольку φ есть r-направление, согласно теореме 5 в [9], $f(A) = h(A)$ для всех $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus K(P))$. Пусть $A \in K(P)$. Так как $\varphi \leqslant \varphi_3$, то $G_{\varphi(A)} \subseteq G_{\varphi_3(A)} = O_{A'}(G)$, и поэтому $P \nsubseteq G_{\varphi(A)}$. Следовательно, $f(A) = \operatorname{form}(G/G_{\varphi(A)}) = \operatorname{form} G$. Тогда $h \leqslant f$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Согласно лемме 18.2 из [13] $h(A) = \operatorname{form}(G/P) \subset f(A)$ для $A \in K(P)$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{H}$ — единственная максимальная Ω-расслоенная подформация с направлением φ из $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{B}$ — собственная Ω-расслоенная подформация с направлением φ из $\mathfrak{F}$, b — ее минимальный Ω-спутник. Согласно следствию 5.1 из [9] $b \leqslant f$. Тогда для всех $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus K(P))$ справедливо равенство $b(A) \subseteq f(A) = h(A)$. Пусть $A \in K(P)$. Предположим, что $b(A) = f(A)$. Тогда $G \in \operatorname{form} G = b(A) \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Поэтому $b(A) \subset f(A)$. По лемме 18.2 из [13], $b(A) \subseteq \operatorname{form}(G/P) = h(A)$. Таким образом, $b \leqslant h$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{H}$ — единственная максимальная Ω-расслоенная подформация с направлением φ из $\mathfrak{F}$. Ввиду следствия 52.34 из [18], группа G является критической, а значит, и формационно критической. Тем самым доказано, что G — $\Omega\varphi$-базисная группа. Лемма доказана.

Следующее утверждение является следствием предыдущей леммы.

Лемма 7. *Пусть G — монолитическая группа с неабелевым монолитом P. Тогда группа G является φ-базисной, где φ — r-направление, удовлетворяющее условию $\varphi \leqslant \varphi_3$.*

Лемма 8. *Пусть $G = [P]H$ — монолитическая группа с монолитом P, где $P = C_G(P)$ — p-группа, $Z_p \in \Omega$, H — f-базисная группа. Тогда группа G является $\Omega\varphi$-базисной, где φ — br-направление, удовлетворяющее условию $\varphi \leqslant \varphi_3$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — максимальная подформация формации $\operatorname{form} H$, f — минимальный Ω-спутник формации $\mathfrak{F} = \Omega F(G,\varphi)$, $\mathfrak{H} = \Omega F(h,\varphi)$, где h — такая ΩF-функция, что $h(\Omega') = \operatorname{form}(G/O_\Omega(G))$, $h(Z_p) = \mathfrak{M}$, $h(A) = \operatorname{form}(G/G_{\varphi(A)})$ для всех $A \in (\Omega \cap K(G)) \setminus (Z_p)$ и $h(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \setminus K(G)$. Согласно теореме 5 в [9], $f(A) = h(A)$ для всех $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus (Z_p))$ и $f(Z_p) = \operatorname{form}(G/G_{\varphi(Z_p)})$. Поскольку φ — b-направление, то $\varphi(Z_p)\mathfrak{N}_p = \varphi(Z_p)$ и $P \subseteq G_{\varphi(Z_p)}$. С другой стороны, из того, что $\varphi \leqslant \varphi_3$ и $P = C_G(P)$ получаем, что $G_{\varphi(Z_p)} \subseteq F_{Z_p}(G) \subseteq C_G(P) = P$. Таким образом, $G_{\varphi(Z_p)} = P$ и $f(Z_p) = \operatorname{form} H$. Из строения Ω-спутника h следует, что $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{H}$ — единственная максимальная Ω-расслоенная подформация с направлением φ из $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{B}$ — собственная Ω-расслоенная подформация с направлением φ из $\mathfrak{F}$, b — ее минимальный Ω-спутник. Согласно следствию 5.1 из [9], $b \leqslant f$. Тогда для всех

$A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus (Z_p))$ справедливо равенство $b(A) \subseteq f(A) = h(A)$. Предположим, что $b(Z_p) = f(Z_p)$. Тогда $G/G_{\varphi(Z_p)} \in b(Z_p)$ и, в силу равенства $G_{\varphi(Z_p)} = P$ и следствия 3 из [10], $G \in \mathfrak{N}_p b(Z_p) \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Поэтому $b(Z_p) \subset f(Z_p) = \operatorname{form} H$ и по условию $b(Z_p) \subseteq \mathfrak{M} = h(Z_p)$. Таким образом, $b \leqslant h$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{H}$ — единственная максимальная Ω-расслоенная подформация с направлением φ из $\mathfrak{F}$. По теореме 53.44 из [18] группа G является критической, а значит, и формационно критической. Тем самым установлено, что G — $\Omega\varphi$-базисная группа. Лемма доказана.

Следствием этой леммы является следующее утверждение.

Лемма 9. *Пусть $G = [P]H$ — монолитическая группа с монолитом $P = C_G(P)$, H — f-базисная группа. Тогда группа G является φ-базисной, где φ — br-направление, удовлетворяющее условию $\varphi \leqslant \varphi_3$.*

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{H}$ — непустая Ω-расслоенная формация с br-направлением φ таким, что $\varphi \leqslant \varphi_3$, h — ее максимальный внутренний Ω-спутник. Ω-расслоенная формация $\mathfrak{F}$ с направлением φ является $\mathfrak{H}_{\Omega\varphi}$-критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \Omega F(G, \varphi)$, где G — такая $\Omega\varphi$-базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из следующих условий:*

(1) *$G = P$ — группа простого порядка p такого, что $Z_p \in \Omega$;*

(2) *$G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ — P-группа, $Z_p \in \Omega$, H — f-базисная группа с монолитом $Q = H^{h(Z_p)}$ и максимальная подформация из $\operatorname{form} H$ содержится в $h(Z_p)$;*

(3) *P — неабелева группа, $K(P) = (A) \subseteq \Omega$ и $P = G^{h(A)}$;*

(4) *G — f-базисная группа, $K(P) \nsubseteq \Omega$, $P = G^{h(\Omega')}$ и максимальная подформация из $\operatorname{form} G$ содержится в $h(\Omega')$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть f — минимальный Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. По лемме 2 $\mathfrak{F} = \Omega F(G, \varphi)$, где G — монолитическая группа из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем при $K(P) = (A) \subseteq \Omega$ формация $f(A)$ является $h(A)$-критической, а при $K(P) \nsubseteq \Omega$ формация $f(\Omega')$ является $h(\Omega')$-критической. По теореме 5 в [9] $f(\Omega') = \operatorname{form}(G/O_\Omega(G))$, $f(A) = \operatorname{form}(G/G_{\varphi(A)})$ для всех $A \in \Omega \cap K(G)$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \setminus K(G)$. По лемме 1 $h(A) = \mathfrak{H}$ для любого $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus \mathfrak{A})$ и для любого $Z_p \in \Omega$ справедливо равенство $h(Z_p) = \mathfrak{N}_p h_1(Z_p)$, где h_1 — произвольный внутренний Ω-спутник формации $\mathfrak{H}$.

Пусть $K(P) = (A) \subseteq \Omega$. Если A является неабелевой группой, то $h(A) = \mathfrak{H}$ и $P = G^{\mathfrak{H}} = G^{h(A)}$. По лемме 6 группа G является $\Omega\varphi$-базисной и $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (3).

Пусть $A \cong Z_p$. Рассмотрим случай, когда $Z_p \notin K(\mathfrak{H})$. Так как $Z_p \in K(G)$, то $f(Z_p) \neq \varnothing$, и ввиду следствия 3 из [10] $P \in \mathfrak{N}_p f(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $\Omega F(P, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\Omega F(P, \varphi) \subset \mathfrak{F}$, то $\Omega F(P, \varphi) \subseteq \mathfrak{H}$ и $Z_p \in K(\mathfrak{H})$, что невозможно. Поэтому $\Omega F(P, \varphi) = \mathfrak{F}$, и можем считать, что $G = P$.

Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$. Как отмечено выше, $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$. Проверим, что $\mathfrak{N}_p$ есть Ω-расслоенная формация с направлением φ. Пусть $\mathfrak{T} = \Omega F(t, \varphi)$, где $t(Z_p) = (1)$, $t(Q) = \varnothing$ для всех $Q \in \Omega \setminus (Z_p)$ и $t(\Omega') = \mathfrak{N}_p$. Покажем, что $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{T}$. С одной стороны, если $A \in \mathfrak{N}_p$, то, ввиду равенства $\varphi(Z_p)\mathfrak{N}_p = \varphi(Z_p)$, справедливо включение $A \in \mathfrak{N}_p \subseteq \varphi(Z_p)$, и значит, $A/A_{\varphi(Z_p)} = 1 \in t(Z_p)$. Кроме того, $A/O_\Omega(A) \in \mathfrak{N}_p = t(\Omega')$. Следовательно,

$A \in \mathfrak{T}$, и поэтому $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{T}$. Допустим, что $\mathfrak{N}_p \subset \mathfrak{T}$ и B — группа минимального порядка из $\mathfrak{T} \setminus \mathfrak{N}_p$. Тогда группа B монолитична с монолитом $C = B^{\mathfrak{N}_p}$. Если найдется такая группа $Q \in (\Omega \cap K(B)) \setminus (Z_p)$, то из $B \in \mathfrak{T}$ получим соотношение $B/B_{\varphi(Q)} \in t(Q) = \varnothing$, что невозможно. Следовательно, $K(B) \cap \Omega = (Z_p)$. Предположим, что $C \nsubseteq O_\Omega(B)$. Тогда из $B \in \mathfrak{T}$ получим, что $B \cong B/O_\Omega(B) \in t(\Omega') = \mathfrak{N}_p$. Получаем противоречие. Поэтому $C \subseteq O_\Omega(B)$, и значит, $K(C) \subseteq \Omega \cap K(B) = (Z_p)$. Из $C \in \mathfrak{N}_p$ и $B/C \in \mathfrak{N}_p$ следует, что $B \in \mathfrak{N}_p$. Получаем противоречие. Тем самым установлено, что $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{T}$. Поскольку $\mathfrak{N}_p$ — Ω-расслоенная формация с направлением φ и $P \in \mathfrak{N}_p$, справедливо соотношение $\mathfrak{F} = \Omega F(P, \varphi) \subseteq \mathfrak{N}_p$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$. Пусть $\mathfrak{B} \neq \varnothing$ — собственная Ω-расслоенная подформация с направлением φ из $\mathfrak{F}$, b — ее минимальный Ω-спутник. Тогда $K(\mathfrak{B}) \subseteq K(\mathfrak{F}) = (Z_p)$. Допустим, что $K(\mathfrak{B}) = (Z_p)$. По теореме 5 из [9] $b(Z_p) \neq \varnothing$ и в силу следствия 3 из [10] справедливо соотношение $P \in \mathfrak{N}_p b(Z_p) \subseteq \mathfrak{B}$. Отсюда, $\mathfrak{F} = \Omega F(P, \varphi) \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Следовательно, $K(\mathfrak{B}) \subset (Z_p)$. Ввиду $\mathfrak{B} \neq \varnothing$, приходим к тому, что $\mathfrak{B} = (1)$ — единственная максимальная Ω-расслоенная подформация с направлением φ из $\mathfrak{F}$. Согласно следствию 51.34 из [18] группа P является формационно критической. Таким образом, $G = P$ — $\Omega\varphi$-базисная группа и формация $\mathfrak{F}$ в этом случае удовлетворяет условию (1).

Пусть $Z_p \in K(\mathfrak{H})$ и H — группа наименьшего порядка из $f(Z_p) \setminus h(Z_p)$. Тогда группа H является монолитичной с монолитом $Q = H^{h(Z_p)}$. Если $Q \in \mathfrak{N}_p$, то $H \in \mathfrak{N}_p h(Z_p) = h(Z_p)$, что невозможно. Следовательно, $O_p(H) = 1$ и по лемме 18.8 из [13] существует точный неприводимый $F_p[H]$-модуль K. Пусть $T = [K]H$. Тогда группа T монолитична с монолитом $K = C_T(K)$. По следствию 3 из [10] $T \in \mathfrak{N}_p f(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}$ и $\Omega F(T, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Покажем, что $T_{\varphi(Z_p)} = K$. Действительно, поскольку φ есть b-направление, то $K \in \mathfrak{N}_p \subseteq \varphi(Z_p)\mathfrak{N}_p = \varphi(Z_p)$ и $K \subseteq T_{\varphi(Z_p)}$. С другой стороны, $T_{\varphi(Z_p)} \subseteq T_{\mathfrak{G}_{cZ_p}} = F_{Z_p}(T) \subseteq C_T(K) = K$. Таким образом, $T_{\varphi(Z_p)} = K$. Если $\Omega F(T, \varphi) \subset \mathfrak{F}$, то $\Omega F(T, \varphi) \subseteq \mathfrak{H}$ и $H \cong T/T_{\varphi(Z_p)} \in h(Z_p)$. Получаем противоречие. Следовательно, $\Omega F(T, \varphi) = \mathfrak{F}$. Тогда $f(Z_p) = \mathrm{form}(T/T_{\varphi(Z_p)}) = \mathrm{form}\, H$.

Покажем, что H — f-базисная группа. Пусть $\mathfrak{X}$ — множество всех тех собственных секций группы H, которые принадлежат формации $f(Z_p) = \mathrm{form}\, H$. В силу выбора H получаем, что $\mathfrak{X} \subseteq h(Z_p)$. Поэтому $H \notin \mathrm{form}\, \mathfrak{X}$, и значит, H является формационно критической группой. Согласно лемме 3.3 из [13], формация form H обладает максимальными подформациями. Допустим, что $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — различные максимальные подформации из form $H = f(Z_p)$. Тогда, в силу $h(Z_p)$-критичности формации $f(Z_p)$, получаем включения $\mathfrak{M}_1 \subseteq h(Z_p)$, $\mathfrak{M}_2 \subseteq h(Z_p)$, и следовательно, и $f(Z_p) = \mathrm{form}(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) \subseteq h(Z_p)$. Получаем противоречие. Следовательно, формация $f(Z_p) = \mathrm{form}\, H$ обладает единственной максимальной подформацией $\mathfrak{M}$, причем $\mathfrak{M} \subseteq h(Z_p)$. Тем самым установлено, что H является f-базисной группой. По лемме 8 T — $\Omega\varphi$-базисная группа, и значит, формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (2).

Пусть $K(P) \nsubseteq \Omega$. Тогда $f(\Omega') = \mathrm{form}\, G$, $h(\Omega') = \mathfrak{H}$, и значит, формация $f(\Omega')$ является $\mathfrak{H}$-критической. Пусть S — группа минимального порядка из $f(\Omega') \setminus \mathfrak{H}$. Тогда группа S монолитична с монолитом $R = S^{\mathfrak{H}} = S^{h(\Omega')}$ и $f(\Omega') = \mathrm{form}\, S$. Так как $f(\Omega') \subseteq \mathfrak{F}$, то $S \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Из $\Omega F(S, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$ и $\Omega F(S, \varphi) \nsubseteq \mathfrak{H}$ получаем, что $\mathfrak{F} = \Omega F(S, \varphi)$, и поэтому в качестве G можно выбрать группу S. Кроме того, можем считать, что $K(R) \nsubseteq \Omega$. Покажем, что S — f-базисная группа. Пусть $\mathfrak{D}$ — множество всех тех собственных секций группы S, которые принадлежат $\mathrm{form}\, S = f(\Omega')$. В силу выбора группы S справедливо включение $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{H}$, и поэтому $S \notin \mathrm{form}\, \mathfrak{D}$. Следовательно, группа S является формационно критической. По лемме 3.3 из [13] формация $\mathrm{form}\, S$ имеет максимальные подформации. Если $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — различные максимальные подформации из $\mathrm{form}\, S$, то в силу $\mathfrak{H}$-критичности формации $f(\Omega') = \mathrm{form}\, S$, получим соотношение $f(\Omega') = \mathrm{form}(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) \subseteq \mathfrak{H}$, что невозможно. Следовательно, формация $\mathrm{form}\, S$ обладает единственной максимальной подформацией $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} = h(\Omega')$, и значит, группа S является f-базисной. Ввиду теоремы 5 и следствия 5.1 из [9] формация $\mathfrak{F} = \Omega F(S, \varphi)$ содержит лишь конечное множество Ω-расслоенных подформаций с направлением φ. Допустим, что $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — различные максимальные Ω-расслоенные подформации с направлением φ из $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{H}$, а значит, и $\mathfrak{F} = \Omega F((\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2), \varphi) \subseteq \mathfrak{H}$, что невозможно. Поэтому $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2$, и S является $\Omega\varphi$-базисной группой. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (4).

Докажем достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega F(G, \varphi)$, где G является $\Omega\varphi$-базисной группой с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ одного из типов (1)-(4).

Пусть G является группой типа (1). Покажем, что формация $f(Z_p)$ является $h(Z_p)$-критической. Так как $G \in \mathfrak{N}_p \subseteq \varphi(Z_p)\mathfrak{N}_p = \varphi(Z_p)$, то $G = G_{\varphi(Z_p)}$, и поэтому $f(Z_p) = \mathrm{form}(G/G_{\varphi(Z_p)}) = (1)$. Если $h(Z_p) \neq \varnothing$, то согласно следствию 3 из [10] $G = P \in \mathfrak{N}_p h(Z_p) \subseteq \mathfrak{H}$, что невозможно. Следовательно, $h(Z_p) = \varnothing$. Тогда формация $f(Z_p)$ является формация $h(Z_p)$-критической и по лемме 4 формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega\varphi}$-критической.

Пусть G — группа типа (2). Так как $P \in \mathfrak{N}_p \subseteq \varphi(Z_p)\mathfrak{N}_p = \varphi(Z_p)$, то $P \subseteq G_{\varphi(Z_p)}$. С другой стороны, из $\varphi \leqslant \varphi_3$ следует, что $G_{\varphi(Z_p)} \subseteq G_{\varphi_3(Z_p)} = F_{Z_p}(G) \subseteq C_G(P) = P$. Таким образом, справедливы равенства $G_{\varphi(Z_p)} = P$ и $f(Z_p) = \mathrm{form}(G/P) = \mathrm{form}\, H$. Поскольку $H^{h(Z_p)} = Q \neq 1$, то $H \notin h(Z_p)$, и поэтому $f(Z_p) \nsubseteq h(Z_p)$. Так как единственная максимальная подформация из $f(Z_p)$ содержится в $h(Z_p)$, формация $f(Z_p)$ является $h(Z_p)$-критической, и по лемме 4 формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega\varphi}$-критической.

Пусть теперь G — группа типа (3) и $A \in K(P)$. Поскольку $G^{h(A)} = P \neq 1$, то $f(A) = \mathrm{form}\, G \nsubseteq h(A)$. Согласно лемме 18.2 из [13] $\mathrm{form}(G/P) = \mathrm{form}(G/G^{h(A)})$ — единственная максимальная подформация из $f(A)$. Таким образом, формация $f(A)$ является $h(A)$-критической и по лемме 4 формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega\varphi}$-критической.

Если G — группа типа (4), то $O_\Omega(G) = 1$ и $f(\Omega') = \mathrm{form}\, G \nsubseteq \mathfrak{H} = h(\Omega')$. Так как единственная максимальная подформация из $f(\Omega')$ содержится в $h(\Omega')$, то $f(\Omega')$ — $h(\Omega')$-критическая формация и по лемме 4 формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega\varphi}$-критической. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{H}$ — непустая расслоенная формация с br-направлением φ таким, что $\varphi \leqslant \varphi_3$, h — ее максимальный внутренний спутник. Расслоенная формация $\mathfrak{F}$ с направлением φ является $\mathfrak{H}_\varphi$-критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = F(G, \varphi)$, где G — такая φ-базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из следующих условий:*

(1) *$G = P$ — группа простого порядка p;*

(2) *$G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ — p-группа, H — f-базисная группа с монолитом $Q = H^{h(Z_p)}$ и максимальная подформация из* $\mathrm{form}\, H$ *содержится в $h(Z_p)$;*

(3) *P — неабелева группа и $P = G^{h(A)}$ для $A \in K(P)$.*

Замечание 1. Направление φ_3 Ω-композиционной формации является br-направлением. Поэтому теорема 1 дает описание строения критических Ω-композиционных формаций. Отметим, что формацию $\Omega F(G, \varphi_3)$ удобно обозначать через $\Omega CF(G)$, а $\Omega\varphi_3$-базисную группу называть Ωc-базисной группой.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{H}$ — непустая Ω-композиционная формация, h — ее максимальный внутренний Ω-спутник. Ω-композиционная формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega c}$-критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \Omega CF(G)$, где G — такая Ωc-базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из следующих условий:*

(1) *$G = P$ — группа простого порядка p такого, что $Z_p \in \Omega$;*

(2) *$G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ — p-группа, $Z_p \in \Omega$, H — f-базисная группа с монолитом $Q = H^{h(Z_p)}$ и максимальная подформация из* form *H содержится в $h(Z_p)$;*

(3) *P — неабелева группа, $K(P) = (A) \subseteq \Omega$ и $P = G^{h(A)}$;*

(4) *G — f-базисная группа, $K(P) \nsubseteq \Omega$, $P = G^{h(\Omega')}$ и максимальная подформация из* form *G содержится в $h(\Omega')$.*

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{H}$ — непустая композиционная формация, h — ее максимальный внутренний спутник. Композиционная формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_c$-критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = CF(G)$, где G — такая c-базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из следующих условий:*

(1) *$G = P$ — группа простого порядка;*

(2) *$G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ — p-группа, H — f-базисная группа с монолитом $Q = H^{h(Z_p)}$ и максимальная подформация из* form *H содержится в $h(Z_p)$;*

(3) *P — неабелева группа и $P = G^{h(A)}$ для $A \in K(P)$.*

Замечание 2. Через φ_2 обозначается направление Ω-биканонической формации, то есть φ_2 — такая FR-функция, что $\varphi_2(A) = \mathfrak{G}_{A'}$ для любой неабелевой группы $A \in \mathfrak{I}$ и $\varphi_2(A) = \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{I}$ (см. [10]). Очевидно, что φ_2 есть br-направление и $\varphi_2 \leqslant \varphi_3$. Поэтому в качестве следствия из теоремы 1 получаем описание строения минимальных Ω-биканонических не $\mathfrak{H}$-формаций ([11], теорема 4).

Список литературы

1. Шеметков Л. А., Экраны ступенчатых формаций. В сб.: *Труды VI Всесоюзного Симпозиума по теории групп.* Наукова думка, Киев, 1980, с. 37–50.

2. Скиба А. Н., О критических формациях. В сб.: *Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры.* ИМ АН Украины, Киев, 1993, с. 250–268.

3. Селькин В. М., Скиба А. Н., О $\mathfrak{H}_{\Theta}\omega$-критических формациях. В сб.: *Вопросы алгебры.* ГГУ, Гомель, 1999, вып. 14, с. 127–131.

4. Сафонова И. Н., О минимальных ω-локальных не $\mathfrak{H}$-формациях. *Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук* (1999) №2, 23–27.

5. Ведерников В. А., Сорокина М. М., *Композиционные и локальные наследственные критические формации.* Деп. ВИНИТИ 8.01.98, №25–В98, 1–19.

6. Сорокина М. М., О композиционных и локальных критических формациях. *Известия вузов. Математика* (2000) №7, 1–8.

7. Ведерников В. А., Коптюх Д. Г., *Частично композиционные формации групп.* Препринт БГПУ, Брянск, 1999, с. 1–28.

8. Ведерников В. А., Сорокина М. М., ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Математические заметки* (2002) **71**, №1, 43–60.

9. Ведерников В. А., Сорокина М. М., Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Дискретная математика* (2001) **13**, №3, 125–144.

10. Vedernikov V. A., Maximal satellites of Ω-foliated formations and Fitting classes. *Proc. Steklov Inst. Math.* (2001) **2**, 217–233.

11. Сорокина М. М., Силенок Н. В., Критические Ω-расслоенные формации конечных групп. *Математические заметки* (2002) **72**, №2, 269–282.

12. Шеметков Л. А., *Формации конечных групп.* Наука, Москва, 1978.

13. Шеметков Л. А., Скиба А. Н., *Формации алгебраических систем.* Наука, Москва, 1989.

14. Скиба А. Н., *Алгебра формаций.* Беларуская навука, Минск, 1997.

15. Doerk K., Hawkes T., *Finite soluble groups.* de Gruyter, Berlin, 1992.

16. Скиба А. Н., Шеметков Л. А., О минимальном композиционном экране композиционной формации. *Вопросы алгебры* (1992) **7**, 39–43.

17. Ведерников В. А., О некоторых классах конечных групп. *ДАН БССР* (1988) **32**, №10, 872–875.

18. Нейман Х., *Многообразия групп.* Мир, Москва, 1969.

Статья поступила 17.05.2004.