МАРТ 1983 г., ТОМ XIX, № 3

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.983

Н. Ю. БАКАЕВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. В настоящей заметке изучается операторное уравнение вида

$$A^{-\xi}u = f,\ \xi > 0, \tag{1}$$

в банаховом пространстве E с оператором A, удовлетворяющим следующим условиям: (a) A — линейный замкнутый оператор; (b) область определения $D(A)$ оператора A плотна в E; (c) A является слабо позитивным оператором [1], т. е. имеет место оценка

$$\|R(-s, A)\|_E \leqslant \frac{M}{d+s},\ \forall s \geqslant 0,\ M,\ d - \mathrm{const} > 0.$$

Для таких операторов определены произвольные дробные степени $A^{-\xi}$, $\xi \geqslant 0$ [2], являющиеся ограниченными операторами в E, и поэтому уравнение (1) имеет смысл при произвольных $\xi \geqslant 0$.

2. Задача решения уравнения (1), вообще говоря, некорректно поставлена [3]. Исходя из того, что семейство операторов $\{A^{-\xi}\}$, $\xi \geqslant 0$, является однопараметрической полугруппой класса (C_0) [2], будем строить регуляризующий алгоритм [3] решения уравнения (1), следуя работе [4], в виде

$$u_\eta = \exp\left\{\frac{\xi}{\eta}[I - A^{-\eta}]\right\} f,\ 0 < \eta \leqslant \eta_0. \tag{2}$$

Главную роль при установлении регуляризующих свойств алгоритма (2) играет

Теорема 1. *Для любого $\tau > 0$ имеет место равномерная по η, $0 < \eta \leqslant \eta_0$ и ξ, $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0$ оценка*

$$\left\|\exp\left\{\frac{\xi}{\eta}[I - A^{-\eta}]\right\} A^{-(\xi+\tau)}\right\|_E \leqslant C(\xi_0, \eta_0, \tau),$$

где $C(\xi_0, \eta_0, \tau)$ — константа, зависящая только от ξ_0, η_0, τ.

Доказательство. Из условия слабой позитивности оператора A и из разложения его резольвенты в ряд Тейлора с центром разложения, размещенным на отрицательной вещественной полуоси, следует [2], что спектр оператора A заключен внутри сектора, образованного двумя лучами, исходящими из точки d вещественной оси и составляющими с ней углы $\pm\varphi$, где $\varphi = \pi - \arcsin\dfrac{1}{M}$.

Выберем такое $\delta > 0$, что $\varphi < \varphi + \delta \leqslant \pi$. Очевидно, найдется такое число η_1, $0 < \eta_1 \leqslant \eta_0$, что для всех η, $0 < \eta \leqslant \eta_1$, $\cos\eta(\varphi + \delta) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Рассмотрим сначала случай $\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_0$. При таких значениях η

$$\left\|\exp\left\{\frac{\xi}{\eta}[I - A^{-\eta}]\right\} A^{-(\xi+\tau)}\right\|_E \leqslant \exp\left\{\frac{\xi_0}{\eta_1}(1 + \|A^{-\eta}\|_E)\right\} \|A^{-(\xi+\tau)}\|_E.$$

Полугруппа $\{A^{-\zeta}\}$, $\zeta \geqslant 0$, является полугруппой отрицательного типа [2], следовательно, $\|A^{-\zeta}\|_E \leqslant C_1$, $\forall \zeta \geqslant 0$. Отсюда получаем при $\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_0$

$$\left\|\exp\left\{\frac{\xi}{\eta}[I - A^{-\eta}]\right\} A^{-(\xi+\tau)}\right\|_E \leqslant C_1 \exp\left\{\frac{\xi_0}{\eta_1}(1 + C_1)\right\} = C_2(\xi_0).$$

Для того чтобы провести оценку при $0 < \eta \leqslant \eta_1$, запишем

$$\exp\left\{\frac{\xi}{\eta}[I - A^{-\eta}]\right\} A^{-(\xi+\tau)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} \exp\left\{\frac{\xi}{\eta}[1 - \lambda^{-\eta}]\right\} \lambda^{-(\xi+\tau)} R(\lambda, A)\, d\lambda, \tag{3}$$

где контур Γ_ε состоит из двух лучей l_1 и l_2, исходящих соответственно из точек $\varepsilon \exp\{i(\varphi+\delta)\}$ и $\varepsilon \exp\{-i(\varphi+\delta)\}$ и составляющих с положительной вещественной полуосью углы $(\varphi+\delta)$ и $-(\varphi+\delta)$, и дуги окружности r_ε радиуса ε, соединяющей точки $\varepsilon \exp\{i(\varphi+\delta)\}$ и $\varepsilon \exp\{-i(\varphi+\delta)\}$. В качестве ε можно взять любое положительное число, меньшее d (см. рисунок).

Оценим норму интеграла в правой части равенства (3). Оценка для нормы интеграла по контуру Γ_ε очевидным образом получается через оценки норм интегралов по l_1, l_2 и r_ε. Нетрудно видеть, что каждый из интегралов по l_1 и l_2 оценивается величиной

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \exp\left\{\frac{\xi}{\eta}[1-s^{-\eta}\cos[\eta(\varphi+\delta)]-\eta\ln s]\right\}\frac{M_1(\delta)\,s^{-\tau}}{d+s}\,ds. \tag{4}$$

При этом мы учли, что на лучах l_1 и l_2 выполняется оценка $\|R(\lambda, A)\|_E \leqslant \dfrac{M_1(\delta)}{d+|\lambda|}$, $\lambda \in l_1, l_2$, где $M_1(\delta)$ — некоторая константа, вообще говоря, отличная от M. Проделывая несложные преобразования, получим для показателя экспоненты $Q(s)$ в интеграле (4) оценку

$$Q(s)=\frac{\xi}{\eta}[1-s^{-\eta}\cos[\eta(\varphi+\delta)]-\eta\ln s]=\frac{\xi}{\eta}\cos[\eta(\varphi+\delta)][1-s^{-\eta}-$$
$$-\eta\ln s]+\frac{\xi}{\eta}[1-\cos[\eta(\varphi+\delta)]]-\xi[1-\cos[\eta(\varphi+\delta)]]\ln s\leqslant$$
$$\leqslant 2\frac{\xi}{\eta}\sin^2\left[\frac{\eta(\varphi+\delta)}{2}\right]-\xi[1-\cos[\eta(\varphi+\delta)]]\ln s.$$

При этом мы воспользовались неравенством $1-s^{-\eta}-\eta\ln s\leqslant 0$ при $s, \eta>0$. Выражение $-\xi[1-\cos[\eta(\varphi+\delta)]]\ln s$ неположительно, если $\varepsilon\geqslant 1$, и оценивается сверху величиной $\xi_0\ln\dfrac{1}{\varepsilon}$ при $\varepsilon<1$.

Введя обозначение $C_3=\begin{cases}0, & \varepsilon\geqslant 1,\\ \xi_0\ln\dfrac{1}{\varepsilon}, & \varepsilon\leqslant 1,\end{cases}$ получаем

$$\left\|-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_1}\exp\left\{\frac{\xi}{\eta}[1-\lambda^{-\eta}]\right\}\lambda^{-(\xi+\tau)}R(\lambda, A)\,d\lambda\right\|_E\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\exp\{\xi_0\pi+C_3\}\frac{M_1(\delta)}{d+s}s^{-\tau}ds=C_4(\xi_0, \tau).$$

Аналогичная оценка справедлива и для интеграла по l_2. Нетрудно провести также оценку

$$\left\|-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{r_\varepsilon}\exp\left\{\frac{\xi}{\eta}[1-\lambda^{-\eta}]\right\}\lambda^{-(\xi+\tau)}R(\lambda, A)\,d\lambda\right\|_E\leqslant C_5(\xi_0, \eta_0, \tau).$$

Для этого достаточно заметить, что длина контура r_ε конечна и при $\lambda\in r_\varepsilon$ имеет место равенство $|\lambda|=\varepsilon$.

Таким образом, утверждение теоремы справедливо, если в качестве $C(\xi_0, \eta_0, \tau)$ взять $\max\{C_2(\xi_0), 2C_4(\xi_0, \tau)+C_5(\xi_0, \eta_0, \tau)\}$. Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть точное решение уравнения (1) принадлежит области значений оператора $A^{-\tau}$ при некотором $\tau>0$. Тогда алгоритм (2) является регуляризующим по Тихонову при $\eta\to 0$ для задачи решения уравнения (1).*

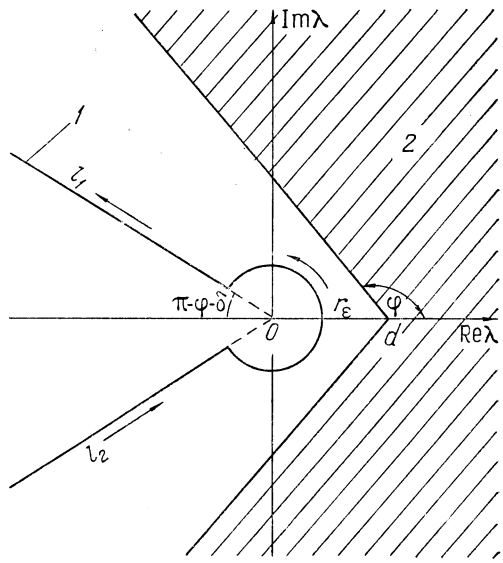

Рис. 1. *1* — контур Γ_ε; *2* — спектр оператора A

Доказательство с небольшими изменениями повторяет доказательство соответствующей теоремы в [5].

3. В условиях теоремы 2 предполагается принадлежность точного решения уравнения (1) некоторому множеству регуляризации, не совпадающему со всем пространством E. В этом пункте мы снимаем это ограничение.

Теорема 3. *Пусть оператор A удовлетворяет условиям (a) — (c) и является спектральным оператором скалярного типа [6]. Тогда алгоритм (2) является регуляризующим по Тихонову при $\eta \to 0$ для задачи решения уравнения (1) и множество регуляризации совпадает со всем пространством E.*

Доказательство. Рассуждениями, аналогичными проведенным при доказательстве теоремы 1, можно показать, что при $0 < \eta \leqslant \eta_0$, $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0$

$$\left| \exp\left\{ \frac{\xi}{\eta} [1 - \lambda^{-\eta}] \right\} \lambda^{-\xi} \right| \leqslant C(\xi_0, \eta_0), \ \forall \lambda \in \Lambda,$$

где $C(\xi_0, \eta_0)$ — константа, зависящая только от ξ_0 и η_0, а Λ — множество точек спектра оператора A. Поэтому имеет место оценка [6]

$$\left\| \exp\left\{ \frac{\xi}{\eta} [1 - A^{-\eta}] \right\} A^{-\xi} \right\|_E \leqslant \eta V C(\xi_0, \eta_0),$$

где V — полная вариация спектральной меры оператора A. Доказательство завершается так же, как и в теореме 2. Специальный случай, когда множество регуляризации совпадает со всем пространством E для уравнения вида (1), разобран в [5].

Литература

1. Соболевский П. Е.— Докл. АН СССР, 1966, т. 166, № 6, с. 1296—1299.
2. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.— М.: Наука, 1967.—464 с.
3. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1974.—224 с.
4. Тарасов Р. П.— Дифференц. уравнения , 1977, т. 13, № 10, с. 1804—1814.
5. Бакаев Н. Ю., Тарасов Р. П.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 12, с. 2228—2237.
6. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 3 / Спектральные операторы.— М.: Мир, 1974.—664 с.

г. Москва

Поступила в редакцию 27 августа 1979 г.

УДК 517.977.5

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ СО СМЕНОЙ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

В. Г. Гребенников высказал автору соображения о целесообразности рассмотрения экономических моделей, в которых при достижении заданного уровня происходит «агрегирование» координат, т. е. переход к упрощенной модели. Например, в начальный (плановый) период учитывается производство нескольких типов легированной стали, а на заключительном (упреждающем) периоде эти координаты соединяются в одну, характеризующую общее производство стали. Таким образом, при переходе от планового периода к упреждающему происходит изменение числа координат, т. е. смена фазового пространства*.

Эти соображения приводят к следующей задаче оптимизации. Имеются два фазовых пространства X, Y соответственно переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, в которых движение управляемого объекта описывается дифференциальными включениями [2]:

$$\dot{x} \in F(x), \quad \dot{y} \in G(y). \tag{1}$$

В X заданы начальное многообразие M_0 и не пересекающаяся с ним «гиперповерхность перехода» Γ. Когда объект, движущийся по первому закону (1), достигает гиперповерхности Γ, происходит переход в пространство Y, заданный отображением $q: X \to Y$, и дальнейшее движение осуществляется в пространстве Y по второму закону (1). Наконец, в Y заданы конечное многообразие M_1 (не пересекающееся с множеством $q(\Gamma)$) и минимизируемая функция $F(y)$. Задача оптимизации заключается в том, чтобы найти траектории

$$x(t), \ t_0 \leqslant t \leqslant \theta; \ y(t), \ \theta \leqslant t \leqslant t_1, \tag{2}$$

* В развернутом виде эти соображения изложены в [1].