передается скачком, минуя события, лежащие в достаточно малой пространственно-временной области. Требование изотропности и однородности пространства заключается в условиях G1 и G2.

Теорема 6 представляет собой систему аксиом, определяющих геометрию пространства Минковского. Мы можем поэтому сделать важное заключение. Для того чтобы установить псевдоевклидовость геометрии пространства-времени, совсем не обязательно предполагать наличие причинно-следственных связей в области микроявлений. Таким образом, группа Лоренца – следствие причинных связей макромира, а структура микромира, в определенной мере, – лишь порождение этой фундаментальной симметрии пространства-времени.

Омский государственный университет

Поступило 12 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

[1] *А.Д. Александров*, Тр. МИАН, т. 128, 3 (1972). [2] *А.Д. Александров*, ДАН, т. 219, № 2, 265 (1974). [3] *А.Д. Александров*, ДАН, т. 189, № 4, 695 (1969).

УДК 519.21 МАТЕМАТИКА

В.А. ДМИТРОВСКИЙ

УСЛОВИЕ ОГРАНИЧЕННОСТИ И ОЦЕНКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМУМА СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ

(Представлено академиком А.Н. Колмогоровым 12 III 1980)

1. Пусть T – некоторое множество, $\xi(t)$ – случайное поле на нем. Пусть нам известны функции распределения абсолютных величин значений поля и его приращений:

$$F_t(u) = P\{|\xi(t)| \geqslant u\}, \quad G_{t,s}(u) = P\{|\xi(t) - \xi(s)| \geqslant u\}.$$

В работе даются достаточные условия для ограниченности поля $\xi(t)$ на T с вероятностью 1 и его непрерывности в некоторой естественной для него топологии на множестве T. Приводится оценка распределения равномерной нормы поля $\|\xi\| = \sup\{|\xi(t)| \mid t \in T\}$. Кроме того, для гауссовских полей дается более точная оценка, которая в известных частных случаях (рассмотренных, например, в ([1])) асимптотически совпадает с точностью до постоянного множителя с функцией распределения нормы. Показывается, что для гауссовских полей приведенное достаточное условие ограниченности совпадает с известным условием Дадли–Ферника ([2]), т.е. является также и необходимым для однородных гауссовских полей на компактах в $\mathbf{R}^n$ ([3]).

Таким образом, несмотря на общность решаемой задачи, удается получить результаты, которые в некоторых частных случаях практически неулучшаемы.

2. Введем функции

$$F(u) = \sup\{F_t(u) \mid t \in T\}, \qquad G(u) = \sup\{G_{t,s}(u) \mid t \in T,\ s \in T\},$$

$$f(x) = \sup\{u \mid F(u) \geqslant x\}, \qquad g(x) = \sup\{u \mid G(u) \geqslant x\},$$

$$\rho(t, s) = \sup\{u[g(G_{t,s}(u))]^{-1} \mid u > 0\}.$$

Отметим некоторые свойства функции $\rho(t, s)$:

$$\rho(t, t) \equiv 0, \quad \rho(t, s) = \rho(s, t), \quad \sup\{\rho(t, s) \mid t \in T, s \in T\} = 1,$$

$$G_{t,s}(u) \leqslant G(u/\rho(t, s)).$$

Открытым шаром $B(t, \delta)$ радиуса δ с центром в точке t назовем множество

$$B(t, \delta) = \{s \mid s \in T, \rho(t, s) < \delta\}.$$

Приняв множество шаров $B(t, \delta)$, $t \in T$, $\delta > 0$, за базу топологии и отождествив те точки t и s, для которых $\rho(t, s) = 0$, получим топологическое пространство (T, ρ), удовлетворяющее первой аксиоме отделимости. Через $N(\epsilon)$ мы будем обозначать минимальное количество шаров радиуса ϵ, покрывающих все множество T (не исключается случай $N(\epsilon) = \infty$). Для любой функции $h(x)$, $x \in \mathbf{R}$, через $h^*(\lambda)$ будем обозначать преобразование Юнга–Фенхеля этой функции:

$$h^*(\lambda) = \sup\{\lambda x - h(x) \mid x \in \mathbf{R}\}, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Доопределим формально функции $f(x)$ и $g(x)$, положив $f(x) = g(x) = 0$ при $x \geqslant 1$, $f(x) = g(x) = \infty$ при $x \leqslant 0$. Тогда $f^*(\lambda) = g^*(\lambda) = \infty$ при $\lambda > 0$, $f^*(0) = g^*(0) = 0$, $f^*(\lambda)$ и $g^*(\lambda)$ неположительны и выпуклы при $\lambda \leqslant 0$. Обозначим

$$\Gamma(\lambda) = f^*(\lambda N(1)) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} g^*(\lambda 2^{k-1} N(2^{-k})), \qquad \gamma(\lambda) = \int_0^1 g^*\left(\frac{\lambda N(x)}{x}\right) dx.$$

3. Теорема 1. *Пусть $\gamma(-1) > -\infty$ и поле $\xi(t)$ сепарабельно относительно некоторого сепарабельного на (T, ρ) множества.*

Тогда поле ограничено на T с вероятностью 1.

Если к тому же функции $f(x)$ и $g(x)$ выпуклы, то для любых $\epsilon > 0$

$$P\{\|\xi\| \geqslant \Gamma^*(\epsilon)\} \leqslant \epsilon. \tag{1}$$

Заметим, что из конечности $\gamma(-1)$ вытекает конечность $N(\epsilon)$ для любых $\epsilon > 0$, а следовательно, предкомпактность и сепарабельность пространства (T, ρ). Поэтому условие сепарабельности поля в формулировке теоремы корректно. Далее, конечность $\gamma(-1)$ влечет за собой конечность $\gamma(\lambda)$ при любых $\lambda \leqslant 0$. Поэтому из легко проверяемого неравенства

$$\Gamma(\lambda) \geqslant f^*(\lambda N(1)) + 4\gamma(\lambda/2)$$

вытекает конечность $\Gamma(\lambda)$, $\lambda \leqslant 0$, и, следовательно, конечность $\Gamma^*(\epsilon)$ для любых $\epsilon > 0$.

Очевидно, что поле $\xi(t)$ стохастически непрерывно на пространстве (T, ρ). Следующее утверждение дает достаточное условие непрерывности $\xi(t)$ на (T, ρ) с вероятностью 1.

Теорема 2. *Пусть $\gamma(-1) > -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} \left[x g^*\left(\frac{N^2(x)}{x}\right)\right] = 0$, функции $f(x)$ и $g(x)$ выпуклы, функция $\rho(t, s)$ является метрикой на T, поле $\xi(t)$ сепарабельно относительно некоторого сепарабельного на (T, ρ) множества.*

Тогда поле непрерывно на (T, ρ) с вероятностью 1.

Замечание. Если $f(x)$ и $g(x)$ не являются выпуклыми функциями, то теоремы 1 и 2 можно переформулировать, заменив $f(x)$ и $g(x)$ их некоторыми выпуклыми мажорантами.

4. Пусть теперь $\xi(t)$ – гауссовское поле на параметрическом множестве T,

$$E\xi(t) \equiv 0, \quad \sup\{E\xi^2(t) \mid t \in T\} = 1,$$

$$\sup\{E(\xi(t) - \xi(s))^2 \mid t \in T, s \in T\} = \sigma^2. \tag{2}$$

Для него

$$\rho(t, s) = \sigma^{-1}\,[E(\xi(t) - \xi(s))^2]^{1/2}, \qquad f(x) = \varphi(x),$$

$$g(x) = \sigma\varphi(x), \qquad f^*(\lambda) = \varphi^*(\lambda), \qquad g^*(\lambda) = \sigma\varphi^*(\lambda/\sigma),$$

где $\varphi(x)$ – функция, обратная к $\Phi(u) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int\limits_a^\infty \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy$,

$$\varphi^*(\lambda) = \begin{cases} \infty & \text{при } 0 < \lambda, \\ \lambda & \text{при } -(\pi/2)^{1/2} \leqslant \lambda \leqslant 0, \\ \lambda\Phi((\ln(2\lambda^2/\pi))^{1/2}) - (\ln(2\lambda^2/\pi))^{1/2} & \text{при } \lambda < -(\pi/2)^{1/2}. \end{cases}$$

Поскольку $\varphi^*(\lambda) \geqslant -(\pi/2)^{1/2} - |\ln(2\lambda^2/\pi)|^{1/2}$, то условие конечности эквивалентно сходимости интеграла $\int\limits_0^1 [\ln N(x)]^{1/2}\,dx$. Мы получили условие Дадли–Ферника, из которого в силу теоремы 2 вытекает и непрерывность $\xi(t)$ на (T, ρ).

Для гауссовских полей удается получить более точную оценку сверху функции распределения нормы, нежели неравенство (1), а также и оценку снизу.

Обозначим через $N(t, \delta, \epsilon)$ минимальное количество шаров радиуса ϵ, покрывающих весь шар $B(t, \delta)$,

$$N(\delta, \epsilon) = \sup\{N(t, \delta, \epsilon) \mid t \in T\}, \qquad \Psi(\delta) = \int\limits_0^\delta [\ln N(x)]^{1/2}\,dx,$$

$$\psi(\delta) = \int\limits_0^\delta [\ln N(\delta, x)]^{1/2}\,dx.$$

Теорема 3. *Пусть для гауссовского поля $\xi(t)$ на T выполнено условие Дадли–Ферника и равенства* (2).

Тогда для всех $u \geqslant \max\{u_0, 1 + 9\Psi(\sigma^{-1})\}$

$$(3) \qquad \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\frac{1}{u}\left(1 - \frac{1}{u^2}\right)\exp\left\{-\frac{u^2}{2} + \theta(u)\right\} \leqslant P\{\|\xi\| \geqslant u\} \leqslant$$

$$\leqslant 6\,\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\,\frac{1}{u - 9\Psi(u^{-1/2})}\exp\left\{-\frac{u^2}{2} + \chi(u)\right\},$$

где

$$\chi(u) = \inf\{2u^2\delta^2 + \ln N(\delta\sigma^{-1}) + 4\sqrt{2}u\psi(\delta\sigma^{-1}) + \sqrt{2}u\delta \mid \delta < 1/2\},$$

$\theta(u)$ – *корень уравнения* $\theta = 8\ln N(\sqrt{\theta}/u\sigma)$,

$$u_0 = \sup\{x \mid \Psi(x^{-1/2}) \geqslant \sqrt{2}\sigma\}.$$

Заметим, что известные до сих пор оценки (см. ([3], [4])) менее точны, чем оценка (3).

Легко проверить, что в условиях теоремы 3

$$\chi(u) < 9u\Psi(u^{-1/2}),$$

откуда сразу следует, что

$$P\{\|\xi\| \geqslant u\} = \exp\left\{-\frac{u^2}{2} + u\cdot o(1)\right\}, \qquad u \to \infty.$$

Если же $\xi(t)$ – центрированный стационарный гауссовский процесс, $T = [0, 1]$, $E\xi(t)\xi(s) = 1 - |t - s|^\alpha + o(|t - s|^\alpha)$, $|t - s| \to 0$, $0 < \alpha \leqslant 2$, то из (3) вытекает, что

$$P\{\|\xi\| \geqslant u\} < (C + o(1))u^{2/\alpha - 1}\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}, \qquad u \to \infty,$$

2 1583

где $C = 6\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}(2\alpha e^7)^{1/\alpha}$. Как следует из работы ([1]), правая часть последнего неравенства асимптотически с точностью до постоянного множителя совпадает с функцией распределения нормы процесса.

В заключение автор выражает признательность Ю.К. Беляеву и И.Е. Островскому за ценные замечания и внимание к работе.

Обнинский филиал
Московского инженерно-физического института

Поступило
19 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ю.К. Беляев, В.И. Питербарг*, ДАН, т. 203, № 1, 9 (1972). [2] *R.M. Dudley*, J. Funct. Anal., v. 1, № 2, 290 (1967). [3] *X. Fernique*, Regularite des trajectories des fonction aleatories gaussiennes, Lectures Notes in Mathematics, № 480, Berlin, 1975. [4] *S.M. Berman*, Ann.Probab., v. 2, № 6, 8 (1974).

УДК 518.5 МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР Ю.Л. ЕРШОВ

КРАТНО НОРМИРОВАННЫЕ ПОЛЯ

Все нужные для дальнейшего сведения об элементарных теориях и нормированных полях можно найти в монографии ([1]). Однако напомним важнейшие для дальнейшего определения и результаты.

Пусть F – поле, R – кольцо нормирования поля F, т.е. такое подкольцо поля F, что для любого $x \in F^*$ (F^* – мультипликативная группа ненулевых элементов поля F) $x \in R$ или $x^{-1} \in R$; R является локальным кольцом, максимальный идеал которого обозначим $\mathfrak{m}(R)$; фактор-поле $R / \mathfrak{m}(R)$ – поле вычетов кольца R – будем обозначать F_R. Естественный гомоморфизм $R \to F_R$ будем обозначать чертой (если $\alpha \in R$, то $\bar{\alpha} \in F_R$ – образ α при этом гомоморфизме). Кольцо R определяет на поле F линейный предпорядок $\leqslant_R$: $a \leqslant_R b \rightleftharpoons bR \subseteq aR$, $a, b \in F$. Полагаем $a \equiv_R b$, если $a \leqslant_R b$ и $b \leqslant_R a$; $a <_R b$, если $a \leqslant_R b$ и $\neg(a \equiv_R b)$. Предпорядок $\leqslant_R$ индуцирует линейный порядок $\leqslant_R$ на фактор-группе F^* / R^*, где $R^* \rightleftharpoons R \setminus \mathfrak{m}(R) = \{a \mid a \in F,\ a \equiv_R 1\}$ – мультипликативная группа обратимых элементов кольца R. Линейно упорядоченную группу $\langle F^* / R^*, \leqslant_R \rangle$ будем называть группой нормирования и обозначать Γ_R. Гомоморфизм из F^* в Γ_R называется нормированием; будем обозначать его v_R.

Кольцо нормирования R называется p-адическим (p – простое число), если F – поле характеристики 0, $F_R = GF(p)$ – поле из p элементов, а $v_R(p)$ – наименьший положительный элемент группы Γ_R (здесь p рассматривается как элемент поля Q рациональных чисел и $Q \leqslant F$, так как F – поле характеристики 0).

Кольцо R (и нормированное поле $\langle F, R \rangle$) называется гензелевым, если для любого унитарного многочлена $f \in R[x]$, любого $\tilde{\alpha} \in F_R$ такого, что $\bar{f}(\tilde{\alpha}) = 0$, $\bar{f}'(\tilde{\alpha}) \neq 0$, в R существует элемент α такой, что $f(\alpha) = 0$ и $\bar{\alpha} = \tilde{\alpha}$ (здесь $\bar{f}$ – образ f при естественном гомоморфизме $R[x] \to F_R[x]$, а штрих означает формальную производную).

Замечание. Для дальнейшего следует указать, что для гензелевых колец нормирования справедливо следующее