В. А. Ведерников, М. М. Сорокина, Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп, *Дискрет. матем.*, 2001, том 13, выпуск 3, 125–144

DOI: 10.4213/dm299

Дискретная математика

том 13 выпуск 3 * 2001

УДК 519.542

Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп

© 2001 г. В. А. Ведерников, М. М. Сорокина

Предложен новый функциональный подход к исследованию классов групп, позволивший на языке функций описать все формации и классы Фиттинга конечных групп. Построены Ω-расслоенные формации $\Omega F(f, \varphi)$ и Ω-расслоенные классы Фиттинга $\Omega F(f, \varphi)$ со спутником f и направлением φ. Каждому спутнику f соответствует бесконечное множество различных направлений φ. Одно из направлений приводит к ранее рассмотренным Ω-композиционным формациям. На этом пути получены Ω-канонические и Ω-свободные формации и классы Фиттинга. При фиксированном направлении φ получено строение минимального спутника f.

1. Введение

Понятие формации было введено в 1963 году Гашюцем в [1], и уже в этой работе функциональные методы нашли применение в построении формаций. А именно, Гашюцем были введены локальные формации, занимающие центральное место в теории формаций. Дальнейшее развитие функциональный подход к изучению формаций нашел в работе Л. А. Шеметкова [2], в которой были определены ступенчатые, примарно постоянные, однородные и композиционные формации. Отметим, что композиционные формации были построены также Бэром (см. [3]), а Хартли в [4] определил локальные классы Фиттинга. В последние годы Л. А. Шеметковым и А. Н. Скибой интенсивно исследуются частично локальные (ω-локальные) формации и классы Фиттинга (см., например, [5, 6]). В [7, 8] независимо определены и исследованы Ω-композиционные формации с помощью Ω-композиционного спутника f, где Ω — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$ всех простых групп. Идея построения новых видов формаций и классов Фиттинга с помощью Ω-спутников привела к необходимости рассмотрения Ω-спутников различных направлений, причем направление Ω-спутника f определяется как отображение класса $\mathfrak{I}$ в множество всех непустых формаций Фиттинга. Ясно, что такие направления образуют бесконечное множество, и значит, для фиксированного класса Ω можно построить бесконечное множество новых видов формаций (Ω-расслоенных формаций).

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Приведем некоторые обозначения и определения, другие обозначения и определения, встречающиеся в статье, можно найти в книгах [9, 10]. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустое множество групп. Тогда $(\mathfrak{X})$ обозначает класс групп, порожденный $\mathfrak{X}$; в частности, (G) — класс всех групп, изоморфных группе G; $K(G)$ — класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G; $K(\mathfrak{X})$ — объединение классов $K(G)$ для всех $G \in \mathfrak{X}$. Пусть $\mathfrak{I}$ — класс всех простых конечных групп, Ω — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$. Если $K(G) \subseteq \Omega$, то G называется Ω-группой. Через $\mathfrak{G}_\Omega$ обозначают множество всех Ω-групп [7] и полагают что $1 \in \mathfrak{G}_\Omega$. Пусть $A \in \mathfrak{I}$. Тогда $\mathfrak{G}_A = \mathfrak{G}_{(A)}$, $A' = \mathfrak{I} \setminus (A)$. Главный фактор H/K группы G называется главным A-фактором, если $K(H/K) = (A)$. Через $F_A(G)$ обозначают пересечение централизаторов всех главных A-факторов группы G. Если в G нет главных A-факторов, то полагают $F_A(G) = G$ [11]. Запись $M \lhd G$ означает, что M является нормальной подгруппой группы G. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация (класс Фиттинга). Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-корадикал ($G_{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-радикал) группы G. Будем полагать

$$O_\Omega(G) = G_{\mathfrak{G}_\Omega}, \quad O^\Omega(G) = G^{\mathfrak{G}_\Omega}, \quad O_{\Omega',\Omega} = G_{\mathfrak{G}_{\Omega'}\mathfrak{G}_\Omega}, \quad O^{\Omega,\Omega'} = G^{\mathfrak{G}_\Omega\mathfrak{G}_{\Omega'}}.$$

Через $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ будем обозначать гашюцево произведение формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$, то есть класс всех таких групп G, для которых $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}$.

2. Ω-расслоенные формации

Определение 1. Функцию $f\colon \Omega \cup \{\Omega\}' \to \{$формации групп$\}$, принимающую одинаковые значения на изоморфных группах из Ω, назовем Ω-формационной функцией или, коротко, ΩF-функцией. Функцию $g\colon \mathfrak{I} \to \{$формации групп$\}$, принимающую одинаковые значения на изоморфных группах из $\mathfrak{I}$, назовем формационной функцией или, коротко, F-функцией. Функцию $\varphi\colon \mathfrak{I} \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$, принимающую одинаковые значения на изоморфных группах из $\mathfrak{I}$, назовем формационно-радикальной функцией или, коротко, FR-функцией.

Лемма 1. *Пусть f — ΩF-функция, φ — FR-функция и*

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} &= \Omega F(f, \varphi) \\ &= \{G \in \mathfrak{H} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\}.\end{aligned}$$

Тогда $\mathfrak{F}$ является формацией.

Доказательство. Пусть $g \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$. Так как

$$NO_\Omega(G)/N \cong O_\Omega(G)/(N \cap O_\Omega(G/N)) \in \mathfrak{G}_\Omega,$$

то $NO_\Omega(G)/N \subseteq O_\Omega(G/N) = R/N$. Поэтому

$$(G/N)/O_\Omega(G/N) \cong G/R \cong (G/O_\Omega(G))/(R/(R/O_\Omega(G)) \in f(\Omega').$$

Поскольку для любого $A \in \Omega \cap K(G/N)$ верно $NG_{\varphi(A)}/N \cong G_{\varphi(A)}/N \cap G_{\varphi(A)} \in \varphi(A)$, то $NG_{\varphi(A)}/N \subseteq (G/N)_{\varphi(A)}$ и

$$(G/N)/(G/N)_{\varphi(A)} \cong G/T \cong (G/G_{\varphi(A)})/(T/G_{\varphi(A)}) \in f(A)$$

для всех $A \in \Omega \cap K(G/N)$. Следовательно, $G/N \in \mathfrak{F}$.

Пусть $G/N_i \in \mathfrak{H}$, $i = 1, 2$. Покажем, что $G/D \in \mathfrak{F}$, где $D = N_1 \cap N_2$. Ясно, что G/D изоморфно подпрямому произведению групп G/N_1 и G/N_2. Поэтому существует такая группа T, что $T = K \times L$, H — подпрямое произведение групп K и L, причем $K \cong G/N_1$, $L \cong G/N_2$ и $H \cong G/D$. Так как $\mathfrak{G}_\Omega$ является формацией Фиттинга, по лемме 8 из [7] $O_\Omega(H) = H \cap O_\Omega(T)$. Далее, $O_\Omega(T) = O_\Omega(K) \times O_\Omega(L)$ и $O_\Omega(T)H$ является подпрямым произведением групп K и L. Тогда по лемме 2 из [12] $HO_\Omega(T)/O_\Omega(T)$ является подпрямым произведением групп $KO_\Omega(T)/O_\Omega(T) \cong K/O_\Omega(K)$ и $LO_\Omega(T)/O_\Omega(T) \cong L/O_\Omega(L)$. Так как $K/O_\Omega(K) \cong (G/N_1)/O_\Omega(G/N_1) \in f(\Omega')$ и $L/O_\Omega(L) \in f(\Omega')$, то $HO_\Omega(T)/O_\Omega(T) \cong H/O_\Omega(H) \in f(\Omega')$, и значит, $(G/D)/O_\Omega(G/D) \in f(\Omega')$. Поскольку $\varphi(A)$ — формация Фиттинга, аналогично получим, что $(G/D)/(G/D)_{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(G/D)$. Следовательно, $G/D \in \mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{F}$ является формацией. Лемма доказана.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть f — F-функция, φ — FR-функция и*

$$\mathfrak{F} = F(f,\varphi) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\varphi(A)} \text{ для всех } A \in K(G)\}.$$

Тогда $\mathfrak{F}$ является формацией.

Определение 2. Формацию $\mathfrak{F}$ назовем Ω-расслоенной, если $\mathfrak{F} = \Omega F(f,\varphi)$, где f и φ — некоторые ΩF-функция и ΩR-функция соответственно. Функцию f будем называть ΩF-спутником, а функцию φ — направлением Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$. Пусть f — F-функция. Формацию $\mathfrak{F} = F(f,\varphi)$ назовем расслоенной формацией с направлением φ, а f будем называть F-спутником формации $\mathfrak{F}$

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{M}$ — формация, $K(\mathfrak{M}) \cap \Omega = \varnothing$. Тогда $\mathfrak{M} = \Omega F(m,\varphi)$, где m — ΩF-функция такая, что $m(\Omega') = \mathfrak{M}$, $m(A) = \varnothing$ для всех $A \in \Omega$, и φ — произвольная FR-функция. В частности, пустая формация $\varnothing$ и единичная формация (1) являются Ω-расслоенными формациями для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B} = \Omega F(m,\varphi)$, m и φ определены в формулировке леммы. Покажем, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$. Если $G \in \mathfrak{M}$, то $G/O_\Omega(G) \in \mathfrak{M} = m(\Omega')$ и из $A \in \Omega \cap K(G) = \varnothing$ следует, что $G/G_{\varphi(A)} \in m(A)$. Поэтому $G \in \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{B}$.

Допустим, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B}$ и H — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{M}$. Тогда H — монолитическая группа с монолитом $P = H^{\mathfrak{M}}$. Так как $H/O_\Omega(H) \in m(\Omega') = \mathfrak{M}$, то $P \subseteq O_\Omega(H)$. Пусть $K(P) = (B)$. Тогда $B \in K(H) \cap \Omega$ и $H/H_{\varphi(B)} \in m(B) = \varnothing$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$. Лемма доказана.

Определение 3. Формацию $\mathfrak{F} = \Omega F(f,\varphi)$ назовем Ω-свободной или, коротко, ΩFr-формацией, если $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{\Omega'}$ для любого $A \in \mathfrak{I}$, и будем обозначать

$$\mathfrak{F} = Fr(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/O_{A'}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\},$$

а f будем называть ΩFr-спутником формации $\mathfrak{F}$. Пусть f — F-функция. Формацию

$$\mathfrak{F} = Fr(t) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_{A'}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in K(G)\}$$

назовем свободной формацией с Fr-спутником f.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая неединичная формация и $\Omega = K(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является Ω-свободной формацией.*

Доказательство. Пусть f — такая ΩF-функция, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$,

$$f(A) = \mathrm{form}(G/O_{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{F})$$

для всех $A \in \Omega$, и $\mathfrak{F}_1 = \Omega Fr(f)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Пусть $H \in \mathfrak{F}$. Тогда $H/O_\Omega(H) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Кроме того, $H/O_{A'}(H) \in (G/O_{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{F}) \subseteq f(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(H)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и T — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T — монолитическая группа с монолитом $M = T^{\mathfrak{F}}$. Поскольку $T/O_\Omega(T) \in f(\Omega') = \mathfrak{F}$ и $\Omega = K(\mathfrak{F})$, то $T/O_\Omega(T)$ является Ω-группой. Поскольку расширение Ω-группы с помощью Ω-группы является Ω-группой, то $T = O_\Omega(T)$. Пусть $K(M) = (A)$. Тогда $A \in \Omega$ и по определению $\mathfrak{F}_1$ справедливо включение $T/O_{A'}(T) \in f(A) \subset \mathfrak{F}$. Следовательно, $M \subseteq O_{A'}(T)$. Получили противоречие. Поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Теорема доказана.

Замечание 1. Из теоремы 1 и леммы 3 следует, что каждая формация является Ω-свободной для некоторого непустого класса простых групп Ω. Обозначим направление свободной формации через φ_0.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F} = \Omega F(f,\varphi)$, где φ — произвольная FR-функция. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$\mathfrak{F} = \Omega F(g,\varphi)$, где $g(A) = f(A) \cap \mathfrak{F}$ для любого $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$;*

(2) *$\mathfrak{F} = \Omega F(h,\varphi)$, где $h(\Omega') = \mathfrak{F}$ и $h(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \Omega F(g,\varphi)$, где g — функция, описанная в пункте 1 леммы. Так как $g(A) \subseteq f(A)$ для любого $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$, то $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(G)$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — формация, то $\{G/O_\Omega(G), G/G_{\varphi(A)}\} \subseteq \mathfrak{F}$, и значит, $G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \cap \mathfrak{F} = g(\Omega')$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \cap \mathfrak{F} = g(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Пусть h — ΩF-функция из пункта 2 леммы и $\mathfrak{H} = \Omega F(h,\varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_\Omega(G) \in \mathfrak{F} = h(\Omega')$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A) = h(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и H — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа H монолитична с монолитом $P = H^{\mathfrak{F}}$. Из $H/O_\Omega(H) \in h(\Omega') = \mathfrak{F}$ следует, что $P \subseteq O_\Omega(H)$ и $H/O_\Omega(H) \cong (H/P)/(O_\Omega(H)/P) = (H/P)/O_\Omega(H/P) \in f(\Omega')$. Кроме того, для любого $A \in \Omega \cap K(H)$ справедливо включение $H/H_{\varphi(A)} \in h(A) = f(A)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Замечание 2. Пусть A — простая группа и $\mathfrak{S}_{cA}$ — класс всех конечных групп, у которых каждый главный A-фактор централен. Если A — неабелева простая группа, то $\mathfrak{S}_{cA} = \mathfrak{G}_{A'}$. Нетрудно показать, что класс $\mathfrak{S}_{cA}$ является формацией Фиттинга и $\mathfrak{S}_{cA}$-радикал группы G равен $F_A(G)$ (см. теоремы 5 и 7 в [13]). Обозначим $\mathfrak{S}_{cA}$ корадикал группы G через $F^A(G)$.

Определение 4. Формация $\mathfrak{F} = \Omega F(f,\varphi)$ называется Ω-композиционной или, коротко, ΩC-формацией, если $\varphi(A) = \mathfrak{S}_{cA}$ для любого $A \in \mathfrak{J}$, в этом случае пишут

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} &= \Omega CF(f)\\ &= \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/F_A(G) \in f(A) \text{ для любого } A \in \Omega \cap K(G)\},\end{aligned}$$

а f называют ΩC-спутником формации $\mathfrak{F}$ (см. [7, 8]). В случае, когда функция f является формационной, получаем определение композиционной формации

$$\mathfrak{F} = CF(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/F_A(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in K(G)\}$$

с C-спутником f.

Определение 5. Формацию $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$ называют Ω-канонической или, коротко, ΩK-формацией, если $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ для любого $A \in \mathfrak{I}$ и пишут

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} &= \Omega KF(f)\\ &= \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/)_{A',A}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\},\end{aligned}$$

а f называют ΩK-спутником формации $\mathfrak{F}$. Пусть f — F-функция. Формацию

$$\mathfrak{F} = KF(t) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_{A',A}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in K(G)\}$$

назовем канонической формацией с K-спутником f.

Пример 1. Пусть $\mathfrak{F} = \operatorname{form} A$, где A — простая неабелева группа. Тогда $K(\mathfrak{F}) = (A)$. Пусть $\Omega = (A)$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ не является Ω-канонической формацией. Пусть

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_1 &= \Omega KF(f)\\ &= \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_A(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/O_{A',A}(G) \in f(A) \text{ для } A \in \Omega \cap K(G)\}.\end{aligned}$$

Если $f(\Omega') = \varnothing$, то условие $G/O_A(G) = f(\Omega')$ не выполняется ни для одной группы, и значит, $\mathfrak{F}_1 = \varnothing$. Пусть $f(\Omega') \neq \varnothing$. Если $f(A) = \varnothing$, то условие $G/O_{A',A}(G) \in f(A)$ для $A \in \Omega \cap K(G)$ будет выполняться лишь для A'-групп. Поэтому $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{G}_{A'}$ и $\mathfrak{F}_1 \neq \mathfrak{F}$. Пусть $f(\Omega') \neq \varnothing$, $f(A) \neq \varnothing$ и H — произвольная (A)-группа. Тогда $H/O_A(H) \in f(\Omega')$ и $H/O_{A',A}(H) \in f(A)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}_1$. Так как регулярное сплетение $A \wr A \in \mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}_1$. Формация $\mathfrak{F}$ является композиционной. Поэтому композиционная формация $\mathfrak{F}$ не обязана быть Ω-канонической. Заметим, что $\mathfrak{L} = \operatorname{lform} A = \mathfrak{N}_{\pi(A)} \operatorname{form} A \neq \mathfrak{F}_1$. Поэтому и локальная формация $\mathfrak{L}$ не обязана быть Ω-канонической.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая нееденичная формация и $\Omega \supseteq K(\mathfrak{F})$. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенной с направлением φ и ΩF-спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — расслоенная формация с направлением φ и F-спутником f_1 таким, что $f_1(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$ и $f_1(A) = \varnothing$ для любого $A \in \mathfrak{F} \setminus \Omega$.*

Такие ΩF-спутник f и F-спутник f_1 формации $\mathfrak{F}$ будем называть согласованными.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть формация $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенной с направлением φ. Тогда

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} &= \Omega F(f, \varphi)\\ &= \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\}.\end{aligned}$$

Рассмотрим F-функцию f_1 такую, что $f_1(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$ и $f_1(A) = \varnothing$ для любого $A \in \mathfrak{I} \setminus \Omega$. Пусть

$$\mathfrak{F}_1 = F(f_1, \varphi) = \{H \in \mathfrak{G} \mid H/H_{\varphi(A)} \in f_1(A) \text{ для любого } A \in K(H)\}.$$

Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда G является Ω-группой, и значит, $G/G_{\varphi(A)} \in f_1(A) = f(A)$ для любого $A \in K(G) \cap \Omega$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и T — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T — монолитическая группа с монолитом $M = T^{\mathfrak{F}}$. В силу леммы 4 можно считать, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$. Пусть $K(M) = (B)$. Поскольку $T \in \mathfrak{F}_1$, то $T/T_{\varphi(B)} \in f_1(B)$, и значит, $f_1(B) \neq \varnothing$. Тогда из определения f_1 следует, что $B \in \Omega$ и $M \subseteq O_\Omega(T)$. Поэтому $T/O_\Omega(T) \cong (T/M)/(O_\Omega(T)/M) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$ и $T/T_{\varphi(A)} = f_1(A) = f(A)$ для любого $A \in K(T) = \Omega \cap K(T)$. Отсюда получаем, что $T \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие, следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Докажем достаточность. Пусть теперь $\mathfrak{F} = F(g, \varphi)$ — расслоенная формация с направлением φ. Рассмотрим ΩF-функцию h такую, что $h(\Omega') = \mathfrak{F}$, $h(A) = g(A)$ для любого $A \in \Omega$. Пусть $\mathfrak{H} = \Omega F(h, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/O_\Omega(G) \in \mathfrak{F} = h(\Omega')$ и для любого $A \in \Omega \cap K(G)$ справедливо включение $G/G_{\varphi(A)} \in g(A) = h(A)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и H — группа наименьшего порядка в $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда H — монолитическая группа с монолитом $M = H^{\mathfrak{F}}$. Так как $H/O_\Omega \in h(\Omega') = \mathfrak{F}$, то $M \subseteq O_\Omega(H)$. Поскольку $H/M \in \mathfrak{F}$ и $\Omega \supseteq K(\mathfrak{F})$, то H/M является Ω-группой, и значит, H — Ω-группа. В силу определения $\mathfrak{H}$ справедливо включение $H/H_{\varphi(A)} \in h(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(H) = K(H)$, и из определения функции h следует, что $H/H_{\varphi(A)} \in h(A) = g(A)$ для любого $A \in K(H)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие, поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$, и теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая неединичная формация и $\Omega \supseteq K(\mathfrak{F})$. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω-свободной с ΩFr-спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — свободная формация с Fr-спутником f_1, согласованным с f.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая неединичная формация и $\Omega \supseteq K(\mathfrak{F})$. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω-композиционной с ΩC-спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — композиционная формация с C-спутником f_1, согласованным с f.*

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая неединичная формация и $\Omega \supseteq K(\mathfrak{F})$. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω-канонической с ΩK-спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — каноническая формация с K-спутником f_1, согласованным с f.*

Замечание 3. Пусть ψ_1 и ψ_2 — произвольные ΩF-функции (F-функции, FR-функции). Будем говорить, что $\psi_1 \leqslant \psi_2$, если $\psi_1(A) \leqslant \psi_2(A)$ для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ (для всех $A \in \mathfrak{I}$). Среди направлений φ расслоенной формации с $\varphi_0 \leqslant \varphi$ важное место занимают направления, удовлетворяющие равенству $\mathfrak{G}_{A'}\varphi(A) = \varphi(A)$ для всех $A \in \mathfrak{I}$. Этому равенству удовлетворяют направления Ω-свободной, Ω-композиционной, Ω-канонической формаций, а также направления вида $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{X}$ для любого $A \in \mathfrak{I}$ и любой непустой формации Фиттинга $\mathfrak{X}$.

Определение 6. Направление φ расслоенной формации назовем правильным или, коротко, r-направлением, если $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}\varphi(A)$ для любого $A \in \mathfrak{I}$.

Теорема 3. *Если $\mathfrak{F}$ — расслоенная формация с r-направлением φ, то $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенной формацией с r-направлением φ для любого непустого класса $\Omega \subset \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть Ω — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{F} = F(f, \varphi)$ — расслоенная формация с r-направлением φ. Рассмотрим ΩF-функцию h такую, что $h(\Omega') = \mathfrak{F}$,

$h(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$. Пусть $\mathfrak{H} = \Omega F(h, \varphi)$. Как и при доказательстве теоремы 2, легко проверить, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $H \in \mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$ и H — группа наименьшего порядка с таким свойством. Тогда H — монолитическая группа с монолитом $M = H^{\mathfrak{F}}$. Пусть $K(M) = (B)$. Как и при доказательстве теоремы 2, $M \subseteq O_\Omega(H)$ и поэтому $B \in \Omega$. Тогда $H/H_{\varphi(B)} \in h(B) = f(B)$. Пусть $A \in K(H)/(B)$. Введем обозначение $(H/M)_{\varphi(A)} = T/M$. Поскольку $T/M \in \varphi(A)$ и $M \in \mathfrak{G}_{A'}$, то $T \in \mathfrak{G}_{A'}\varphi(A) = \varphi(A)$. Отсюда получаем равенство $(H/M)_{\varphi(A)} = H_{\varphi(A)}/M$, и значит,

$$H/H_{\varphi(A)} \cong (H/M)/(H_{\varphi(A)}/M) = (H/M)/(H/M)_{\varphi(A)} \in f(A).$$

Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. теорема доказана.

Следствие 4. *Если $\mathfrak{F}$ — свободная формация, то $\mathfrak{F}$ является Ω-свободной формацией для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{J}$.*

Следствие 5 ([7]). *Если $\mathfrak{F}$ — композиционная формация, то $\mathfrak{F}$ является Ω-композиционной формацией для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{J}$.*

Следствие 6. *Если $\mathfrak{F}$ — каноническая формация, то $\mathfrak{F}$ является Ω-канонической формацией для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{J}$.*

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω-канонической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является Ω-композиционной.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $A \in K(G)$. Тогда $A \in \mathfrak{A}$. Пусть $A \cong Z_p$. Покажем, что $F_{Z_p}(G) = O_{(Z_p)',Z_p}(G)$. Действительно, поскольку $G \in \mathfrak{S}$, каждый главный pd-фактор группы G является главным Z_p-фактором группы G, и поэтому $F_{Z_p}(G) = F_p(G)$. Так как $F_p(G) \in \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p$, то $F_{Z_p}(G) \subseteq O_{(Z_p)',Z_p}(G)$. С другой стороны, $F_p(G)$ — наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа группы G. Следовательно, $F_{Z_p}(G) = O_{(Z_p)',Z_p}(G)$. Пусть

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} &= \Omega KF(f)\\ &= \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/O_{A',A}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\}.\end{aligned}$$

Это, в силу равенства $F_A(G) = O_{A',A}(G)$ для всех $A \in K(G)$, справедливо тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} &= \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/F_A(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\}\\ &= \Omega CF(f).\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 7. *Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$. Формация $\mathfrak{F}$ является канонической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является локальной.*

Доказательство проводится путем последовательного применения при $\Omega \supseteq K(\mathfrak{F})$ следствия 3, теоремы 4, следствия 2 и равносильности понятий композиционности и локальности для разрешимой формации.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор ΩF-функций (F-функций). Обозначим через $\bigcap_{i\in I} f_i$ такую ΩF-функцию (F-функцию) f, что

$$f(A) = \bigcap_{i\in I} f_i(A)$$

для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ (для всех $A \in \mathfrak{I}$).

Лемма 5. *Пусть φ — произвольная FR-функция, $\mathfrak{F} = \bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i = \Omega F(f_i, \varphi)$, $i \in I$. Тогда $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$, где $f = \bigcap_{i\in I} f_i$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H} = \Omega F(f, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}_i$, и значит, $G/O_\Omega(G) \in f_i(\Omega')$, $i \in I$. Поэтому $G/O_\Omega(G) \in \bigcap_{i\in I} f_i(\Omega') = f(\Omega')$. Так как для любого $A \in \Omega \cap K(G)$ справедливы включения $G/G_{\varphi(A)} \in f_i(A)$, $i \in I$, то $G/G_{\varphi(A)} \in \bigcap_{i\in I} f_i(A) = f(A)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Пусть $B \in \mathfrak{H}$. Тогда $B/O_\Omega(B) \in f(\Omega') = \bigcap_{i\in I} f_i(\Omega')$ и $B/B_{\varphi(A)} \in f(A) = \bigcap_{i\in I} f_i(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(B)$. Отсюда следует, что $B/O_\Omega(B) \in f_i(\Omega')$ и $B/B_{\varphi(A)} \in f_i(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(B)$, $i \in I$. Поэтому $B \in \mathfrak{F}_i$, $i \in I$, и значит, $B \in \bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Нетрудно проверить, что и для расслоенных формаций справедливо утверждение, аналогичное лемме 5.

Пусть $\mathfrak{X}$ — непустое множество групп. Обозначим через $\Omega F(\mathfrak{X}, \varphi)$ пересечение всех Ω-расслоенных формаций с направление φ, которые содержат $\mathfrak{X}$, $F(\mathfrak{X}, \varphi)$ — пересечение всех расслоенных формаций с направление φ, содержащих $\mathfrak{X}$. При фиксированной φ формации $\Omega F(\mathfrak{X}, \varphi)$ и $F(\mathfrak{X}, \varphi)$ будем также обозначать $\Omega F(\mathfrak{X})$ и $F(\mathfrak{X})$ соответственно. Далее $\Omega Fr()$ и $Fr(\mathfrak{X})$ — Ω-свободная и свободная формация соответственно, порожденные множеством $\mathfrak{X}$; $\Omega CF(\mathfrak{X})$ и $CF(\mathfrak{X})$, $\Omega KF(\mathfrak{X})$ и $KF(\mathfrak{X})$ — соответственно Ω-композиционная и композиционная, Ω-каноническая и каноническая формации, порожденные $\mathfrak{X}$.

В силу замечания 3 можно считать, что всякое множество ΩF-функций (F-функций) является частично упорядоченным, и имеет смысл говорить о его минимальных и максимальных элементах. ΩF-функцию (F-функцию) f назовем минимальным ΩF-спутником (F-спутником) Ω-расслоенной (расслоенной) формации $\mathfrak{F}$ с направлением φ, если f является минимальным элементом множества всех ΩF-спутников (F-спутников) формации $\mathfrak{F}$.

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда Ω-расслоенная формация $\mathfrak{F} = \Omega F(\mathfrak{X}, \varphi)$ с направлением φ, где $\varphi_0 \leqslant \varphi$, обладает единственным минимальным ΩF-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = \mathrm{form}(G/O_\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}), \qquad f(A) = \mathrm{form}(G/G_{\varphi(A)} \mid G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$.

Доказательство. При $\mathfrak{X} = (1)$ утверждение верно. Пусть $K(\mathfrak{X}) \neq \varnothing$, φ — такая FR-функция, что $\varphi_0 \leqslant \varphi$. Поскольку класс $\mathfrak{G}$ является Ω-расслоенной формацией с направлением φ и $\subseteq \mathfrak{G}$, то формация $\mathfrak{F} = \Omega F(\mathfrak{X}, \varphi)$ существует, и значит, множество L всех ΩF-спутников формации $\mathfrak{F}$ непусто. Обозначим через f_1 пересечение всех элементов из L. По лемме 5 $\mathfrak{F} = \Omega F(f_1, \varphi)$ и поэтому $f_1 \in L$. Кроме того, для любого элемента $h \in L$ справедливо неравенство $f_1 \leqslant h$. Тем самым установлено, что f_1 — единственный минимальный ΩF-спутник формации $\mathfrak{F}$.

Пусть f — ΩF-функция, описанная в заключении теоремы. Покажем, что $f = f_1$. Пусть $M \in \mathfrak{X}$. Тогда $M/O_\Omega(M) \in f(\Omega')$ и из включения $K(M) \subseteq (\mathfrak{X})$ следует, что $M/M_{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(M)$. Это означает, что $M \in \Omega F(f, \varphi)$ и $\mathfrak{X} \subseteq \Omega F(f, \varphi)$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \Omega F(\mathfrak{X}, \varphi) \subseteq \Omega F(f, \varphi)$.

Покажем, что $f \leqslant f_1$. Пусть $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$. Тогда найдется такая группа $H \in \mathfrak{F}$, что $A \in \Omega \cap K(H)$. Из $\mathfrak{F} = \Omega F(f_1, \varphi)$ следует $H/H_{\varphi(A)} \in f_1(A)$. Поэтому $f_1(A) \neq \varnothing$. Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Если $A \in \Omega \cap K(G)$, то из того, что $G \in \mathfrak{F} = \Omega F(f_1, \varphi)$, получаем включение $G/G_{\varphi(A)} \in f_1(A)$.

Пусть теперь $A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{X}) \setminus (\Omega \cap K(G))$. Тогда $G \in \mathfrak{G}_{A'} = \varphi_0(A) \subseteq \varphi(A)$, и поэтому $G/G_{\varphi(A)} \cong 1 \in f_1(A)$. Таким образом, $f(A) = \mathrm{form}(G/G_{\varphi(A)} \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(A)$. Кроме того, из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $f(\Omega') = \mathrm{form}(G/O_\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(\Omega')$. Если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$, то $f(A) = \varnothing \subseteq f_1(A)$. Следовательно, $f \leqslant f_1$ и $\Omega F(f, \varphi) \subseteq \Omega F(f_1, \varphi)$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$, и значит, $f \in L$. Поскольку f_1 — единственный минимальный ΩF-спутник формации $\mathfrak{F}$, то $f \leqslant f_1$ влечет $f = f_1$. Теорема доказана.

Следствие 8. *Пусть f_i — минимальный ΩF-спутник Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}_i$ с направлением φ, где $\varphi_0 \leqslant \varphi$, $i = 1, 2$. $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ тогда и только тогда, когда $f_1 \leqslant f_2$.*

Следствие 9. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда Ω-свободная формация $\mathfrak{F} = \Omega FR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным ΩFr-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = \mathrm{form}(G/O_\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}), \qquad f(A) = \mathrm{form}(G/O_{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \Omega K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенной формацией с направлением φ_0, по теореме 5 формация $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным ΩFr-спутником f, причем $f(A) = \mathrm{form}(G/O_{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $A \in \Omega \cap F(\mathfrak{X})$. Следствие доказано.

Следствие 10. *Пусть $\mathfrak{X}$ —непустой класс групп. Тогда свободная формация $\mathfrak{F} = Fr(\mathfrak{X})$ обладает единственным Fr-спутником f_1 таким, что*

$$f_1(A) = \mathrm{form}(G/O_{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in K(\mathfrak{X})$ и $f_1(A) = \varnothing$, если $A \in \mathfrak{F} \setminus K(\mathfrak{X})$.

Доказательство. Пусть $\Omega = \mathfrak{I}$. Согласно следствию 4 формация $\mathfrak{F}$ является Ω-свободной, и значит, по следствию 9, $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным ΩFr-спутником f, причем $\Omega \cap K(\mathfrak{X}) = K(\mathfrak{X})$. По следствию 1 формация $\mathfrak{F}$ обладает Fr-спутником f_1, согласованным с f. Пусть g_1 — внутренний Fr-спутник формации $\mathfrak{F}$ и g — внутренний ΩFr-спутник формации $\mathfrak{F}$, согласованный с g_1. Так как $f \leqslant g$, то и $f_1 \leqslant g_1$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным Fr-спутником f_1. Следствие доказано.

Доказательства двух следующих утверждений проводятся аналогично доказательствам следствий 9 и 10 соответственно.

Следствие 11. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда Ω-каноническая формация $\mathfrak{F} = \Omega KF(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным ΩK-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = \mathrm{form}(G/O_\Omega \mid G \in \mathfrak{X}), \qquad f(A) = \mathrm{form}(G/O_{A',A}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$.

Следствие 12. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда каноническая формация $\mathfrak{F} = \Omega KF(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным K-спутником f таким, что $f(A) = \mathrm{form}(G/O_{A',A}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $A \in K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \mathfrak{I} \setminus K(\mathfrak{X})$.*

Следствие 13 ([7, 8]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда Ω-композиционная формация $\mathfrak{F} = \Omega CF(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным ΩC-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = \mathrm{form}(G/O_\Omega \mid G \in \mathfrak{X}), \qquad f(A) = \mathrm{form}(G/F_A(G) \mid G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$.

Следствие 14. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп и $K(\mathfrak{X}) \neq \varnothing$. Тогда композиционная формация $\mathfrak{F} = CF(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным C-спутником f таким, что $f(A) = \mathrm{form}(G/F_A(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $A \in K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \mathfrak{I} \setminus K(\mathfrak{X})$.*

Лемма 6. *Пусть Ω — непустой класс простых групп. Если формация $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенной с r-направлением φ, то $\mathfrak{F}$ является (Z_p)-расслоенной формацией с r-направлением φ для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$ — Ω-расслоенная формация с r-направлением φ и $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ является (Z_p)-расслоенной формацией с r-направлением φ. Пусть $(Z_p)F$-функция f_p такова, что $f_p(Z_p) = f(Z_p)$, $f_p((Z_p)') = \mathfrak{F}$, и $\mathfrak{F}_1 = (Z_p)F(f_p, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_p(G) \in \mathfrak{F} = f_p((Z_p)')$. Если $Z_p \in K(G)$, то $G/G_{\varphi(Z_p)} \in f(Z_p) = f_p(Z_p)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и H — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа H монолитична с монолитом$P = H^{\mathfrak{F}}$. В силу леммы 4, можно считать, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$. Тогда

$$H/O_\Omega(H) \cong (H/O_p(H))/(O_\Omega(H)/O_p(H)) \in f((Z_p)') = \mathfrak{F} = f(\Omega').$$

Пусть $A \in \Omega \cap K(H)$. Если $A \cong Z_p$, то $H/H_{\varphi(Z_p)} \in f_p(Z_p) = f(Z_p)$. Пусть A неизоморфна Z_p. Из включения $H/O_p(H) \in \mathfrak{F}$ следует, что $P \subseteq O_p(H)$ и $P \in \mathfrak{G}_{A'}$. Пусть $(H/P)_{\varphi(A)} = T/P$. Тогда $T \in \mathfrak{G}_{A'}\varphi(A) = \varphi(A)$ и поэтому $T = H_{\varphi(A)}$. Отсюда получаем, что

$$H/H_{\varphi(A)} \cong (H/P)/(H_{\varphi(A)}/P) = (H/P)/(H/P)_{\varphi(A)} \in f(A).$$

Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Лемма доказана.

Замечание 4. Лемма 1 не допускает обращения. Действительно, в силу примера 1 формация $\mathfrak{F} = \mathrm{form}\, A$, где A — простая неабелева группа, не является Ω-канонической формацией для $\Omega = (A)$. Однако, по лемме 3, $\mathfrak{F}$ является (Z_p)-канонической для любого простого p, и, в частности, для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$.

Определение 7. Правильное направление φ расслоенной формации назовем rn-направлением, если $A \notin \varphi(A)$ для любой неабелевой группы $A \in \mathfrak{I}$.

Замечание 5. Направления Ω-свободной и Ω-композиционной формаций являются rn-направлениями, а направление Ω-канонической формации не является rn-направлением. Отметим, что r-направления φ расслоенной формации такие, что $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}$ для любой простой группы $A \in \mathfrak{I}$, также являются rn-направлениями.

Теорема 6. *Пусть Ω — непустой класс простых групп. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенной с rn-направлением φ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является (Z_p)-расслоенной формацией с rn-направлением φ для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Необходимость следует из леммы 6.

Докажем достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = (Z_p)F(\mathfrak{b}_p, \varphi)$ — (Z_p)-расслоенная формация с rn-направлением φ для всех $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$. В силу леммы 4 и теоремы 5 можно считать что $\mathfrak{b}_p((Z_p)') = \mathfrak{F}$ и

$$\mathfrak{b}_p(Z_p) = \mathrm{form}(G/G_{\varphi(Z_p)} \mid G \in \mathfrak{F})$$

для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$. Пусть $\mathfrak{b}$ — такая ΩF-функция, что $\mathfrak{b}(\Omega') = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{b}(Z_p) = \mathfrak{b}_p(Z_p)$ для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{b}(Z_p) = \varnothing$ для всех $Z_p \in \Omega \setminus K(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{b}(A) = \mathfrak{F}$, если $A \in \Omega \setminus \mathfrak{A}$, и $\mathfrak{B} = \Omega F(\mathfrak{b}, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_\Omega(G) \in \mathfrak{F} = \mathfrak{b}(\Omega')$. Пусть $A \in \Omega \cap K(G)$. Если $A \cong Z_p$, то $G/G_{\varphi(Z_p)} \in \mathfrak{b}_p(Z_p) = \mathfrak{b}(Z_p)$. Если $A \notin \mathfrak{A}$, то $G/G_{\varphi(A)} \in \mathfrak{F} = \mathfrak{b}(A)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$.

Предположим, что $B \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{F}$ и B — группа наименьшего порядка с таким свойством. Тогда группа B монолитична с монолитом $R = B^{\mathfrak{F}}$. Пусть $A \in K(R)$. Поскольку $B/O_\Omega(B) \in \mathfrak{b}(\Omega') = \mathfrak{F}$, то $R \subseteq O_\Omega(B)$ и $A \in \Omega$. Так как $B/B_{\varphi(A)} \in \mathfrak{b}(A)$, то $\mathfrak{b}(A) \neq \varnothing$, и значит, $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$. Пусть A — неабелева группа. Так как φ — rn-направление, то $A \notin \varphi(A)$, и значит, $B_{\varphi(A)} = 1$. Отсюда получаем, что

$$B \cong B/B_{\varphi(A)} \in \mathfrak{b}(A) = \mathfrak{F},$$

что невозможно. Поэтому $A \cong Z_p$. Тогда $B/B_{\varphi(Z_p)} \in \mathfrak{b}(Z_p) = \mathfrak{b}_p(Z_p)$. Кроме того,

$$B/O_p(B) \cong (B/R)/(O_p(B)/R) \in \mathfrak{F} = \mathfrak{b}_p((Z_p)').$$

Таким образом, $B \in (Z_p)F(\mathfrak{b}_p, \varphi) = \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$. Теорема доказана.

Следствие 15. *Пусть Ω — непустой класс простых групп и $\Omega_1 = \Omega \cap \mathfrak{A} \cap K(\mathfrak{F})$. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенной с rn-направлением φ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является Ω_1-расслоенной формацией с rn-направлением φ.*

Доказательство. По теореме 6, $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенной формацией с rn-направлением φ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является (A)-расслоенной формацией с rn-направлением φ для любого $A \in \Omega \cap \mathfrak{A} \cap K(\mathfrak{F}) = \Omega_1 \cap \mathfrak{A} \cap K(\mathfrak{F})$, но это по теореме 6 выполняется тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является Ω_1-расслоенной с rn-направлением φ. Следствие доказано.

3. Ω-расслоенные классы Фиттинга групп

В дальнейшем неоднократно будет применяться известная, по-видимому, лемма.

Лемма 7. *Пусть N — нормальная подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

– $O^{\Omega}(N) \subseteq N \cap O^{\Omega}(G)$,

– *если* $G/N \in \mathfrak{G}_{\Omega}$, *то* $O^{\Omega}(G) = O^{\Omega}(N)$,

– *если* $H \lhd G$ *и* $G = HN$, *то* $O^{\Omega}(H)O^{\Omega}(N)$.

Определение 8. Функцию $f\colon \Omega \cup \{\Omega'\} \to \{$классы Фиттинга групп$\}$, принимающую одинаковые значения на изоморфных группах из Ω, назовем Ω-радикальной функцией или, коротко, ΩR-функцией

Функцию $g\colon \mathfrak{J} \to \{$классы Фиттинга групп$\}$, принимающую одинаковые значения на изоморфных группах из $\mathfrak{J}$, назовем радикальной функцией или, коротко, R-функцией.

Лемма 8. *Пусть f — ΩR-функция, φ — FR-функция и*

$$\mathfrak{F} = \Omega R(f,\varphi) = \{G \in \mathfrak{G} \mid O^{\Omega}(G) \in f(\Omega') \text{ и } G^{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\}.$$

Тогда $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга.

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd \mathfrak{G}$. Покажем, что $N \in \mathfrak{F}$. Так как по лемме 7 $O^{\Omega}(N) \subseteq O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ и класс $f(\Omega')$ нормально наследствен, то $O^{\Omega}(N) \in f(\Omega')$. Пусть $A \in \Omega \cap K(N)$. Тогда $A \in \Omega \cap K(G)$ и по условию $S = G^{\varphi(A)} \in f(A)$. Из того, что $NS/S \lhd G/S\varphi$, и нормальной наследственности класса $\varphi(A)$ следует, что $N/N \cap S \in \varphi(A)$. Поэтому $T = N^{\varphi(A)} \subseteq N \cap S$. Так как $T \lhd S$ и класс $F(A)$ нормально наследствен, то $T \in f(A)$, и значит, $N \in \mathfrak{F}$.

Пусть $G = HK$, $H \lhd G$, $K \lhd G$, H и K принадлежат $\mathfrak{F}$. Так как по лемме 7 $O^{\Omega}(G) = O^{\Omega}(H)O_{\Omega}(K)$ и $O^{\Omega}(H)$ и $O^{\Omega}(K)$ принадлежат классу Фиттинга $F(\Omega')$, то $O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$. Пусть $A \in \Omega \cap K(G)$. Покажем, что $G^{\varphi(A)} \in f(A)$. Так как $X = H^{\varphi(A)} \in f(A)$, $Y = K^{\varphi(A)} \in f(A)$ и $f(A)$ — класс Фиттинга, то $D = XY \in f(A)$, причем $D \lhd G$. Из равенства $G = HK$ следует, что $G/D = HD/D \cdot KD/D$. По модулярному тождеству Дедекинда $HD/D \cong H/H \cap D = H/X(H \cap Y)$. Поскольку $H/X \in \varphi(A)$ и $\varphi(A)$ — формация, то

$$H/X(H \cap Y) \cong (H/X)/(X(H \cap Y)/X) \in \varphi(A),$$

и значит, $HD/D \in \varphi(A)$. Аналогично можно показать, что $KD/D \in \varphi(A)$. Так как $\varphi(A)$ — класс Фиттинга, то $G/D = HD/D \cdot KD/D \in \varphi(A)$. Следовательно, $G^{\varphi(A)} \subseteq D$. Из включения $D \in f(A)$ получим, что $G^{\varphi(A)} \in f(A)$, и значит, $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга. Лемма доказана.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Лемма 9. *Пусть f — R-функция, φ — FR-функция и*

$$\mathfrak{F} = R(f,\varphi) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in K)G)\}.$$

Тогда $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга.

Определение 9. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем Ω-расслоенным, если $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$, где f и φ — некоторые ΩR-функция и FR-функция соответственно. Функцию f будем называть ΩR-спутником, а функцию φ — направлением Ω-расслоенного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Напомним, что группа G называется комонолитической, если в G имеется такая нормальная подгруппа M (комонолит группы G), что G/M —простая группа и $N \subseteq M$ для любой собственной нормальной подгруппы N группы G (см. [6]).

Лемма 10. *Пусть $\mathfrak{M}$ — класс Фиттинга и $K(\mathfrak{M}) \cap \Omega = \varnothing$. Тогда $\mathfrak{M} = \Omega R(m, \varphi)$, где m — ΩR-функция такая, что $m(\Omega') = \mathfrak{M}$, $M(A) = \varnothing$ для всех $A \in \Omega$, и φ — произвольная FR-функция. В частности, классы Фиттинга $\varnothing$ и (1) являются Ω-расслоенными для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_1 = \Omega R(m, \varphi)$, где m и φ определены в лемме. Покажем, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{M}$. Тогда $O^{\Omega}(G) = G \in \mathfrak{M} = m(\Omega')$, и из $A \in \Omega \cap K(G) = \varnothing$ следует, что $G^{\varphi(A)} \in m(A)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{M}_1$, и значит, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_1$.

Предположим, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1$ и H — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{M}_1 \setminus \mathfrak{M}$. Тогда $O^{\Omega}(H) \in m(\Omega') = \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{M} \neq \varnothing$ и $|H| \neq 1$. Пусть M_1 и M_2 — собственные нормальные подгруппы группы H такие, что $H = M_1M_2$. Так как $M_i \in \mathfrak{M}_1$, то в силу выбора H справедливо включение $M_i \in \mathfrak{M}$, $i = 1, 2$, и значит, $H \in \mathfrak{M}$. Получили противоречие. Следовательно, H — комонолитическая группа с комонолитом M. Тогда $M \in \mathfrak{M}$, $M = H_{\mathfrak{M}}$ и H/M — простая группа. Если $H/M \notin \Omega$, то $H = O^{\Omega}(H) \in m(\Omega') = \mathfrak{M}$, что невозможно. Поэтому $(H/M) = (A) \subseteq \Omega$. Тогда $H^{\varphi(A)} \in m(A) = \varnothing$. Опять получаем противоречие. Таким образом, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1$. Лемма доказана.

Определение 10. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$ назовем Ω-свободным или, коротко, ΩFr-классом Фиттинга, если $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}$ для любого $A \in \mathfrak{I}$, и будем писать

$$\mathfrak{F} = \Omega FrR(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid O^{\Omega}(G) \in f(\Omega') \text{ и } O^{A'}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\},$$

а f будем называть ΩFr-спутником класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Пусть f — R-функция. Класс Фиттинга

$$\mathfrak{F} = FrR(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid O^{A'}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in K(G)\}$$

назовем свободным классом Фиттинга.

Теорема 7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой неединичный класс Фиттинга и $\Omega = K(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является Ω-свободным классом Фиттинга.*

Доказательство. Пусть ΩR-функция f такая, что $f(A) = \mathrm{fit}(O^{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{F})$ для всех $A \in \Omega$, $f(\Omega') = \mathfrak{F}$, и $\mathfrak{F}_1 = \Omega FrR(f)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Пусть $H \in \mathfrak{F}$. Тогда $O^{\Omega}(H) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Далее, $O^{A'}(H) \in (O^{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{F})$, и значит,

$$O^{A'}(H) \in \mathrm{fit}(O^{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{F}) = f(A)$$

для любого $A \in \Omega \cap K(H)$. Следовательно, $H \in \Omega FrR(f) = \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и T — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Как и при доказательстве леммы 10, нетрудно проверить, что T — комонолитическая группа с комонолитом $L = T_{\mathfrak{F}}$. Так как $O^{\Omega}(T) \in f(\Omega') = \mathfrak{F}$, то $O^{\Omega} \subseteq L$, и значит, $T/L \cong A \in \Omega$. Из определения $\Omega FrR(f)$ следует, что $O^{A'}(T) \dot{\in} f(A) \subseteq \mathfrak{F}$. Из комонолитичности группы T следует, что $T = O^{A'}(T)$. Поэтому $T \in \mathfrak{F}$. Получено противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Теорема доказана.

Замечание 6. Из теоремы 7 и леммы 10 следует, что каждый класс Фиттинга является Ω-свободным для некоторого непустого класса простых групп Ω. Обозначим направление Ω-свободного класса Фиттинга через φ_0.

Лемма 11. *Пусть $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$, где φ — произвольная FR-функция. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $\mathfrak{F} = \Omega R(g, \varphi)$, *где* $g(A) = f(A)\mathfrak{F}$ *для любого* $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$,

(2) $\mathfrak{F} = \Omega R(h, \varphi)$, *где* $f(\Omega') = \mathfrak{F}$ *и* $h(A) = f(A)$ *для всех* $A \in \Omega$,

(3) *если* $\varphi_0 \leqslant \varphi$ *и* $\Omega \subseteq K(\mathfrak{F}$, *то*

$$\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{G} \mid O^{\Omega}(G) \in f(\Omega') \text{ и } G^{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega\}.$$

Доказательство. Докажем часть 1. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \Omega R(g, \varphi)$, где g — ΩR-функция из первого утверждение леммы. Так как $g(A) \subseteq f(A)$ для любого $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$, то $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ и $G^{\varphi(A)} \in f(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(G)$. Поскольку класс $\mathfrak{F}$ нормально наследствен, то $\{O^{\Omega}(G), G^{\varphi(A)}\} \subseteq \mathfrak{F}$, и значит, $O^{\Omega}(G) \in f(A) \cap \mathfrak{F} = g(\Omega')$ и $G^{\varphi(A)} \in f(A) \cap \mathfrak{F} = g(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Докажем часть 2. Пусть H — ΩR-функция, описанная во втором утверждении леммы, и $\mathfrak{H} = \Omega R(h, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $O_{\Omega}(G) \in \mathfrak{F} = h(\Omega')$ и $G^{\varphi(A)} \in f(A) = h(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Предположим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и B — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа B является комонолитической с комонолитом $M = B_{\mathfrak{F}}$. Поскольку $B \in \mathfrak{H}$, то $O^{\Omega}(B) \in h(\Omega') = \mathfrak{F}$, и $O^{\Omega}(B) \subseteq M$. Тогда $B/M \cong (B/O^{\Omega}(B))/(M/O^{\Omega}(B)) \in \mathfrak{G}_{\Omega}$ и по лемме 7 $O^{\Omega}(B) = O^{\Omega}(M)$. Так как $M \in \mathfrak{F}$, то $O^{\Omega}(M) \in f(\Omega')$, и следовательно, $O^{\Omega}(B) \in f(\Omega')$. Далее, $B \in \mathfrak{H}$ влечет $B^{\varphi(A)} \in h(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(B)$. Таким образом, $B \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Докажем теперь часть 3. Пусть $\varphi_0 \leqslant \varphi$, $\Omega \subseteq K(\mathfrak{F})$ и $G \in \mathfrak{F}$. Если $A \in \Omega \cap K(G)$, то $G^{\varphi(A)} \in f(A)$ по определению класса $\Omega R(f, \varphi)$. Пусть $A \in \Omega \setminus K(G)$. Так как $\Omega \subseteq K(\mathfrak{F})$, то найдется такая группа $L \in \mathfrak{F}$, что $A \in K(L)$. Отсюда получаем, что $L^{\varphi(A)} \in f(A)$, и значит, $f(A) \neq \varnothing$. Поскольку $A \notin K(G)$, то $G \in \mathfrak{G}_{A'} = \varphi_0(A) \subseteq \varphi(A)$ и поэтому $G^{\varphi(A)} = 1 \in f(A)$. Таким образом, $G^{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega$. Лемма доказана.

Определение 11. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$ назовем Ω-композиционным или, коротко, ΩC-классом Фиттинга, если $\varphi(A) = \mathfrak{S}_{cA}$ для любого $A \in \mathfrak{I}$, и пишем

$$\mathfrak{F} = \Omega CR(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid O^{\Omega}(G) \in f(\Omega') \text{ и } F^A(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\},$$

а f назовем ΩC-спутником класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. В случае, когда f является R-функцией, получаем определение композиционного класса Фиттинга

$$\mathfrak{F} = CR(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid F^A(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in K(G)\}$$

с C-спутником f.

Определение 12. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R(f,\varphi)$ назовем Ω-каноническим или, коротко, ΩK-классом Фиттинга, если $\varphi(A) = \mathfrak{G}_A\mathfrak{G}_{A'}$ для любого $A \in \mathfrak{I}$, и пишем

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} &= \Omega KR(f)\\ &= \{G \in \mathfrak{G} \mid O^{\Omega}(G) \in f(\Omega') \text{ и } O^{A,A'}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\},\end{aligned}$$

а ΩR-функцию f назовем ΩK-спутником класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Пусть f — R-функция. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = KR(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid O^{A,A'}(G) \in f(A)$ для всех $A \in K(G)\}$ назовем каноническим классом Фиттинга с K-спутником f.

Теорема 8. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой неединичный класс Фиттинга и $\Omega \supseteq K(\mathfrak{F})$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенным с направлением φ и ΩR-спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — расслоенный класс Фиттинга с направлением φ и R-спутником f_1 таким, что $f_1(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$ и $f_1(A) = \varnothing$ для любого $A \in \mathfrak{I} \setminus \Omega$.*

Такие ΩR-спутник f и R-спутник f_1 класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ будем называть согласованными.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} &= \Omega R(f,\varphi)\\ &= \{G \in \mathfrak{G} \mid O^{\Omega}(G) \in f(\Omega') \text{ и } G^{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\}.\end{aligned}$$

Рассмотрим R-функцию f_1 такую, что $f_1(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$ и $f_1(A) = \varnothing$ для любого $A \in \mathfrak{I} \setminus \Omega$. Пусть $\mathfrak{F}_1 = R(f_1,\varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Так как $\Omega \supseteq K(\mathfrak{F})$, то G является Ω-группой, и значит, $G^{\varphi(A)} \in f(A) = f_1(A)$ для любого $A \in K(G) \cap \Omega$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и T — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T — комонолитическая группа с комонолитом $M = T_{\mathfrak{F}}$. В силу леммы 11 можно считать, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$. Пусть $T/M \cong B$. Поскольку $T \in \mathfrak{F}_1$, то $T^{\varphi(B)} \in f_1(B)$, и значит, $f_1(B) \neq \varnothing$. Тогда из определения f_1 следует, что $B \in \Omega$ и $O^{\Omega}(T) \subseteq M$. Поэтому $O^{\Omega}(T) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Далее, из $M \in \mathfrak{F}$ и $B \in \Omega$ следует $K(T) \subseteq \Omega$ и $T^{\varphi(A)} \in f_1(A) = f(A)$ для всех $A \in K(T)$. Теперь из определения Ω-расслоенного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ следует, что $T \in \mathfrak{F}$. Получаем противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Докажем достаточность. Пусть теперь $\mathfrak{F} = R(g,\varphi)$ — расслоенный класс Фиттинга с направлением φ. Рассмотрим ΩR-функцию h такую, что $h(\Omega') = \mathfrak{F}$, $h(A) = g(A)$ для любого $A \in \Omega$. Пусть $\mathfrak{H} = \Omega R(h,\varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $O^{\Omega}(G) \in \mathfrak{F} = h(\Omega')$ и $G^{\varphi(A)} \in g(A) = h(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и H — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда H — комонолитическая группа с комонолитом $M = H_{\mathfrak{F}}$. Так как $O^{\Omega}(H) \in h(\Omega') = \mathfrak{F}$, то $O^{\Omega} \subseteq M$. Из $H/M \cong (H/O^{\Omega}(H))/(M/O^{\Omega}(H)) \in \mathfrak{G}_{\Omega}$ следует, что $K(H) \subseteq \Omega$, и поэтому $H^{\varphi(A)} \in h(A) = g(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(H) = K(H)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Теорема доказана.

Следствие 16. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой неединичный класс Фиттинга и $\Omega \supseteq K(\mathfrak{F})$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является Ω-свободным с ΩFr-спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — свободный класс Фиттинга с Fr-спутником f_1, согласованным с f.*

Следствие 17. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой неединичный класс Фиттинга и $\Omega \supseteq K(\mathfrak{F})$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является Ω-композиционным с ΩC-спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — композиционный класс Фиттинга с C-спутником f_1, согласованным с f.*

Следствие 18. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой неединичный класс Фиттинга и $\Omega \supseteq K(\mathfrak{F})$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является Ω-каноническим с ΩK-спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — каноническим класс Фиттинга с K-спутником f_1, согласованным с f.*

Определение 13. Направление φ расслоенного класса Фиттинга назовем правильным или, коротко, r-направлением, если $\varphi(A) = \varphi(A)\mathfrak{G}_{A'}$ для любого $A \in \mathfrak{I}$.

Теорема 9. *Если $\mathfrak{F}$ — расслоенный класс Фиттинга с r-направлением φ, то $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенным классом Фиттинга с r-направлением φ для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$.*

Доказательство. Пусть Ω — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{F} = R(f,\varphi)$ — расслоенный класс Фиттинга с r-направлением φ. Рассмотрим ΩR-функцию h такую, что $h(\Omega') = \mathfrak{F}$, $h(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$. Пусть $\mathfrak{H} = \Omega R(h,\varphi)$. Как и при доказательстве теоремы 8, легко проверить, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $H \in \mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$ и H — группа наименьшего порядка с таким свойством. Тогда H — комонолитическая группа с монолитом $M = H_{\mathfrak{F}}$. Пусть $K(M) = (B)$. Как и в доказательстве теоремы 8, $O^{\Omega}(H) \subseteq M$ и $H/M \cong (H/O^{\Omega}(H))/(M/O^{\Omega}(H)) \in \mathfrak{G}_{\Omega}$. Поэтому $B \in \Omega$ и $H^{\varphi(B)} \in h(B) = f(B)$. Пусть $A \in K(H) \setminus (B)$. Тогда $A \in K(M)$ и $H/M \in \mathfrak{G}_{A'}$. Так как $H/M \cong (H/M^{\varphi(A)})/(M/M^{\varphi(A)})$, то $H/M^{\varphi(A)} \in \varphi(A)\mathfrak{G}_{A'} = \varphi(A)$ и $H^{\varphi(A)} \subseteq M^{\varphi(A)}$. Из $M \in \mathfrak{F}$ получаем, что $H^{\varphi(A)} \in f(A)$. Таким образом, $H \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Теорема доказана.

Следствие 19. *Если $\mathfrak{F}$ — свободный класс Фиттинга, то $\mathfrak{F}$ является Ω-свободным классом Фиттинга для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$.*

Следствие 20. *Если $\mathfrak{F}$ — композиционный класс Фиттинга, то $\mathfrak{F}$ является Ω-композиционным классом Фиттинга для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$.*

Следствие 21. *Если $\mathfrak{F}$ — канонический класс Фиттинга, то $\mathfrak{F}$ является Ω-каноническим классом Фиттинга для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$.*

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор ΩR-функций (R-функций). Обозначим через $\bigcap_{i\in I} f_i$ такую ΩR-функцию (R-функцию) f, что

$$f(A) = \bigcap_{i\in I} f_i(A)$$

для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ $\quad (A \in \mathfrak{I})$.

Лемма 12. *Пусть φ — произвольная ΩR-функция,*

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i,$$

где $\mathfrak{F}_i = \Omega R(f_i,\varphi)$ $(\mathfrak{F}_i = R(f_i,\varphi))$, $i \in I$. Тогда $\mathfrak{F} = \Omega R(f,\varphi)$ $(\mathfrak{F} = R(f,\varphi))$, где

$$f = \bigcap_{i\in I} f_i.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 5.

Пусть $\mathfrak{X}$ — непустое множество групп. Обозначим через $\Omega R(\mathfrak{X}, \varphi)$ пересечение всех Ω-расслоенных классов Фиттинга с направлением φ, которые содержат $\mathfrak{X}$, и через $R(\mathfrak{X}, \varphi)$ пересечение всех расслоенных классов Фиттинга с направлением φ, содержащих $\mathfrak{X}$. При фиксированном φ классы Фиттинга $\Omega R(\mathfrak{X}, \varphi)$ и $R(\mathfrak{X}, \varphi)$ будем также коротко обозначать $\Omega R(\mathfrak{X})$ и $R(\mathfrak{X})$ соответственно. Далее $\Omega Fr(\mathfrak{X})$ и $FrR(\mathfrak{X})$ — Ω-свободный и свободный классы Фиттинга соответственно, порожденные множеством $\mathfrak{X}$; $\Omega CR(\mathfrak{X})$ и $CR(\mathfrak{X})$, $\Omega KR(\mathfrak{X})$ и $KR(\mathfrak{X})$ — соответственно Ω-композиционный и композиционный, Ω-канонический и канонический классы Фиттинга, порожденные классом $\mathfrak{X}$.

Пусть f_1 и f_2 — произвольные ΩR-функции (R-функции). Будем говорить, что $f_1 \leqslant f_2$, если $f_1(A) \subseteq f_2(A)$ для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ ($A \in \mathfrak{J}$). Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — совокупность всех ΩR-спутников Ω-расслоенного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ с фиксированным направлением φ. Назовем ΩR-функцию f минимальным ΩR-спутником Ω-расслоенного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, если f является минимальным элементом множества $\{f_i \mid i \in I\}$. Аналогично определяется минимальный R-спутник расслоенного класса Фиттинга.

Теорема 10. *Пусть $\mathfrak{X}$ —непустой класс групп. Тогда Ω-расслоенный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R(\mathfrak{X}, \varphi)$ с направлением φ, где $\varphi_0 \leqslant \varphi$, обладает единственным минимальным ΩR-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = \mathrm{fit}(O^{\Omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X}), \qquad f(A) = \mathrm{fit}(G^{\varphi(A)} \mid G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{G}$ является Ω-расслоенным классом Фиттинга с направлением φ, где $\varphi_0 \leqslant \varphi$, и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{G}$, то класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R(\mathfrak{X}, \varphi)$ существует, и значит, множество L всех ΩR-спутников класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ непусто. Обозначим f_1 пересечение всех элементов из L. По лемме 12 $\mathfrak{F} = \Omega R(f_1, \varphi)$ и f_1 — единственный минимальный ΩR-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Пусть f — ΩR-функция, описанная в теореме. Покажем, что $f = f_1$. Пусть $M \in \mathfrak{X}$. Тогда $O^{\Omega}(M) \in f(\Omega')$ и из $K(M) \subseteq K(\mathfrak{X})$ следует, что $M^{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(M)$. Это означает, что $M \in \Omega R(f, \varphi)$ и $\mathfrak{X} \subseteq \Omega R(f, \varphi)$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \Omega R(\mathfrak{X}, \varphi) \subseteq \Omega R(f, \varphi)$.

Покажем, что $\Omega R(f, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$. Тогда найдется такая группа $H \in \mathfrak{F}$, что $A \in \Omega \cap K(H)$. Из равенства $\mathfrak{F} = \Omega R(f_1, \varphi)$ следует, что $H^{\varphi(A)} \in f_1(A)$. Поэтому $f_1(A) \neq \varnothing$. Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Если $A \in \Omega \cap K(G)$, то из $G \in \mathfrak{F} = \Omega R(f_1, \varphi)$ получаем, что $G^{\varphi(A)} \in f_1(A)$. Пусть теперь $A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{X})) \setminus (\Omega \cap K(G))$. Тогда $G \in \mathfrak{G}_{A'} = \varphi_0(A) \subseteq \varphi(A)$ и поэтому $G^{\varphi(A)} = 1 \in f_1(A)$. Таким образом,

$$f(A) = \mathrm{fit}(G^{\varphi(A)} \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(A).$$

Кроме того, из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $f(\Omega') = \mathrm{fit}(O^{\Omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(\Omega')$. Если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$, то $f(A) = \varnothing \subseteq f_1(A)$. Следовательно, $f \leqslant f_1$ и $\Omega R(f, \varphi) \subseteq \Omega R(f_1, \varphi)$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$, и значит, $f \in L$. Поскольку f_1 — единственный минимальный ΩR-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, то $f \leqslant f_1$ влечет $f = f_1$. Теорема доказана.

Следствие 22. *Пусть f_i — минимальный ΩR-спутник Ω-расслоенного класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$ с направлением φ, где $\varphi_0 \leqslant \varphi$, $i = 1, 2$. Включение $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ справедливо тогда и только тогда, когда $f_1 \leqslant f_2$.*

Следствие 23. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда Ω-свободный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega FrR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным ΩFr-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = \mathrm{fit}(O^{\Omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X}), \qquad f(A) = \mathrm{fit}(O^{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$.

Следствие 24. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда свободный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = FrR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным Fr-спутником f_1 таким, что $f_1(A) = \mathrm{fit}(O^{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $A \in K(\mathfrak{X})$ и $f_1(A) = \varnothing$, если $A \in \mathfrak{I} \setminus K(\mathfrak{X})$.*

Доказательство. Пусть $\Omega = \mathfrak{I}$. Согласно следствию 19 класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является Ω-свободным, и значит, по следствию 23 класс $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным ΩFr-спутником f, причем $\Omega \cap K(\mathfrak{X}) = K(\mathfrak{X})$. По следствию 16 класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ обладает Fr-спутником f_1, согласованным с f. Пусть g_1 — внутренний Fr-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и g — внутренний ΩFr-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, согласованный с g_1. Так как $f \leqslant g$, то и $f_1 \leqslant g_1$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным Fr-спутником f_1. Следствие доказано.

Следствие 25. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда Ω-канонический класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega KR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным ΩK-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = \mathrm{fit}(O^{\Omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X}), \qquad f(A) = \mathrm{fit}(O^{A,A'}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$.

Следствие 26. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда канонический класс Фиттинга $\mathfrak{F} = KR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным K-спутником f таким, что $f(A) = \mathrm{fit}(O^{A,A'}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $A \in K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \mathfrak{I} \setminus K(\mathfrak{X})$.*

Следствие 27. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда Ω-композиционный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega CR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным ΩC-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = \mathrm{fit}(O^{\Omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X}), \qquad f(A) = \mathrm{fit}(F^{A}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$.

Следствие 28. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда композиционный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = CR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным C-спутником f таким, что $f(A) = \mathrm{fit}(F^{A}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $A \in K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \mathfrak{I} \setminus K(\mathfrak{X})$.*

Лемма 13. *Пусть Ω — непустой класс простых групп. Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенным с r-направлением φ, то $\mathfrak{F}$ является (Z_p)-расслоенным с r-направлением φ для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega R(f,\varphi)$ — Ω-расслоенный класс Фиттинга с r-направлением φ и $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ является (Z_p)-расслоенным классом Фиттинга с направлением φ. Пусть f_p — такая $(Z_p)R$-функция, что $f_p(Z_p) = f(Z_p)$, $f_p((Z_p)') = \mathfrak{F}$, и пусть $\mathfrak{F}_1 = (Z_p)R(f_p,\varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $O^p(G) \in \mathfrak{F} = f_p((Z_p)')$. Если $Z_p \in K(G)$, то $G^{\varphi(Z_p)} \in f(Z_p) = f_p(Z_p)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и H — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа H комонолитична с монолитом $M = H_{\mathfrak{F}}$. Ввиду леммы 11 можно считать, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$. Тогда из включения $Z_p \in \Omega$ следует, что $O^\Omega(H) \subseteq O^p(H)$, и значит, $O^\Omega(H) \in f((Z_p)') = \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Пусть $A \in \Omega \cap K(H)$. Если $A \cong Z_p$, то

$$H^{\varphi(Z_p)} \in f_p(Z_p) = f(Z_p).$$

Пусть A неизоморфна Z_p. Из $O^p(H) \in \mathfrak{F}$ следует, что $O^p(H) \subseteq M$. Тогда

$$H/M \cong (H/O^p(H))/(M/O^p(H)) \in \mathfrak{G}_{A'}.$$

Так как $H/M \cong (H/M^{\varphi(A)})/(M/M^{\varphi(A)})$, то $(H/M^{\varphi(A)}) \in \varphi(A)\mathfrak{G}_{A'} = \varphi(A)$ и $H^{\varphi(A)} \subseteq M^{\varphi(A)} \in f(A)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Лемма доказана.

Определение 14. Правильное направление φ расслоенного класса Фиттинга назовем rn-направлением, если $A \notin \varphi(A)$ для любой неабелевой простой группы $A \in \mathfrak{J}$.

Замечание 7. Как и для формаций, направления Ω-свободного и Ω-композиционного классов Фиттинга являются rn-направлениями, а направление Ω-канонического класса Фиттинга не является rn-направлением. Отметим, что r-направления φ расслоенного класса Фиттинга такие, что $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{S}\mathfrak{G}_{A'}$ для любой простой группы $A \in \mathfrak{J}$, также являются rn-направлениями.

Теорема 11. *Пусть Ω — непустой класс простых групп. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенным с rn-направлением φ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является (Z_p)-расслоенным классом Фиттинга с rn-направлением φ для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Необходимость следует из леммы 13. Докажем достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = (Z_p)R(b_p,\varphi)$ — (Z_p)-расслоенный класс Фиттинга с rn-направлением φ для всех $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$. В силу леммы 11 и теоремы 10 можно считать, что $b_p((Z_p)') = \mathfrak{F}$ и $b_p(Z_p) = \mathrm{fit}(G^{\varphi(Z_p)} \mid G \in \mathfrak{F})$ для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$. Пусть b — такая ΩR-функция, что $b(\Omega') = \mathfrak{F}$ и $b(Z_p) = b_p(Z_p)$ для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$, $b(Z_p) = \varnothing$ для всех $Z_p \in \Omega \setminus K(\mathfrak{F})$, $b(A) = \mathfrak{F}$, если $A \in \Omega \setminus \mathfrak{A}$, и $\mathfrak{B} = \Omega R(b,\varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $O^\Omega(G) \in \mathfrak{F} = b(\Omega')$. Пусть $A \in \Omega \cap K(G)$. Если $A \cong Z_p$, то $G^{\varphi(Z_p)} \in b_p(Z_p) = b(Z_p)$. Если $A \in \mathfrak{A}$, то $G^{\varphi(A)} \in \mathfrak{F} = b(A)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$.

Предположим, что $B \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{F}$ и B — группа наименьшего порядка с таким свойством. Тогда группа B комонолитична с монолитом $M = B_{\mathfrak{F}}$. Пусть $A \in K(B/M)$. Поскольку $O^\Omega(B) \in b(\Omega') = \mathfrak{F}$, то $O^\Omega(B) \subseteq M$. Тогда

$$B/M \cong (B/O^\Omega(B))/(M/O^\Omega(B)) \in \mathfrak{G}_\Omega,$$

и значит, $A \in \Omega$. Пусть $A \notin \mathfrak{A}$. Тогда $A \notin \varphi(A)$. Если $B^{\varphi(A)} \subset B$, то

$$B/M \cong (B/B^{\varphi(A)})/(M/B^{\varphi(A)}) \in \varphi(A),$$

что невозможно. Следовательно, $B = B^{\varphi(A)} \in b(A) = \mathfrak{F}$. Получаем противоречие. Таким образом, $A \cong Z_p$. Если $Z_p \notin K(\mathfrak{F})$, то $b(Z_p) = \varnothing$, что в силу $B^{\varphi(Z_p)} \in b(Z_p)$ невозможно. Следовательно, $Z_p \in K(\mathfrak{F})$ и $B^{\varphi(Z_p)} \in b(Z_p) = b_p(Z_p)$. Кроме того, из $B/M \in \mathfrak{A}_p$ следует, что $O^p(B) \subseteq M$ и поэтому $O^p(B) \in \mathfrak{F} = b_p((Z_p)')$. Таким образом, $B \in (Z_p)R(b_p, \varphi) = \mathfrak{F}$. Получаем противоречие. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$. Теорема доказана.

Следствие 29. *Пусть Ω — непустой класс простых групп и $\Omega_1 = \Omega \cap \mathfrak{A} \cap K(\mathfrak{F})$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенным классом Фиттинга с $r\pi$-направлением φ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является Ω_1-расслоенным классом Фиттинга с $r\pi$-направлением φ.*

Доказательство проводится аналогично доказательству следствия 15.

Список литературы

1. Gaschütz W., Theorie der endlichen auflösdaren Gruppen. *Math. Z.* (1963) **80**, №4, 300–305.
2. Шеметков Л. А., Ступенчатые формации групп. *Матем. сб.* (1974) **94**, №4, 628–648.
3. Doerk K., Hawkes T., *Finite soluble groups.* Gruyter, Berlin, 1992.
4. Hartley B., On Fischer's analysation of formation theory. *Proc. London Math. Soc.* (1969) **3**, №9, 193–207.
5. Скиба А. Н., Шеметков Л. А., О частично локальных формациях. *Докл. АН Беларуси* (1995) **39**, №3, 123–143.
6. Скиба А. Н., Шеметков Л. А., Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Матем. труды* (1999) **2**, №1, 1–34.
7. Ведерников В. А., Коптюх Д. Г., Частично композиционные формации групп. Препринт №2. БГПУ, Брянск, 1999, 1–28.
8. Скиба А. Н., Шеметков Л. А., Частично композиционные формации конечных групп. *Докл. АН Беларуси* (1999) **43**, №4, 5–8.
9. Шеметков Л. А., *Формации конечных групп.* Наука, Москва, 1978.
10. Шеметков Л. А., Скиба А. Н., *Формации алгебраических систем.* Наука, Москва, 1989.
11. Скиба А. Н., Шеметков Л. А., О минимальном композиционном экране композиционной формации. *Вопросы алгебры* (1992) **7**, 39–43.
12. Ведерников В. А., Прямые произведения и формации конечных групп. *Алгебра и логика* (1990) **29**, №10, 523–548.
13. Ведерников В. А., О некоторых классах конечных групп. *Докл. АН БССР* (1988) **32**, №10, 872–875.

Статья поступила 23.03.2000.