V. I. Burenkov, Partitions of unity,
Trudy Mat. Inst. Steklov., 1979, Volume 150, 24–30

https://www.mathnet.ru/eng/tm2477

Труды Математического института АН СССР
1979, том 150

В. И. БУРЕНКОВ

О РАЗБИЕНИЯХ ЕДИНИЦЫ

Во многих вопросах, связанных с изучением свойств функций, заданных на достаточно общих множествах $\mathscr{E} \subset R^n$, бывает полезным использовать «разбиения единицы», позволяющие «склеивать» локальные построения. Целью настоящей заметки является построение разбиения единицы в возможно более общей ситуации.

Мы будем пользоваться следующими обозначениями. Пусть $X \subset R^n$ — некоторое множество и число $\delta > 0$, положим

$$X_\delta = \{x: B(x, \delta) \subset X\}, \qquad X^\delta = \bigcup_{x \in X} B(x, \delta),$$

где $B(x, \delta)$ — открытый шар с центром в точке x радиуса δ. Если $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$, $\delta_i > 0$, — вектор, то

$$X_\delta \equiv X_{\delta_1, \ldots, \delta_n} = \{x: Q(x, \delta) \subset X\}, \qquad X^\delta \equiv X^{\delta_1, \ldots, \delta_n} = \bigcup_{x \in X} Q(x, \delta),$$

где

$$Q(x, \delta) \equiv Q(x, \delta_1, \ldots, \delta_n) = \{y: |x_i - y_i| < \delta_i, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

Нам понадобятся следующие свойства множеств X_δ и X^δ:

$$(X_{\delta_1})_{\delta_2} = X_{\delta_1+\delta_2}, \qquad (X^{\delta_1})^{\delta_2} = X^{\delta_1+\delta_2} \qquad (\delta_1, \delta_2 > 0),$$

$$(X_{\delta_1})^{\delta_2} \subset X_{\delta_1-\delta_2}, \qquad (X^{\delta_1})_{\delta_2} \supset X^{\delta_1-\delta_2} \qquad (\delta_1 > \delta_2 > 0),$$

$$(X_{\delta_1})^{\delta_2} \subset X^{\delta_2-\delta_1}, \qquad (X^{\delta_1})_{\delta_2} \supset X_{\delta_2-\delta_1} \qquad (\delta_2 > \delta_1 > 0),$$

$$(X \cup Y)_\delta \supset X_\delta \cup Y_\delta, \quad (X \cup Y)^\delta = X^\delta \cup Y^\delta,$$

$$(X \cap Y)_\delta = X_\delta \cup Y_\delta, \quad (X \cap Y)^\delta \subset X^\delta \cap Y^\delta$$

(если δ_1 и δ_2 — векторы, то $\delta_1 > \delta_2$ обозначает, что $\delta_{1i} > \delta_{2i}$, $i = 1, \ldots, n$). В случае, когда δ — число, эти свойства приведены в работе автора [1], в случае, когда δ — вектор, они также справедливы. Нетрудно получить эти свойства, используя очевидные соотношения $y \in Q(x, \delta) \Leftrightarrow x \in Q(y, \delta)$ и $\bigcup_{y \in Q(x, \delta_1)} Q(x, \delta_2) = Q(x, \delta_1 + \delta_2)$.

Для $x \in \bigcup_m X_m$ обозначим через $\varkappa(x)$ количество множеств X_m, содержащих точку x, и назовем число $\varkappa = \sup_{x \in \bigcup_m X_m} \varkappa(x)$ кратностью покрытия $\{X_m\}$.

Обозначим далее для $x \in \bigcup_m X_m$ через $\tilde{\varkappa}(x)$ наименьшее из натуральных чисел, обладающих следующим свойством: существует такая окрестность

U_x, что количество множеств X_m, пересекающихся с U_x, равно $\tilde{\varkappa}(x)$. Число $\tilde{\varkappa} = \sup\limits_{x \in \bigcup\limits_m X_m} \tilde{\varkappa}(x)$ назовем регулярной кратностью покрытия $\{X_m\}$. Отметим, что всегда $\varkappa(x) \leqslant \tilde{\varkappa}(x)$ и $\varkappa \leqslant \tilde{\varkappa}$. С другой стороны, нетрудно привести пример покрытия, для которого $\varkappa < \infty$, но $\tilde{\varkappa} = \infty$ (пусть $n = 1$, $X_0 =]-1, \frac{1}{2}[$, $X_m =]\,2^{-m-1}, 2^{-m+1}\,[$, $m = 1, 2, \ldots$; в этом случае $\varkappa = 3$, $\tilde{\varkappa} = \infty$, так как $\tilde{\varkappa}(0) = \infty$).

Отметим, что если для $x \in \bigcup\limits_m X_m$

$$r_x = \inf_{l: x \overline{\in} X_l} \rho(x, X_l) > 0,$$

то $\tilde{\varkappa}(x) = \varkappa(x)$, так как в этом случае шар $B(x, r_x/2)$ пересекается только с теми X_m, которые содержат x. В противном случае $\varkappa(x) < \tilde{\varkappa}(x)$.

Обозначим еще через N_m число множеств X_l, пересекающихся с X_m (включая X_m) и рассмотрим число $N \equiv N(\{X_m\}) = \sup\limits_m N_m$. Отметим, что $\varkappa \leqslant N$; если все множества X_m открытые, то $\tilde{\varkappa} \leqslant N$(если $x \in \bigcup\limits_m X_m$, то для некоторого m $x \in X_m$ вместе с некоторой окрестностью, которая пересекается с не бо́льшим количеством множеств X_l, чем X_m. В общем случае может быть так, что $\tilde{\varkappa}(\{X_m\}) < \infty$, $N(\{X_m\}) = \infty$, и наоборот, что $\tilde{\varkappa}(\{X_m\}) = \infty$, $N(\{X_m\}) < \infty$.

Очевидно, что с расширением множеств X_m величины $\varkappa(\{X_m\})$, $\tilde{\varkappa}(\{X_m\})$ и $N(\{X_m\})$ не убывают.

Пусть $\mathscr{E}$ — некоторое множество в R^n и пусть конечный или счетный набор множеств $\mathscr{E}_m$ обладает тем свойством, что

$$\mathscr{E} \subset \bigcup_m \mathscr{E}_m. \tag{1}$$

Пусть, далее, $\mathscr{E}'_m \subset \mathscr{E}_m$, причем по-прежнему

$$\mathscr{E} \subset \bigcup_m \mathscr{E}'_m, \tag{2}$$

и для некоторого вектора $\rho_m = (\rho_{m1}, \ldots, \rho_{mn})$, $\rho_{mi} > 0$,

$$\mathscr{E}''_m = (\mathscr{E}'_m)^{\rho_m} \subset \mathscr{E}_m. \tag{3}$$

Рассмотрим вектор $\tilde{\rho}_m = (\tilde{\rho}_{m1}, \ldots, \rho_{mn})$, где

$$\tilde{\rho}_{mi} = \inf_{l: \mathscr{E}''_l \cap \mathscr{E}''_m \neq \emptyset} \rho_{li}.$$

Лемма. *Пусть выполнены условия* (1) — (3),

$$\tilde{\varkappa}(\{\mathscr{E}''_m\}) < \infty \tag{4}$$

и для всех рассматриваемых m

$$\tilde{\rho}_m > 0. \tag{5}$$

Существуют такие неотрицательные функции $\psi_m \in C^\infty(R^n)$, *что*

1) $\sum\limits_m \psi_m(x) = 1$, $x \in \bigcup \mathscr{E}'_m$; $\sum\limits_m \psi_m(x) = 0$, $x \in {}^c(\bigcup\limits_m \mathscr{E}_m)$;

2) $\mathscr{E}'_m \subset \operatorname{supp} \psi_m \subset \mathscr{E}''_m$;

3) *для любого целочисленного вектора* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \geqslant 0$

$$|D^\alpha \psi_m(x)| \leqslant c(\alpha, \varkappa)\, \tilde{\rho}_m^{-\alpha},$$

где $\tilde{\rho}_m^{-\alpha} = \tilde{\rho}_{m1}^{-\alpha_1} \ldots \tilde{\rho}_{mn}^{-\alpha_n}$, $c(\alpha, \varkappa)$ *зависит только от* α *и* $\varkappa \equiv \varkappa(\{\mathscr{E}''_m\})$.

З а м е ч а н и е 1. Если $N(\{\mathscr{E}''_m\}) < \infty$ (или тем более $N(\{\mathscr{E}_m\}) < \infty$), то условия (4) и (5) выполняются. Так как $\mathscr{E}''_m$ — открытые множества, то $\tilde{\varkappa}(\{\mathscr{E}''_m\}) \leqslant N(\{\mathscr{E}''_m\})$, кроме того, множество $\{l' : \mathscr{E}''_l \cap \mathscr{E}''_m \neq \varnothing\}$ конечно.

З а м е ч а н и е 2. Если множества $\mathscr{E}''_m$ ограничены, $\overline{\mathscr{E}}''_m \subset \mathscr{E}_m$ и $\tilde{\varkappa}(\{\mathscr{E}_m\}) < \infty$, условия (4) и (5) выполняются. Очевидно, что $\tilde{\varkappa}(\{\mathscr{E}''_m\}) < \tilde{\varkappa}(\{\mathscr{E}_m\})$; кроме того, множество $\{l : \mathscr{E}''_l \cap \mathscr{E}''_m \neq \varnothing\}$ конечно. (Если оно счетно, то выберем последовательность $x_l \in \mathscr{E}''_l \cap \mathscr{E}''_m \neq \varnothing$; предельная точка $x_\infty \in \overline{\mathscr{E}}''_m \subset \mathscr{E}_m$ и $\tilde{\varkappa}(x_\infty) = \infty$, поскольку всякая окрестность точки x_∞ содержит бесконечное число x_l и, значит, пересекается с бесконечным числом $\mathscr{E}''_l$.)

З а м е ч а н и е 3. Из 2) следует, что $\mathscr{E} \subset \bigcup\limits_m \operatorname{supp}\psi_m$, причем $\varkappa(\{\operatorname{supp}\psi_m\}) \leqslant \varkappa(\{\mathscr{E}''_m\})$.

З а м е ч а н и е 4. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $0 < \varepsilon < 1$; выбирая вместо множеств $\mathscr{E}''_m = (\mathscr{E}'_m)^{\rho_m}$ множества $(\mathscr{E}''_m)^* = (\mathscr{E}'_m)^{\varepsilon\rho_m}$ мы получим функции ψ_m, удовлетворяющие 1), для которых

2′) $\mathscr{E}'_m \subset \operatorname{supp}\psi_m \subset (\mathscr{E}'_m)^{\varepsilon\rho_m}$;

при этом

3′) $|D^\alpha\psi_m(x)| \leqslant c(\alpha, \varkappa)\,\varepsilon^{-\alpha}\tilde{\rho}_m^{-\alpha}$,

так как для множеств $(\mathscr{E}''_m)^*$ числа $\tilde{\rho}^*_{mi} \geqslant \varepsilon_i\tilde{\rho}_{mi}$.

З а м е ч а н и е 5. В условии (3) можно считать, что ρ_m — число, а не вектор, тогда $\tilde{\rho}_m$ также число и неравенство 3) можно переписать так:

3″) $|D^\alpha\psi_m(x)| \leqslant c(\alpha, \varkappa)\,\tilde{\rho}_m^{-|\alpha|}$.

Это следует из того, что $\mathscr{E}_m^{\left(\frac{\rho_m}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{\rho_m}{\sqrt{n}}\right)} \subset \mathscr{E}_m^{\rho_m} \subset \mathscr{E}_m^{(\rho_m, \ldots, \rho_m)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\chi_m(x)$ характеристическую функцию множества $\tilde{\mathscr{E}}_m = (\mathscr{E}'_m)^{1/2\rho_m}$ и рассмотрим ее неоднородное усреднение с векторным радиусом усреднения $\frac{1}{4}\rho_m = \left(\frac{1}{4}\rho_{m1}, \ldots, \frac{1}{4}\rho_{mn}\right)$,

$$\varphi_m(x) = \int\limits_{R^n} \chi_m\left(x - \frac{1}{4}\rho_m z\right)\omega(z)\,dz \equiv$$
$$\equiv \int\limits_{R^n} \chi_m\left(x_1 - \frac{1}{4}\rho_{m1}z_1, \ldots, x_n - \frac{1}{4}\rho_{mn}z_n\right)\omega(z_1, \ldots, z_n)\,dz_1 \ldots dz_n, \quad (5)$$

где $\omega(z)$ — ядро усреднения, удовлетворяющее условиям: $\omega \in C^\infty(R^n)$, $\omega(z) = 0$, если хотя бы для одного i $|z_i| \geqslant 1$, $\omega(z) \geqslant 0$, $\int\limits_{R^n}\omega(z)\,dz = 1$. Из свойств усреднений следует, что

$$|D^\alpha\varphi_m(x)| \leqslant c_\alpha\rho_m^{-\alpha}, \quad 0 \leqslant \varphi_m(x) \leqslant 1 \quad (6)$$

и

$$(\mathscr{E}'_m)^{\frac{1}{4}\rho_m} \subset \operatorname{supp}\varphi_m \subset (\mathscr{E}'_m)^{\frac{3}{4}\rho_m} \subset \mathscr{E}_m, \quad \varphi_m(x) = 1, \ x \in (\mathscr{E}'_m)^{\frac{1}{4}\rho_m}. \quad (7)$$

Поясним свойство (7). Из (5) следует, что $\varphi_m(x)$ может не быть равной нулю только для тех x, для которых параллелепипед $Q(x, 1/4\,\rho_m)$ пересекается с $\tilde{\mathscr{E}}_m$, т. е. для $x \in (\tilde{\mathscr{E}}_m)^{1/4\rho_m} = ((\mathscr{E}'_m)^{1/2\rho_m})^{1/4\rho_m} = (\mathscr{E}'_m)^{3/4\rho_m}$. С другой стороны, $\varphi_m(x) = 1$ для тех x, для которых $Q(x, 1/4\,\rho_m) \subset \tilde{\mathscr{E}}_m$, т. е. для $x \in (\tilde{\mathscr{E}}_m)_{1/4\rho_m} \supset ((\mathscr{E}'_m)^{1/2\rho_m})_{1/4\rho_m} \supset (\mathscr{E}'_m)^{1/4\rho_m}$.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = \sum_m \varphi_m(x), \qquad x \in R^n. \tag{8}$$

Учитывая (7), получим, что $(\mathscr{E}^{(1)} \equiv \bigcup_m (\mathscr{E}'_m)^{1/4\rho_m})$

$$\Phi(x) \leqslant \varkappa,\ x \in R^n;\ \Phi(x) \geqslant 1,\ x \in \mathscr{E}^{(1)}. \tag{9}$$

Так как $\tilde{\varkappa} < \infty$, то для любого $x \in \bigcup_m \mathscr{E}_m$ существует такая окрестность U_x, что

$$\Phi(y) = \sum_{m \in M(x)} \varphi_m(y), \qquad y \in U_x, \tag{10}$$

где $M(x) = \{m : U_x \cap \mathscr{E}_m \neq \phi\}$ — конечное множество.

Из (10) следует, что функция $\Phi(x)$ бесконечно дифференцируема на $\bigcup_m \mathscr{E}_m$. При этом

$$D^\alpha \Phi(x) = \sum_{m \in M(x)} D^\alpha \varphi_m(x) = \sum_{l:\, x \in \operatorname{supp} \varphi_l} D^\alpha \varphi_l(x)$$

(так как вне $\operatorname{supp} \varphi_l$ $D^\alpha \varphi_l(x) = 0$) и

$$|D^\alpha \Phi(x)| \leqslant \sum_{l:\, x \in \operatorname{supp} \varphi_l} c_\alpha \rho_l^{-\alpha} \leqslant \varkappa c_\alpha (\min_{l:\, x \in \mathscr{E}_l} \rho_l)^{-\alpha} \tag{11}$$

$(\min \rho_l = (\min \rho_{l1}, \ldots, \min \rho_{ln}))$.

Положим

$$\psi_m^{(1)}(x) = \varphi_m(x)/\Phi(x),\ x \in \mathscr{E}^{(1)}, \tag{12}$$

тогда

$$\operatorname{supp} \psi_m^{(1)} = \operatorname{supp} \varphi_m \cap \mathscr{E}^{(1)} \tag{13}$$

и

$$\sum_m \psi_m^{(1)}(x) = 1, \qquad x \in \mathscr{E}^{(1)}. \tag{14}$$

Кроме того, $\psi_m^{(1)} \in C^\infty(\mathscr{E}^{(1)})$ и для $x \in \operatorname{supp} \psi_m^{(1)}$

$$D^\alpha \psi_m^{(1)}(x) = \sum_{0 \leqslant \beta \leqslant \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!} D^{\alpha-\beta} \varphi_m(x)\, D^\beta [(\Phi(x))^{-1}]$$

$(\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$, $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$ означает, что $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n)$. В силу правил дифференцирования $D^\beta[(\Phi(x))^{-1}] = (\Phi(x))^{-1-|\beta|}\Sigma$, где Σ состоит из конечного числа слагаемых вида $D^{\gamma_1}\Phi \cdot D^{\gamma_2}\Phi \cdot \ldots \cdot D^{\gamma_{|\beta|}}\Phi$, причем $0 \leqslant \gamma_i \leqslant \beta$, $\gamma_1 + \ldots + \gamma_{|\beta|} = \beta$, поэтому

$$|D^\alpha \psi_m^{(1)}(x)| \leqslant c_\alpha^{(1)} \sum_{0 \leqslant \beta \leqslant \alpha} \rho_m^{-\alpha+\beta} \varkappa^{|\beta|} (\min_{l:\, x \in \mathscr{E}_l} \rho_l)^{-\beta} \leqslant$$

$$\leqslant c_\alpha^{(1)} \varkappa^{|\alpha|} \sum_{0 \leqslant \beta \leqslant \alpha} \rho_m^{-\alpha+\beta} (\inf_{x \in \mathscr{E}_m} \min_{l:\, x \in \mathscr{E}_l} \rho_l)^{-\beta} \leqslant$$

$$\leqslant c_\alpha^{(1)} \varkappa^{|\alpha|} \sum_{0 \leqslant \beta \leqslant \alpha} \rho_m^{-\alpha+\beta} (\inf_{l:\, \mathscr{E}_l \cap \mathscr{E}_m \neq \phi} \rho_l)^{-\beta}.$$

Таким образом,

$$|D^\alpha \psi_m^{(1)}(x)| \leqslant c_\alpha^{(2)} \varkappa^{|\alpha|} \tilde{\rho}_m^{-\alpha}, \qquad x \in \mathscr{E}^{(1)}. \tag{15}$$

Пусть, далее, $\mathscr{E}^{(2)} = \bigcup_m (\mathscr{E}'_m)^{\rho_m/8}$, λ_m — характеристическая функция множества

$$\mathscr{E}_m \cap \mathscr{E}^{(2)} = \mathscr{E}_m \cap \Big(\bigcup_{l:\, \mathscr{E}'_l \cap \mathscr{E}_m \neq \varnothing} (\mathscr{E}'_l)^{\frac{\rho_l}{8}} \Big) \subset \bigcup_{l:\, \mathscr{E}'_l \cap \mathscr{E}_m \neq \varnothing} (\mathscr{E}'_l)^{\frac{\rho_l}{8}}, \tag{16}$$

а μ_m — усреднение с векторным радиусом усреднения $\tilde{\rho}_m/8$ (аналогичное (5)), тогда

$$| D^\alpha \mu_m (x) | \leqslant c_\alpha^{(3)} \tilde{\rho}_m^{-\alpha}. \tag{17}$$

Кроме того, $(\mathscr{E}^{(0)} = \bigcup_m \mathscr{E}'_m)$,

$$\operatorname{supp} \mu_m \subset \mathscr{E}^{(1)}, \quad \mu_m (x) = 1, \quad x \in \operatorname{supp} \psi_m^{(1)} \cap \mathscr{E}^{(0)}. \tag{18}$$

В самом деле, согласно (16), свойствам множеств X_δ и X^δ и определению чисел $\tilde{\rho}_m$

$$(\mathscr{E}_m \cap \mathscr{E}^{(2)})^{\frac{\tilde{\rho}_m}{8}} \subset \bigcup_{l:\, \mathscr{E}_l \cap \mathscr{E}_m \neq \varnothing} ((\mathscr{E}'_l)^{\frac{\rho_l}{8}})^{\frac{\tilde{\rho}_m}{8}} \subset$$

$$\subset \bigcup_{l:\, \mathscr{E}'_l \cap \mathscr{E}_m \neq \varnothing} ((\mathscr{E}'_l)^{\frac{\rho_l}{8}})^{\frac{\rho_l}{8}} \subset \bigcup_l (\mathscr{E}'_l)^{\frac{\rho_l}{4}} = \mathscr{E}^{(1)}.$$

С другой стороны,

$$(\mathscr{E}_m \cap \mathscr{E}^{(2)})_{\frac{\tilde{\rho}_m}{8}} = (\mathscr{E}_m)_{\frac{\tilde{\rho}_m}{8}} \cap \Big(\bigcup_{l:\, \mathscr{E}'_l \cap \mathscr{E}_m \neq \varnothing} (\mathscr{E}'_l)^{\frac{\rho_l}{8}} \Big)_{\frac{\tilde{\rho}_m}{8}} \supset$$

$$\supset (\mathscr{E}_m)_{\frac{\rho_m}{8}} \cap \Big(\bigcup_{l:\, \mathscr{E}'_l \cap \mathscr{E}_m \neq \varnothing} ((\mathscr{E}'_l)^{\frac{\rho_l}{8}})_{\frac{\tilde{\rho}_m}{8}} \Big) \supset (\mathscr{E}_m)_{\frac{\rho_m}{8}} \cap \Big(\bigcup_{l:\, \mathscr{E}'_l \cap \mathscr{E}_m \neq \varnothing} (\mathscr{E}'_l)^{\frac{\rho_l - \tilde{\rho}_m}{8}} \Big) \supset$$

$$\supset (\mathscr{E}_m)_{\frac{\rho_m}{8}} \cap \Big(\bigcup_{l:\, \mathscr{E}'_l \cap \mathscr{E}_m \neq \varnothing} \mathscr{E}'_l \Big) = (\mathscr{E}_m)_{\frac{\rho_m}{8}} \cap \Big(\bigcup_l \mathscr{E}'_l \Big) \supset \operatorname{supp} \varphi_m \cap \mathscr{E}^{(0)}$$

(здесь мы еще учли (7)).

Из доказанных включений, как и выше (см. (7)), следует (18). Положим наконец,

$$\psi_m (x) = \psi_m^{(1)} (x)\, \mu_m (x), \quad x \in R^n \tag{19}$$

(для $x \overline{\in} \operatorname{supp} \mu_m$ считаем, что $\psi_m^{(1)} (x)\, \mu_m (x) = 0$, даже если $\psi_m^{(1)} (x)$ не определено; для $x \in \operatorname{supp} \mu_m$ в силу (12) $\psi_m^{(1)} (x)$ определено, так как согласно (18) $\operatorname{supp} \mu_m \subset \mathscr{E}^{(1)}$).

Функции $\psi_m (x) \in C^\infty (R^n)$. В силу (14) и (18) для $x \in \mathscr{E}^{(0)}$ $\sum_m \psi_m (x) = \sum_m \psi_m^{(1)} \mu_m (x) = \sum_m \psi_m^{(1)} (x) = 1$; в силу (13), (19) и (7) $\mathscr{E}'_m \subset \operatorname{supp} \psi_m \subset \operatorname{supp} \varphi_m \subset (\mathscr{E}'_m)^{\rho_m} \subset \mathscr{E}_m$, откуда следует, что для $x \overline{\in} \bigcup_m \mathscr{E}_m$ $\sum_m \psi_m (x) = 0$. Таким образом, для $\psi_m (x)$ выполнены утверждения 1) и 2) леммы, утверждение 3) следует из (19), (15) и (17) (константа c имеет вид $c = c_{\alpha,n} \varkappa^{|\alpha|}$).

В качестве первого примера рассмотрим случай, когда $\mathscr{E}$ — замкнутое множество, а $\mathscr{E}_m$, $m = 1, \ldots, s$, — конечный или счетный набор открытых множеств (s — натуральное число или $s = \infty$), обладающий тем свойством, что для некоторого вектора $\rho > 0$, не зависящего от m

$$\mathscr{E} \subset \bigcup_{m=1}^{s} (\mathscr{E}_m)_\rho \tag{20}$$

(если $s < \infty$, то такое ρ всегда существует). Пусть $K = \varkappa(\{\mathscr{E}_m\}) < \infty$. Пусть $\mathscr{E}'_m = (\mathscr{E}_m)_\rho$, числа $\rho_m = \rho/2$. В этом случае $|D^\alpha \psi_m(x)| \leqslant c(\alpha, K, \rho)$ ($c(\alpha, K, \rho)$ не зависит от m и s). Отметим, что $\mathscr{E}''_m = (\mathscr{E}'_m)^{\rho_m} = (\mathscr{E}'_m)_{\rho/2}$ и $\varkappa(\{\mathscr{E}''_m\}) \leqslant \leqslant \tilde{\varkappa}(\{\mathscr{E}''_m\}) \leqslant K < \infty$. (В самом деле, пусть $x \in \bigcup_m \mathscr{E}''_m$. Рассмотрим те m, для которых $x \in \mathscr{E}'_m$; количество таких m не превышает K. Для остальных рассматриваемых m $x \overline{\in} \mathscr{E}''_m$, тогда для этих последних m $B(x, \rho/2) \cap \mathscr{E}''_m = \phi$, т. е. этот шар пересекается не более чем с K множествами $\mathscr{E}''_m$ и $\tilde{\varkappa}(\{\mathscr{E}''_m\}) \leqslant \leqslant K$.) Подобное разбиение единицы используется, например, для склейки локальных продолжений.

Наибольший интерес лемма представляет в случае, когда условие (20) не выполняется. Пусть $\mathscr{E}$ — открытое множество, $\{\mathscr{E}_m\}$ и $\{\mathscr{E}'_m\}$—счетные покрытия и $\mathscr{E} = \bigcup_m \mathscr{E}_m = \bigcup_m \mathscr{E}'_m$. Подобные разбиения впервые были рассмотрены Уитни [2]. В этой работе $\mathscr{E}$ — произвольное открытое множество в R^n, а $\{\mathscr{E}'_m\}$ — набор замкнутых кубов, обладающих следующими свойствами: $\mathscr{E} = \bigcup_m \mathscr{E}'_m$; $\mathscr{E}'_m$ и $\mathscr{E}'_l$, $l \neq m$, могут пересекаться только по границам;

$$c_1 \operatorname{diam} \mathscr{E}_m \leqslant \rho(\mathscr{E}_m, \Gamma(\mathscr{E})) \leqslant c_2 \operatorname{diam} \mathscr{E}_m,$$

где c_1 и c_2 не зависят от $\mathscr{E}$; кубы $\mathscr{E}_m$, имеющие тот же центр, что и $\mathscr{E}'_m$, но растянутые в $5/4$ раза, пересекаются не более чем с 12^n кубами $\mathscr{E}_l$ (доказывается, что такие кубы $\mathscr{E}'_m$ и $\mathscr{E}_m$ существуют). В этом случае ρ_m — число, $\rho_m = = c_3 \operatorname{diam} \mathscr{E}_m$ и

$$|D^\alpha \psi_m(x)| \leqslant c(|\alpha|\ n)\,(\operatorname{diam} \mathscr{E}_m^{-|\alpha|} + 1).$$

В работе автора [1] $\mathscr{E}$ — произвольное открытое множество $\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_{a^{-m-2}} \setminus \setminus \mathscr{E}_{a^{-m+1}}$, $\mathscr{E}'_m = \mathscr{E}_{a^{-m-1}} \setminus \mathscr{E}_{a^{-m}}$, ρ_m — число, $\rho_m = a^{-m-2}$ $(a > 1)$,

$$|D^\alpha \psi_m(x)| \leqslant c(|\alpha|),\ a^{m|\alpha|},\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

В качестве еще одного примера рассмотрим случай, когда

$$\mathscr{E} = \{x \in R^n,\ x_n > \varphi(\bar{x})\},\ \bar{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

где $\varphi(\bar{x})$, $\bar{x} \in R^{n-1}$ удовлетворяет условию Липшица с показателем γ $(0 < < \gamma \leqslant 1)$

$$|\varphi(\bar{x}) - \varphi(\bar{y})| \leqslant M |\bar{x} - \bar{y}|^\gamma,\ \bar{x}, \bar{y} \in R^{n-1}.$$

При этом $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

$$\mathscr{E}_m = \{x \in R^n,\ 2^{-m-2} < x_n - \varphi(\bar{x}) \leqslant 2^{-m+1}\},$$

$$\mathscr{E}'_m = \{x \in R^n, 2^{-m-1} < x_n - \varphi(\bar{x}) \leqslant 2^{-m}\},$$

и $(\mathscr{E}'_m)^{\rho_m} \subset \mathscr{E}_m$, где вектор $\rho_m = c\left(2^{-\frac{m}{\gamma}}, \ldots, 2^{-\frac{m}{\gamma}}, 2^{-m}\right)$ и

$$|D^\alpha \psi_m(x)| \leqslant c(\alpha, \gamma, M, n) \cdot 2^{m\left(\frac{|\bar{\alpha}|}{\gamma} + \alpha_n\right)},$$

$\bar{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$. При $\gamma = 1$ такое разбиение единицы рассматривалось в работе А. Л. Трескунова [3], при $0 < \gamma \leqslant 1$ в работе автора [4]. Поясним условие $(\mathscr{E}'_m)^{\rho_m} \subset \mathscr{E}_m$. Если $y \in (\mathscr{E}'_m)^{\rho_m}$, то для некоторого $x \in \mathscr{E}'_m$ $y \in Q(x, \rho_m)$, тогда

$$y_n - \varphi(\bar{y}) = y_n - x_n + \varphi(\bar{x}) - \varphi(\bar{y}) + x_n - \varphi(\bar{x}) \leqslant$$
$$\leqslant c\, 2^{-m} + M\,|\bar{x} - \bar{y}|^{\gamma} + 2^{-m} \leqslant c\, 2^{-m} + Mnc^{\gamma}\, 2^{-m} \leqslant 2^{-m+1}$$

при достаточно малом c (не зависящем от m). Аналогично, $y_n - \varphi(\bar{y}) > 2^{-m-2}$, т. е. $y \in \mathscr{E}_m$.

В заключение автор благодарит М. Л. Гольдмана за ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Буренков В. И.* О плотности бесконечно дифференцируемых функций в пространствах Соболева для произвольного открытого множества.—Труды МИАН СССР, 1974, **131**, с. 39—50.
2. *Whitney H.* Analytic extension of differentiable functions defined in the closed sets.— Trans. Amer. Math. Soc., 1934, **36**, c. 63—89.
3. *Трескунов А. Л.* Точные оценки в L_p для одного класса вырождающихся уравнений 2-го порядка эллиптического типа.— Записки науч. семинаров ЛОМИ АН СССР, 1967, 5, с. 232—249.
4. *Буренков В. И.* Об одном способе продолжения дифференцируемых функций.— Труды МИАН СССР, 1976, **160**, с. 27—67.